

孤立した渦糸の 3次元波動運動

名大・工 福本 康秀 (Yasuhide Fukumoto)

公害研 宮寄 武 (Takeshi Miyazaki)

1. 序

我々が目にする流れは主に高レイノルズ数の流れ、あるいは乱流であるが、その中には集中した強い渦度に依って特徴づけられるものも多い。飛行機の翼端から延びる後ひき渦、風呂桶の廃水口近くにできる渦、さらには竜巻き（トルネード）などもその例である。

細長い直線渦が3次元波動運動を行うことは、Kelvin¹⁾の線形安定性解析以来よく知られている。このような波動運動は渦核の形のみならず、渦度分布も自由度としてもつので、たとえば屈曲モードのみに着目したとしても、無限個のモードが存在することになる。また、渦管の形が直線から大きくずれるときにはその運動は強い非線形性を帯びる。本研究の目

的は、細長い渦 (= 渦糸) の長波長の屈折運動 (Slow Mode)

とその安定性の理解を深めることにある。

2. 局所誘導近似

流体は非圧縮性であり、粘性も無視できると仮定する。そのとき、渦度 $\omega(x)$ ($= \text{rot } v$) を全領域で指定すると、流速

v は Biot-Savart 法則によって定まる。

$$v(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega(x') \times (x - x')}{|x - x'|^3} dx' + V(x) \quad (1)$$

右辺の V は境界の存在や外部流による渦なし流を表す。Helmholtz の渦定理によれば、渦管はそれ自体の上に誘導される速度で動くことが帰結される。

渦核の半径が曲率半径に比べて十分に小さいとき、(1) は

$$v(x) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{(x - X') \times \delta X'}{|x - X'|^3} + V(x) \quad (2)$$

と書ける。ここで、 Γ は循環、 X' は渦核の中心をなぞる曲線上の位置を表す。(2) を渦糸の直上で評価したとき、対数発散を生ずるので、渦核の半径 a の部分からの寄与を抜く。さらに、局所的な誘導が卓越すると考えて、積分領域を、 X を中心とする長さ $2L$ の曲線上の部分だけに限る。この近似は局所誘導近似²⁾ (Localized induction approximation) と呼ばれる最も単純なもので、渦糸は次の方程式に従って発展す

る :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\Gamma}{4\pi} [\log(\frac{L}{a})] \kappa b + V(x) \quad (3)$$

ここで、 κ は曲率、 b は陪法線ベクトルを表す。さらに、 $L/a = \text{一定}$ と仮定すると、時間の単位を適当に取り直した後、

$$X_t = X_s \times X_{ss} + \tilde{V}(x) \quad (4)$$

$$\tilde{V}(X) = V(X) / [\frac{\Gamma}{4\pi} \log(\frac{L}{a})] \quad (5)$$

が得られる。下つき添字は微分を表す。橋本³⁾は曲率 κ とれ、
い率 τ からなる複素変数

$$\psi = \kappa e^{i \int^s \tau ds} \quad (6)$$

を導入すれば、外部流がないとき ($\tilde{V}=0$)、(4) が非線形 Schrödinger 方程式に帰着することを示した :

$$i\psi_t + \psi_{ss} + \frac{1}{2}|\psi|^2\psi = 0 \quad (7)$$

(7) の 1 ソリトン 解に対応する (4) の 1 ソリトン 解は橋本によって与えられ、橋本ソリトンと呼ばれている。Symら⁴⁾や筆者ら⁵⁾は N ソリトン 解を構成した。

木田⁶⁾は外部流がないときの渦糸の定常形を一般的に与えたが、これを外部流がある場合に拡張することができる。特に渦糸が流れのなかで静止しているときの平衡形について考えてみよう。(4) で $X_t = 0$ として、 $t = X_s$ との外積をとると、

$$X_{ss} = X_s \times \tilde{V}(X) \quad (8)$$

が得られる。(8) は独立変数 s についての常微分方程式系である。長さ s を時間 t と読み換えて、 $V(X)$ を磁場 $B(X)$ と

$$\tilde{V}(X) = \frac{q}{m} B(X) \quad (9)$$

のように対応づけると、(8) は質量 m 電荷 q を持つ荷電粒子の磁場中での運動を記述する方程式と等価になる。つまり、ローレンツ力を受けて運動する荷電粒子の軌跡に対応する外部流中に静止する渦糸の形^が存在することになる。前者については、プラズマの閉じ込め問題に関連して比較的多くの研究がなされている。それらの結果を翻訳すれば線形シャー内での渦糸の平衡形などが議論できる。また、外部流が対称性を持たない場合には渦糸の形がカオス的な振るまいをすることに注目しよう。

