

Derivation and Automorphisms of operator algebras II

奈良高寿 北川誠之助

{1} 序

本講演は

Kadison, Lance and Ringrose

Derivation and Automorphisms of operator algebras II

Journal of functional analysis 1967, II

を紹介する

Kadison Ringrose による同名の論文 I においては automorphism

group を norm による topology を入れ, connected component, etc の

論に力を入れている。本論文においては, C^* -algebra における

derivation の inner ~~性~~ に関する条件を論じている。

{2} 記号及び定義

$\mathcal{A}$: 与えられた C^* -algebra

$\bar{\mathcal{A}}$: $\mathcal{A}$ の weak closure

δ : $\mathcal{A}$ の derivation

$\bar{\delta}$: δ の $\bar{\mathcal{A}}$ への拡張 ~~性~~ とする。 $\|\delta\| = \|\bar{\delta}\|$ は知られている []

ここで δ が derivation であるとは

$\delta: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$: linear mapping.

$$\mathcal{A} \ni \forall A, B, \quad \delta(AB) = A\delta(B) + \delta(A)B$$

特に δ が $*$ -derivation といふ $\delta(A^*) = \delta(A)^*$

δ : inner-derivation といふ. $\exists A \in \mathcal{A}$ s.t. $\delta(B) = \text{ad}(A)(B) = AB - BA$ $\forall B$

§3 derivation.

[1] [2] により $\bar{\delta}$ は $\bar{\mathcal{A}}$ において inner-derivation となることを示されているが、次の定理はその精密化である。

定理 1 δ : $\mathcal{A}$ の $*$ -derivation.

$\Rightarrow$ 次のような性質をみたす self-adjoint operator H が $\bar{\mathcal{A}}$ に一意的に存在する

i) Q : 任意の central projection.

$$\frac{1}{2} \|\bar{\delta}(Q)\| = \|H|_Q\|$$

$$\|H|_Q\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} (Hx, x) = \inf_{\|Qx\|=\|x\|=1} (Hx, x)$$

ii) $\bar{\delta} = i \text{ad } H$

< proof >

$\alpha_t = e^{t\bar{\delta}}$ は $\bar{\delta}$ が inner $*$ -derivation だから、 α_t は $\bar{\mathcal{A}}$ の inner automorphism となる。 $\{ \alpha_t : -\infty < t < \infty \}$ は norm-continuous automorphism だから、十分小さな t に対して

$\|\alpha_t - I\| < 2$ を満足する。

[1] Lemma 5 より、 α_t を implement する unitary operator U_t は次の性質を満たすように取れる。

$$Sp(U_t) \subset \{z = \operatorname{Re} z \geq \frac{1}{2} \sqrt{4 - \|d_t - I\|^2}\}$$

従って $U_t = e^{iB_t}$ とし $B_t = \text{self-adjoint in } \mathcal{O}$

$$\|B_t\| \leq \tan^{-1} \frac{\|d_t - I\|^2}{\sqrt{4 - \|d_t - I\|^2}} \quad \text{を満足する}$$

$$d_t = e^{i \operatorname{ad} B_t} = e^{t\bar{\delta}} \quad (*) \quad i \operatorname{ad} \frac{B_t}{t} = \bar{\delta}$$

$$\left\| \frac{B_t}{t} \right\| \leq \frac{1}{t} \tan^{-1} \frac{\|d_t - I\|^2}{\sqrt{4 - \|d_t - I\|^2}} \leq \frac{1}{t} \frac{\|d_t - I\|}{\sqrt{4 - \|d_t - I\|^2}} \leq \frac{1}{t} \frac{(e^{t\|\bar{\delta}\|} - 1)}{\sqrt{4 - \|d_t - I\|^2}}$$

$$\therefore t \rightarrow 0 \quad \left\| \frac{1}{t} B_t \right\| \rightarrow \frac{1}{2} \|\bar{\delta}\|$$

$$\frac{1}{2} \|\bar{\delta}\| < \forall k \quad \exists B_k = \text{self-adjoint s.t. } i \operatorname{ad} B_k = \bar{\delta}, \|B_k\| \leq k.$$

$$\therefore B_k = \{B = i \operatorname{ad} B = \bar{\delta}, \|B\| \leq k\} \neq \emptyset: \text{ weakly-} \text{closed compact.}$$

$$\therefore \bigcap_{\frac{1}{2} \|\bar{\delta}\| < k} B_k \neq \emptyset \quad \text{for } B: \text{self-adjoint s.t. } i \operatorname{ad} B = \bar{\delta} \quad \|B\| \leq \frac{1}{2} \|\bar{\delta}\|$$

