

Orbits in the Maximal Ideal Space of $H^\infty(D)$

神奈川大・工 泉池敬司 (Keiji Izuchi)

単位円板 D 上の H^∞ の maximal ideal space $M(H^\infty)$ 上の点 x を回転させることにより orbit $O(x)$ が得られる。 $O(x)$ は一般に closed ではないので $M(H^\infty)$ での closure $\overline{O(x)}$ を取る。 D 内の点の orbit は同半径の円周になるが、それ以外の点 x に対して、 $\overline{O(x)}$ はどのようになっているかを調べるのがここでの目標である。特に H^∞ の Shilov 境界 $X = M(L^\infty)$ との関係を見たい。

§0 定義

H^∞ は境界関数を考えることにより、 $L^\infty(\partial D)$ の closed subalgebra と考えられる。corona 定理により D は $M(H^\infty)$ に dense にうめ込まれている。 $X = M(L^\infty)$ は H^∞ の Shilov 境界としてうめ込まれる。 $\lambda \in \partial D$ と $f \in H^\infty$ に対して $f_\lambda(e^0) = f(\lambda e^0)$ と定義する。 $x \in M(H^\infty)$ に対して $H^\infty \ni f \rightarrow f_\lambda(x)$

は non-zero complex homomorphism となるから, これを表す点を x_λ と表す。 x_λ は点 x を $M(H^\infty)$ の中で左に λ だけ回転して得られる点と考えることができる。 $O(x) = \{x_\lambda; \lambda \in \partial D\}$ は点 x の orbit と呼ばれる。 $x \in D$ の時は $O(x) = \{y \in D; |y| = |x|\}$ となりおもしろ味はない。 しかし $x \in M(H^\infty) \setminus D$ の時, $O(x)$ は $M(H^\infty)$ 上の closed subset にはならない (Hoffman [2, p. 165])。 よ, 2 orbit を解析的に考えるために, 今後は $M(H^\infty)$ 上の closure $\overline{O(x)}$ を考える。

$E \subset M(H^\infty)$, $\lambda \in \partial D$ に對して, $E_\lambda = \{x_\lambda; x \in E\}$ とする。 当然 $(\overline{O(x)})_\lambda = \overline{O(x)}$ である。 ∂D 上の normalized Lebesgue measure を $dm = d\theta/2\pi$ とする。 m は X の measure $\hat{m}$ に持ち上げることもできる。

$$\int_X \hat{f} d\hat{m} = \int_{\partial D} f dm \quad \forall f \in L^\infty$$

$$\pi: M(H^\infty) \setminus D \ni x \longrightarrow \hat{z}(x) \in \partial D$$

は fiber projection と呼ばれる。 z は D 上の identity 関数であり, $\hat{f}$ は f の Gelfand 変換である。

$$QC = (H^\infty + C) \cap \overline{(H^\infty + C)}, \quad QA = H^\infty \cap \overline{(H^\infty + C)}$$

とする。 $M(H^\infty + C) = M(H^\infty) \setminus D$ であるから QC が分離できない点を同一視することにより 2 次の自然な写像が得られる。

$$p: M(H^\infty) \setminus D \longrightarrow M(QC).$$

§ 1 $x \in X = M(L^\infty)$ の時

$x \in X$ とすると $\overline{O(x)} \subset X$ となる。

命題 1. $\hat{m}(\overline{O(x)}) = 0$ または 1 ($\forall x \in X$)。

証明. $\hat{m}(\overline{O(x)}) > 0$ と仮定する。 $\overline{O(x)}$ の X での内点の集合を E とすると, E は X での open から closed である。 よって Borel 集合 $F \subset \partial D$ での $\hat{X}_F = X_E$ なるものがある。

$m(F_\lambda \cap F) = \hat{m}(E_\lambda \cap E) = \hat{m}(E) = \hat{m}(\overline{O(x)}) > 0$ が任意の $\lambda \in \partial D$ に対して成立する。 m のエルゴード性より $m(F) = 1$ である。 よって $\hat{m}(\overline{O(x)}) = 1$ 。

$\hat{m}(\overline{O(x)}) = 1$ ということは, $\overline{O(x)} = X$ と同じであることを注意しておく。

定理 1. $\hat{m}(\overline{O(x)}) = 0$ となる点 $x \in X = M(L^\infty)$ が存在する。

証明. G を ∂D での open-dense であり, $m(G) < 1$ とする。
 $m(\bigcap_{i=1}^n G_i) \neq 0$ である。 $E = \{y \in X; \hat{X}_G(y) = 1\}$ とすると, E は X での open-closed であり, $E \neq X$ である。

$$\bigcap_{i=1}^m E_{\lambda_i} = \{y \in X; \hat{X}_{\bigcap_{i=1}^m G_{\lambda_i}}(y) = 1\} \neq \emptyset$$

より $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \partial D}$ は有限交わり性をもつ。 よって