有名な問題のひとつに、磁気単極子のつくる場の中での荷電粒子の運動が有る。この粒子は無限遠方からやってきて単極子に到達する前に跳ね返されて無限遠方に逃げていくが、その軌跡は単極子を頂点とする円錐の上を巻きつく曲線になる。対応する問題は、湧き出しあるいは吸込み流中で静止する渦糸の形である。とぐろを巻くような形（広がるらせん状）の渦糸が現われるのは、背景にある加速、減速流が本質的な役割を果たしているのではないかと想像できる。

3. 軸方向流れを伴う渦糸の3次元運動

3.1 誘導速度

強い渦度をもつ渦糸を実現するためには、背景に分布する弱い渦度を中心に向かって集める収束流が必要であるが、それに付随して渦核内に縦方向（軸方向）の強い流れが生じることになる。このような強い軸方向流れは、排水口の渦ではもちろん、飛行機の翼から放出される渦などにもあるといわれている。

軸方向流れを伴う渦糸の波長の長い3次元屈曲運動を記述する方程式は、Moore & Saffman⁸⁾によって導かれた。彼らは渦糸をセグメントに切って、各セグメントの境界上で力のバランスが曲率効果の2次まで成立するように渦糸の並進速度を決定した。これは運動量保存則を積分形のままで実現するもので、エレガントではあるが、多少わかりにくいと感じられるところがあった。より素朴な方法として、運動量保存則の微分表現であるEuler方程式から出発して、系統的に摂動展開を行うことが考えられる。既に曲率効果の1次までは実行されているので⁹⁾、筆者らはそれをさらに2次まで拡張することによって Moore-Saffmanの求めた方程式の再導出を試みた。

まず領域を、渦核の近傍 $[r \sim 0(a)]$ の内部領域と曲率半径

程度のスケール [$r \sim 0(1/\kappa)$] で特徴づけられる外部領域の 2 つに分ける。外部領域では、渦糸を曲線とみなしてよいので、流速は Biot-Savart 積分によって与えられる。内部領域では渦核内の回転流と軸方向流れの相互作用、それによる渦度の変化を Euler 方程式に基づいて解き、渦核近傍の流速を導出する。次に外部と内部領域の速度が共通領域でつながるように渦糸の並進速度を定める。 $\varepsilon = a/R (\ll 1)$ を展開パラメータとして 2 次までこの作業を実行する。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} = & -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_{[l_c]} \frac{(\mathbf{X}-\mathbf{X}') \times \delta \mathbf{X}'}{|\mathbf{X}-\mathbf{X}'|^3} - \frac{4\pi\varepsilon}{\Gamma} \left[\int_0^\infty r w(0) \widehat{w_0^{(1)}} dr \right] \kappa \mathbf{b} \\ & - \frac{4\pi}{\Gamma} \left[\int_0^\infty r w(0) dr \right] \mathbf{t} \times \frac{1}{\sigma} \dot{\mathbf{X}}_\xi^{(0)} - \frac{2\pi}{\Gamma} \left[\int_0^\infty r v(0) w(0) dr \right] \mathbf{t} \times (\kappa \mathbf{b})_s \quad (10) \end{aligned}$$

ここで ξ は軸方向長さを表わす変数で $\sigma = \partial s / \partial \xi$ 、 $\int_{[l_c]}$

は cut-off 積分で、

$$\int_{[l_c]} ds' = \int_{-\infty}^{s-l_c} ds' + \int_{s+l_c}^{\infty} ds' \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \log l_c = & \log \frac{a}{2} + \frac{1}{2} - \log \left\{ \frac{4\pi^2}{\Gamma^2} \int_0^r r [v(0)]^2 dr - \log \frac{\Gamma}{a} \right\} \\ & - \frac{8\pi^2}{\Gamma^2} \int_0^\infty r [w(0)]^2 dr \quad (12) \end{aligned}$$

また全長 $l(t)$ は

$$\frac{dl}{dt} = - \int \kappa \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{X}}^{(0)} ds \quad (13)$$

に従って変化する。このとき 0 次の回転流速 $v^{(0)}(r, t)$ と軸

方向流れ $w^{(0)}(r, t)$ は

$$v^{(0)}(r, t) = v^{(0)}(\alpha, 0) l(t)/l(0), \quad w^{(0)}(r, t) = w^{(0)}(\alpha, 0) l(t)/l(0)$$

$$\alpha = r[l(t)/l(0)]^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

に従う。 $v_{||}$ を誘導される接線方向の速度とすると、

$$\overline{\varepsilon w_0^{(1)}} = -\frac{\partial v_{||}}{\partial s} + \kappa n \cdot X^{(0)} + \frac{1}{l} \frac{dl}{dt} \quad (15)$$