又 $\|B\| \geq \frac{1}{2} \|\bar{\delta}\|$ は容易にわかる。以上により、

$$\exists B: \text{self-adjoint operator, s.t. } i \operatorname{ad} B = \bar{\delta} \quad \|B\| = \frac{1}{2} \|\bar{\delta}\|$$

がわかる。

次に $\{P_i\}$: finite central projections s.t. $\sum P_i = I$ $P_i \perp P_j$ $i \neq j$

$\{P_i\} \subset \{Q_j\} \iff$ 任意の Q_j はある P_i の sub projection

$$\{H(\{Q_j\}) = \|H Q_j\| = \frac{1}{2} \|\bar{\delta}\| \|Q_j\|, i \operatorname{ad} H Q_j = \bar{\delta} \upharpoonright Q_j, H(\{Q_j\}): \text{self-adjoint}\}$$

前の議論より $\mathcal{H}$ は $\bar{\delta}$ ならぬ, weakly compact だから。

$$\therefore \bigcap_{\{Q_j\}} \{H(\{Q_j\})\} \neq \emptyset.$$

よって $\bigcap_{\{Q_j\}} \{H(\{Q_j\})\} \ni H$ が、定理の性質を満足することは容易にわかる g.e.d.

次に *-derivation δ が π -inner になるための十分条件を与える。

以下証明は容易なので省略する。

反例にたいして $\mathcal{H}$ = separable Hilbert space

$\mathcal{K}(\mathcal{H})$ = $\mathcal{H}$ 上の compact operator の全体

- i) $\exists t \neq 0$ s.t. $\|\delta t\| < \pi$ 且つ $\alpha_t = e^{t\delta}$ は inner で α_t は implement する unitary operator U を $\text{sp } U \subset \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ と取れるように。 δ は inner。
- ii) $\|\delta\| < 2\pi$ で α の faithful representation π が $\pi(\alpha) > \overline{\pi(\alpha)}$ の center を満足するものが存在し e^{δ} が inner automorphism ならば δ は inner である。 $\|\delta\| = \pi$ ならば成り立たない。

[例 13] $\alpha = \{\lambda I + (1-E)\} : \lambda = \text{scalar} \in \mathbb{C}$ とする。 $\alpha \cap \overline{\alpha} = \{\lambda I\}$

$1-E$ は infinite dimensional projection とする。

$\delta = i \text{ad} \pi(1-2E)$ は outer derivation である。

$$\|\delta\| \leq \pi \|1-2E\| \leq 2\pi.$$

$V : \chi \longrightarrow V\chi$ $E\chi = \chi$ $(1-E)V\chi = V\chi$ なる one-dimensional projection とする。

$$\|\pi \text{ad}(1-2E)V\| \geq \pi \|(1-2E)V\chi - V(1-2E)\chi\| = 2\pi.$$

$$\therefore \|\delta\| = 2\pi.$$

$$e^{\delta}(A) = e^{\pi i \text{ad}(1-2E)}(A) = e^{\pi(1-2E)} A e^{-\pi(1-2E)} = A.$$

$\therefore e^{\delta}$ = inner automorphism.

iii) $\mathcal{O}$ が separable ではない.

$t \mapsto \alpha_t = e^{t\delta}$ が inner automorphism かつ uncountable 族ならば

δ は inner.

つまり $\mathcal{O}$ が non separable の場合は成り立たない. 又 $\mathcal{O}$ が separable ならば

$t \mapsto \alpha_t = e^{t\delta}$ が inner automorphism かつ countable 族ならば成り立つ.

