

Stabilization of exotic 4-spaces

大阪市大・理 河内明夫 (Akio Kawauchi)

4次元ユークリッド空間 R^4 に同相だが, 微分同相ではない4次元なめらかな多様体を 外来4次元空間 (exotic 4-space) といい。現在では, 非可算無限個の外来4次元空間の存在が確認されている (Taubes-Gompf による [G])。他に, すべての外来4次元空間を含んだ外来4次元空間 (普遍外来4次元空間 (universal exotic 4-space) と呼ばれる) の存在 (Freedman-Taylor による [FT]) や, R^4 に含まれる, 従ってすべての外来4次元空間に含まれる, 外来4次元空間の存在 (Edwards [E] による) など知られている。

ここでは, 次の安定化定理を注意する:

(外来空間の) 安定化定理 任意の外来4次元空間に可算無限個の $S^2 \times S^2$ を connected sum してできた4次元なめらかな多様体は, 必ず, R^4 に可算無限個の $S^2 \times S^2$ を connected sum してできたものに微分同相になる。

(注意) 次の (1), (2) は同値になるが, そのようなものの存在は知られていない:

(1) 有限個 の $S^3 \times S^2$ を connected sum して得られたものが, R^4 に同じことをして得られたものに微分同相となるような外來 4 次元空間が存在する,

(2) 外來 4 次元球面 (すなわち, 4 次元玉球面に同相だが微分同相でないなめらか多様体) が存在する.

「可算無限個の $S^3 \times S^2$ の connected sum」を精密に述べる. そのために, W を 4 次元の有向連結なめらか

多様体とする. $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ を互いに交わらない W 内部の 4 次元球体の族とする. 任意の (W の中の) コンパクト集合と交わる B_i が, つねに有限個しかない時, この族 $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ を 離散的 (discrete) という. 離散的族 $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ を使って可算無限個の $S^3 \times S^2$ を connected sum したものを「可算無限個の $S^3 \times S^2$ を connected sum」してできた 4 次元なめらか多様体といい, $W \#_{i=1}^{\infty} S^3 \times S^2_i$ とかく. (4 次元なめらか多様体になることは明らかだろ) W 内の任意のコンパクト集合 C に対して, $C \subset C'$ かつ $W - C'$ が連結となるようなコンパクト集合 C' が存在する時,

W を connected at ∞ といふ。一般に, $W \#_{i=1}^{\infty} S^2 \times S^2_i$ は $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ の選択によるが, 次の補題が成り立つ:

補題 W が connected at ∞ の時, $W \#_{i=1}^{\infty} S^2 \times S^2_i$ の有向微分同相型は離散的族 $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ の取りよによらない。

この補題によつて, $R^4 \#_{i=1}^{\infty} S^2 \times S^2_i$ は R^4 内の離散的族 $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ の取りよによらずに定まる。これを 安定4次元空間 (stable 4-space) といひ, SR^4 で表わすことにする。 SR^4 は4次元トラスと $S^2 \times S^2$ の connected sum の普遍被覆空間に微分同相になる。connected at ∞ となる W で, 任意のコンパクト集合 C で $W-C$ が連結となるものに対し, $C \subset C'$ かつ $W-C'$ が連結かつ $\pi_1(W-C') \rightarrow \pi_1(W-C)$ が自明となるようなコンパクト集合 C' が存在する時, W を 1-connected at ∞ といふ。

外束4次元空間の安定化定理は次の定理の系として得られる:

定理A $W \#_{\infty} S^3 \times S^2$ が安定4次元空間 SR^4 に微分同相となるための必要十分条件は, W が 1-connected, spin, 閉, 1-connected at ∞ であることである。[例えば, $(K3)_0$ で, $K3$ 曲面から1点を除いたものを表わす時, $(K3)_0 \#_{\infty} S^3 \times S^2 \cong SR^4$ となる。]

系 SR^4 になめらかに埋め込まれた, 4次元球 B^4 と任意の4次元コンパクト部分多様体 W で $\partial W \cong S^3$ となるものに対し, $SR^4 - \text{Int} W$ は $SR^4 - \text{Int} B^4$ に微分同相になる。[van Kampen 定理によって, W は 1-connected であることを注意せよ。]

安定4次元空間は, その中で 2次元結び目理論を展開しようとして導入したものである。その動機は, 4次元ユークリッド空間 R^4 は, その中で 2次元結び目理論を展開するには「狭すぎる」ように筆者には思えたからである。結び目理論としての内容は他の機会にゆずる(例えば, [K4] にたった11の結果のみ述べてある)として, ここでは, この安定4次元空間 SR^4 は「広い空間」であることを指摘するにとどめる。まず定理Aより次がわかる。

系 定理Aの条件を満たす W は, その補空間が $R_+^4 \#_{\infty} S^3 \times S^2$ に微分同相となるように, SR^4 になめらかに埋め込める (R_+^4 は R^4 の上半空間)。

特に、外來4次元空間は SR^4 に なめらかに 埋め込める。

任意の 有向3次元多様体 (非コンパクトでも、不連結でもよい) は、定理Aを満たすある W に、properに
しかもなめらかに埋め込める。(注: コンパクト集合の
原像がコンパクトとなるような写像を proper といい、)
従って、次が成り立つ:

定理B 任意の3次元有向多様体は SR^4 に、
properにしかもなめらかに埋め込める。

SR^4 は R^5 に properにかつなめらかに埋め込めるので、次が出る:

系 任意の3次元有向多様体は、自明法バンドルを持つような仕方で、 R^5 に properにしかもなめらかに埋め込める。

この系は、コンパクト3次元多様体の場合にはよく知られている (Hirsch [H]). 定理Bのコンパクト版は次に述べるように成り立たない:

(非埋め込み定理 [1]) 任意のコンパクト有向連結4次元位相多様体 W に対し、それに埋め込みないコンパクト有向連結3次元多様体が無限に多く存在する.

安定4次元空間 SR^4 は、すべての有向3次元多様体を含むような4次元多様体のうちで、最も簡単な空間の一つだろう.

最後に、問題をおいておく.

(問題) 安定4次元空間 SR^4 上の微分構造は2つ以上あるか? また、外來安定4次元空間は存在するか?

参考文献

- [E] R.D. Edwards, Some folk theorems about exotic R^4 's, Abstracts from workshop on Four-manifolds and Geometry, MSRI, Berkeley, California, 1985, 7.
- [G] R.E. Gompf, An infinite set of exotic R^4 's, J. Diff. Geometry 21 (1985), 283-300.
- [H] M.W. Hirsch, The imbedding of bounding manifolds in Euclidean space, Ann. of Math. 74 (1961), 494-497.
- [K1] A. Kawauchi, Imbedding problem of 3-manifolds into 4-manifolds (preprint).
- [K2] A. Kawauchi, Knots in the stable 4-space: An introduction (to appear).
- [K3] A. Kawauchi, Knots in the stable 4-space, I: The stable 4-space (準備中).
- [K4] 河内, Knots in the stable 4-space, 数理解析講究全集「2次元結び目を中心とした結び目理論」の中.
- [T] L.R. Taylor, Smoothing 4-manifolds and the universal R^4 , Abstracts from workshop on Four manifolds and Geometry, MSRI, Berkeley, California, 1985, 27.