で与えられる。 $\overline{w_0^{(1)}}$ は $\hat{w}_0^{(1)}$ の断面内での平均を表わす。

実は ε の2次までで方程式を閉じさせることはできず、 $v^{(0)}$ 、

$w^{(0)}$ の時間発展を完全に定めるためには $O(\varepsilon^3)$ の情報が必要

になる。(14)はそれを閉じさせるひとつのモデルであるが、

物理的、数学的にある程度正当化することもできる。

3.2 局所誘導近似

2節と同様な精神で、(11)-(15)を近似すると、

$$X_t = X_s \times X_{ss} + W[X_{sss} + \frac{3}{2}X_{ss} \times (X_s \times X_{ss})] \quad (16)$$

が自然に導かれる。大雑把にいうと W は軸方向流れと回転流

の流速比を表わす。(16)に橋本の変換(6)をほどこすと、広

田方程式¹¹⁾

$$i\psi_t + \psi_{ss} + \frac{1}{2}|\psi|^2\psi - iW(\psi_{sss} + \frac{3}{2}|\psi|^2\psi_s) = 0 \quad (17)$$

に帰着する。したがって、強い軸方向流れの存在のもとにも、

橋本ソリトンと同じ形のソリトンが伝播することになる。

また一定の曲率 κ_0 、れい率 τ_0 を持つらせん渦もひとつの解となるが、これに $A \cos(kx - \omega t + \theta_0)$ の形の微小攪乱を加えると、(17)より、その分散関係は

$$\omega = 2k\tau_0 + W(k^3 + 3\tau_0^2 k - \frac{3}{2}\kappa_0^2 k) \pm |1 + 3W\tau_0| k \sqrt{k^2 + \kappa_0^2} \quad (18)$$

となる。軸方向流れがないとき ($W=0$)、長波長の攪乱 ($k < \kappa_0$) に対してらせん渦は不安定であることが知られている。¹¹⁾

ところが、 $1 + 3W\tau_0 = 0$ を満足するような軸方向流れ存在する場合には、らせん渦はすべての攪乱に対して安定となることを(18)は意味している。このように、軸方向流れはらせん渦の安定性に大きな影響を及ぼすことが予想される。

3.3 らせん渦の安定性に対する非局所誘導の効果

前節の最後に述べた結果は本質的に新しいものではあるが、局所誘導近似の根拠は確かなものではない。もともと、この近似は現象の定性的な側面を捉えるためのもので、定量的な予測、予言に用いるのは適切ではない。そこで、攪乱を受けたらせん渦の表式を(10)-(15)に直接代入して、それを数値積分することによって安定性を調べた。Widnall¹²⁾が、すでに、曲率効果の1次までについては実行しており、ここでは2次オーダーまで拡張した結果を示そう。幾何学的なパラメ

ーターは1図の通りである。Rはらせんが巻きつく円筒の半径で、らせんが水平断面となす角度 β を $\tan \beta = 1/RK$ で与える。

図2、3では、 $RK=1$ 、 $a/R=0.1$ と選び、渦度はRankine型（渦核内で一様、外ではポテンシャル流）に分布し、軸方向流れは渦核内で W =一定、外では0としている。図2は $W/V < 0$ 、図3は $W/V > 0$ の場合で、 W/V の値はグラフに書込んである。ここで、 V は回転流速の最大値 $V = \Gamma / (2\pi a)$ としている。縦軸は規格化された増幅率、横軸は規格化された波数を表わす。破線は軸方向流れが無い場合（ $W=0$ ）で、Widnallの計算した結果と一致している。左端に見られるのが長波長不安定モードで、局所誘導近似で定性的に予測されたモードである。図2より、ヘリシティが負の場合には $|W/V|$ が大きくなるにつれて、右巻きらせん渦の不安定性が弱まり、ある有限の値で長波長モードが消失することが分る。さらに $|W/V|$ を大きくすると、再び長波長モードが出現する。短波長側にも不安定モードが現われているが、Moore-Saffmanの方程式は長波長の波動に関してのみ有効であるので、その正当性は定かではない。図3にはヘリシティが正のときの結果が示されている。 W/V が小さいうちは、右巻きらせん渦の不安定性が強まるが、 W/V が大きくなると、 $W/V < 0$ の場合と同様に不安定

性が弱まり、やがて W/V のある区間で不安定モードが消える。この後半の結果は局所誘導近似の予想と反するものであり、渦核内の構造と非局所誘導の効果を取り入れなければ、正しい予測ができないことを示唆している。