例2) $f_n = f$ ($n=1, \dots$), $E_n = E$, $1-E_n = 1-E$: infinite dimensional proj. ($n=1, \dots$)

$\mathcal{O} = \{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n E_n + \lambda_{n+1} (1-E_n) + c_n \} : c_n \in \mathbb{C}(h_n), \lambda_n = \text{scalar} \}$: non separable.

$\mathcal{O}' = \{ \sum \lambda_n I_n : \lambda_n = \text{scalar} \}$

$\mathcal{O} \cap \mathcal{O}' = \{ \lambda \sum I_n : \lambda = \text{scalar} \}$ がわかる.

$H = \sum (1-E_n)$ とする. $\delta = i \text{ad} H$ は outer derivation となることは容易にわかる.

$$e^{t\delta} A = e^{it \text{ad} H} A = e^{itH} A e^{-itH}.$$

$$e^{itH} = \sum \{ e^{it} E_n + e^{it(1-E_n)} (1-E_n) \}$$

$$Z = \sum \{ e^{it} I_n \} \in \mathcal{O}'. \quad \text{即ち } Ze^{itH} = \sum \{ e^{it} E_n + e^{it(n+1)} (1-E_n) \}$$

とわかるから $Ze^{itH} \in \mathcal{O}$. よって $e^{t\delta}$ は任意の t に対して

inner automorphism を定義する.

以上より $\mathcal{O}$ が non separable ならば iii) は成り立たない.

例3)

$\mathcal{O}_1 = \{ \sum c_n : \|c_n\| \rightarrow 0, c_n \in \mathbb{C}(h_n) \} \cup \{ \sum (E_n + e^{it} (1-E_n)) : t = \text{rational} \}$ かつ

生成される C^* -algebra とする. $\mathcal{O}_1$ は separable C^* -algebra.

$\delta = i \text{ad} H = i \text{ad} \sum (1-E_n)$ は outer とする.

なぜなら $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$ 但し $\mathcal{O}$ は [例2] の $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}' = \mathcal{O}' = \{\sum \alpha_n I_n\}$

もし δ が inner ならば $H \in \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}' \subset \mathcal{O} + \mathcal{O}'$ で δ は $\mathcal{O}_1$ において inner になり [例2] の結果に反する.

$\{t = e^{+\delta} : \text{inner}\}$ は (仮定により) countable.

以上により $\{t = e^{+\delta} : \text{inner}\}$ が countable ならば II) が成り立つ.

§4.

ここで $I_0(\mathcal{O}) = \{\mathcal{O} \text{ の inner automorphism}\}$ $\Delta_0(\mathcal{O}) = \{\mathcal{O} \text{ の inner-derivations}\}$ だが, norm に関して closed なるための条件を論じる.

$\Delta(\overline{\mathcal{O}}) = \{\overline{\mathcal{O}} \text{ の derivations}\}$ norm に関して Banach space をなすことを証明する.

定理2. 2) 次の 3条件は同値.

i) $\Delta_0(\mathcal{O})$ は closed

ii) $\mathcal{Z} = \mathcal{O}$ の center

$\overline{\mathcal{Z}}$: $\overline{\mathcal{O}}$ の center

$\exists k > 0$ s.t. $d(A, \mathcal{Z}) \leq k d(A, \mathcal{Z}_1)$ for $\forall A \in \mathcal{O}$

但し $d(A, \mathcal{Z})$ は A が $\mathcal{Z}$ の distance

$\exists m > 0$ s.t.
iii) $d(U, U(\mathcal{Z})) \leq m d(U, U(\mathcal{Z}_1))$ for $\forall U \in U(\mathcal{O})$

但し $U(\mathcal{O}), U(\mathcal{Z}), U(\mathcal{Z}_1)$ は $\mathcal{O}, \mathcal{Z}, \mathcal{Z}_1$ の unitary operator の全体.

IV) i) ~ iii) より 次の IV) が出る. $\mathcal{Z}, \mathcal{O}$ が separable ならば.

i) ~ iv) は同値.

iv) $I_0(\mathcal{O})$ は closed.