$a/R=0.1$ の場合について、らせん渦が安定に存在するパラメーター領域を図4に示す。上下の三日月型の領域の内部が安定領域である。ヘリシティが正（負）のとき、左（右）巻きのらせん渦のほうがより安定に存在し得ることが読取れる。

REFERENCES

- 1) L. Kelvin: Phil. Mag. 10 (1880) 155.
- 2) F.R. Hama: Phys. Fluids 5 (1962) 1156,
6 (1963) 526.
- 3) H. Hasimoto: J. Fluid Mech. 51 (1972) 477.
- 4) D. Levi, A. Sym & S. Wojciechowski: Phys. Lett.
94A (1983) 408.
- 5) Y. Fukumoto & T. Miyazaki: J. Phys. Soc.
Japan 55 (1986) 4152.
- 6) S. Kida: J. Fluid Mech. 112 (1981) 397.

- 7) 中村 孔一: 明治大学教養論文集 181 (1985) 1.
- 8) D.W. Moore & P.G. Saffman: Phil. Trans. R. Soc.
Lond. A272 (1972) 403.
- 9) A. J. Callegari & L. Ting: SIAM J. Appl. Math. 35
(1978) 148.
- 10) R. Hirota: J. Math. Phys. 14 (1973) 805.
- 11) R. Betchov: J. Fluid Mech. 22 (1965) 471.
- 12) S.E. Widnall: J. Fluid Mech. 54 (1972) 641.

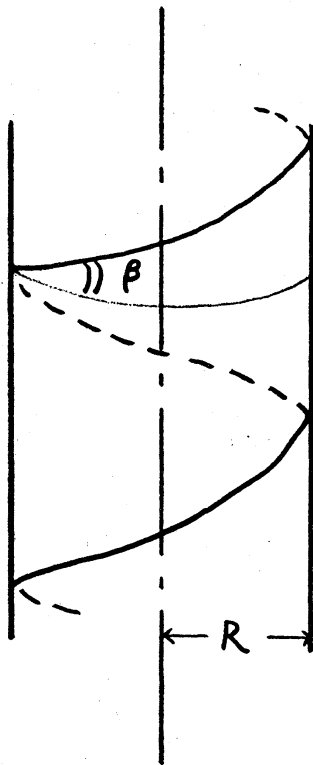


図 1

図 2

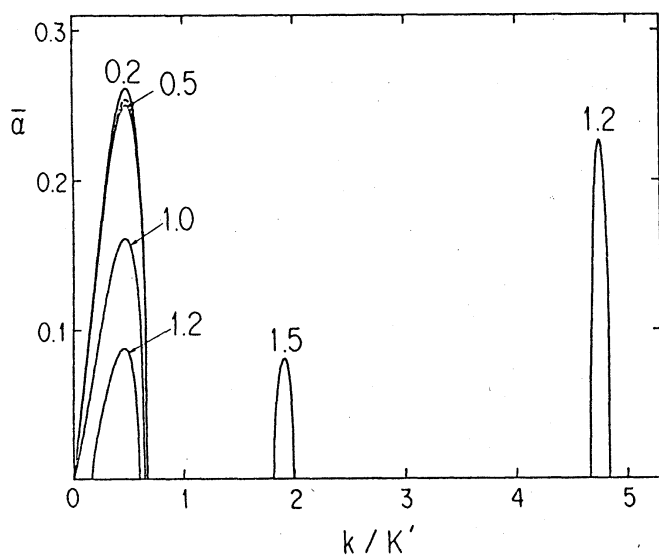
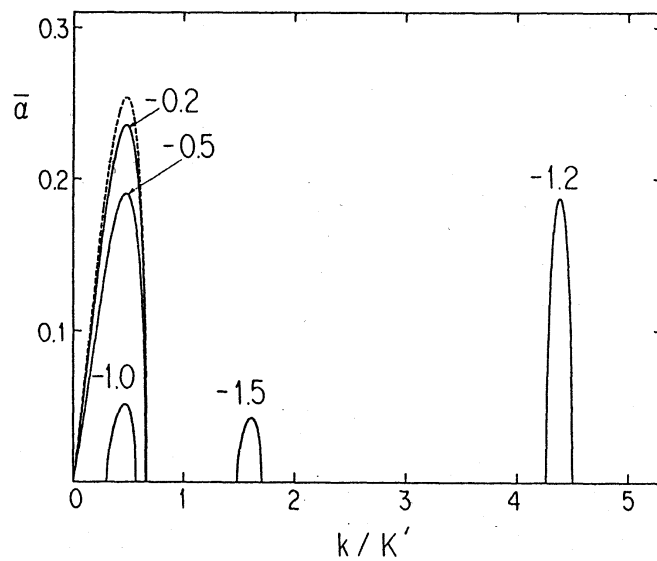


図 3

図 4