«proof» 証明は $i) \Rightarrow ii)$ のみを示す.

[1] より $\bar{\mathcal{O}}$ の derivation は unique になるから.

$\bar{\mathcal{O}}/\mathfrak{z}_1 \longrightarrow \Delta(\bar{\mathcal{O}}) = \text{cont onto, 従って closed graph theorem より}$

$$\bar{\mathcal{O}}/\mathfrak{z}_1 \cong \Delta(\bar{\mathcal{O}})$$

$\mathcal{O}$ の derivation は $\bar{\mathcal{O}} \wedge$ unique isometry に拡張されるから.

$$\Delta_0(\mathcal{O}) \longrightarrow \bar{\mathcal{O}}/\mathfrak{z}_1 \cong \Delta(\bar{\mathcal{O}})$$

$\uparrow$

$\mathcal{O}/\mathfrak{z}$

よくよく conti になる

条件より $\Delta_0(\mathcal{O})$ は closed だから. $\mathcal{O}/\mathfrak{z} \cong \Delta_0(\mathcal{O})$, 上の mapping で

$\mathcal{O}/\mathfrak{z}$ は $\bar{\mathcal{O}}/\mathfrak{z}_1$ の closed set に移るから closed graph theorem より

必ず conti. より $ii)$ が成り立つ

そこで $\mathcal{O}$ が non separable ならば $iv) \Rightarrow iii)$ が成り立たないことを示す.

例 4] 記号は例 2] と同じ.

例 2] において注意したように $\mathcal{O}$ の center $= \{ \lambda \sum I_n = \lambda = \text{scalar} \}$

$\bar{\mathcal{O}}$ の center $= \{ \sum \lambda_n I_n = \lambda_n = \text{scalar} \}$

$$U_k = \sum \exp \frac{i n \pi}{k} E_n + \exp \frac{i (n+1) \pi}{k} (1 - E_n) \in \mathcal{O} \text{ とする}$$

$$d(U_k, \mathfrak{z}) \geq 1 \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$d(U_k, \mathfrak{z}_1) \leq \left| \exp \frac{i \pi}{k} - 1 \right| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

従って $iii)$ を満足 しない.

今 $U = \sum \{ \lambda_n E_n + \lambda'_n (1 - E_n) + c_n \} = \sum U_n, |\lambda_n| = |\lambda'_n| = 1, c_n \in \mathbb{C}(\frac{1}{2}n)$ の

unitary operator (= U) induce $\pm$ する $\mathcal{O}$ の automorphism α を
 考へると. $C_n = \prod_{r=1}^n \lambda_r^{-1} \lambda_r^{-1}$ $V_n = C_n U_n$ $V = \sum \oplus V_n \in \mathcal{O}$
 とし, $\alpha = \alpha^*$ かつ α は inner になる.

$\mathcal{O}_n = \{ \lambda E_n + (1 - \lambda)(1 - E_n) + C_n, \lambda, \lambda' : \text{scalar}, C_n \in C(\mathcal{H}_n) \}$, 上に述べたことより
 $\mathcal{O}$ の automorphism α が inner $\Leftrightarrow \alpha = \sum \alpha_n$, α_n は $\mathcal{O}_n$ の
 inner automorphism.

$\mathcal{O}_n$ は separable かつ iv) と iii) は同値. $\mathcal{O}_n$ の center = $\overline{\mathcal{O}_n}$ の center
 = $\{ \lambda I : \lambda : \text{scalar} \}$ かつ $\mathcal{O}_n$ は iv) を満たす. 従つて上に述べたことより,
 $\mathcal{O}$ は iv) を満たす.

non separable かつ iv) $\Rightarrow$ iii) は成り立たない. q. e. d.

Reference

- [1] Kadison and Ringrose: Derivations and automorphisms
 of operator algebras I. Communication Math. ph. 4 (1967)
- [2] Sakai. Derivations of W^* -algebras, Ann. Math. 83 (1966)
- [3] Dixmier: "Les C^* -algebras et leurs representations" Gauthier-Villars.
- [4] Dunford and Schwartz "Linear operator I" New-York.