$F \equiv \bigcap \{E_\lambda; \lambda \in \partial D\} \neq \emptyset$ である。 F は回転で不変な closed

subset だから命題 1 と同様に $\hat{m}$ -measure 0 である。

$x \in F$ と取ればよい。

定理 2. $\hat{m}(\overline{O(x)}) = 1$ となる点 $x \in X$ が存在する。

証明は定理 3 及び 5 より従う。 $x \in X$ が $\hat{m}(\overline{O(x)}) = 0$ となるか又 $\hat{m}(\overline{O(x)}) = 1$ となるかの判定法はむづかしいように見える。 X の任意の open subset U に対して、必ず U の中の点 x が $\hat{m}(\overline{O(x)}) = 1$ となるものが存在する。(しかし $\hat{m}(\overline{O(y)}) = 0$ となるような $y \in U$ がいつでも存在するかは今の所わかりづらい。 $\hat{m}(\overline{O(x)}) = 0$ の時、 $\overline{O(x)}$ がいつでも non-trivial な support set を含むかどうかはわからない。

定理 1 は $z^n H^\infty$ 以外に rotation 不変な H^∞ の closed ideal が存在することによって (Gorkin [1])。

§ 2. $x \in M(H^\infty) \setminus (X \cup D)$ の時。

$x \in M(H^\infty) \setminus (X \cup D)$ の時、 $\overline{O(x)}$ は X と交わらないように想像されるが、実はかなり多くの x に対して $\overline{O(x)} \cap X \neq \emptyset$ となる。ぜんぜん解決しなくてはいけない問題として次がある。

問題 1. $\overline{O(x)} \cap X = \emptyset$ となる $x \in M(H^\infty) \setminus (X \cup D)$ は存在するか？

上の問題に関連する事として次がある。

$$\overline{\{x_n; n=1, 2, \dots\}} \cap X = \emptyset \quad \forall x \in M(H^\infty) \setminus (X \cup D)$$

定理3. $\hat{m}(\overline{O(x)} \cap X) = 1$ ($\overline{O(x)} \cap X = X$ と同じ) とする
 $x \in M(H^\infty) \setminus (X \cup D)$ が存在する。

証明. $\{z_n\} \subset D$ を interpolating sequence で $z_n > 0$
 かつ $z_n \rightarrow 1$ とする。 x として $\{z_n\}$ の $M(H^\infty)$ での cluster
 point の 1 とする。

[1] $\overline{O(x)} \cap X \neq \emptyset$ である。

(i) $\overline{O(x)} \cap X = \emptyset$ と仮定する。 $I = 0$ on $\overline{O(x)}$ とする
 inner I が取れる。

$$\lim_{r \rightarrow 1} |I(re^{i\theta})| = 1 \quad \text{a.e. } d\theta$$

である。しかし各 $e^{i\theta} = \bar{z} \neq 1$ として, $x_{e^{i\theta}} \in \overline{\{re^{i\theta}; 0 < r < 1\}}$ であるから I の取り方は

$$\lim_{r \rightarrow 1} |I(re^{i\theta})| = 0 \quad \forall e^{i\theta}$$

となり矛盾が生ずる。

[2] $\hat{m}(\overline{O(x)} \cap X) = 1$ である。

(i) $E \equiv \overline{O(x)} \cap X$ とし, $E \neq X$ と仮定する。 $E_\lambda = E$

($\forall \lambda \in \partial D$) より $\hat{m}(E) = 0$ である。よって nontrivial

peaking function $f \in H^\infty$ で $f = 1$ on E なるものが

取れる。 $g \equiv 1 - f$ とし, $A \equiv \{y \in \overline{O(x)}; |g(y)| \geq \|g\|_{\infty}^{1/2}\}$

とする。 $g = 0$ on E より $A \cap X = \emptyset$ である。又 A は

$M(H^\infty) \setminus D$ の closed subset だから $I = 0$ on A とする inner I が存在する。

$$(*) \quad |Ig| \leq \|g\|/2 \text{ on } \overline{D(x)}$$

がある。[1] と同様に

$$\lim_{r \rightarrow 1} |(Ig)(re^{i\theta})| = |g(e^{i\theta})| \text{ a.e. } d\theta$$

があり, 又 (*) から

$$\lim_{r \rightarrow 1} |(Ig)(re^{i\theta})| \leq \|g\|/2 \quad \forall e^{i\theta}$$

がある。これは矛盾である。

定理 4. $\hat{m}(\overline{D(x)} \cap X) = 0$ とする $x \in M(H^\infty) \setminus (X \cup D)$ が存在する。

証明. $y \in M(H^\infty) \setminus (X \cup D)$ を任意に取る。 $\{\lambda_i\} \subset \partial D$ を dense にとる。 $Y \equiv \overline{\{y_{\lambda_i}; i=1,2,\dots\}}$ とする。前に注意したように $Y \cap X = \emptyset$ であり, かつ $\pi(Y) = \partial D$ である。後の議論は定理 1 の証明とほぼ同じに進められる。

G を ∂D の open-dense であり, $m(G) < 1$ とする。

$$\tilde{\chi}_G(x) \equiv \int_X \hat{\chi}_G d\mu_x \quad \forall x \in M(H^\infty)$$

と定義すると $\tilde{\chi}_G$ は $M(H^\infty)$ 上の連続関数となる。ここで

μ_x は X 上の点 x の表現測度である。

$$E \equiv \{x \in Y; \tilde{\chi}_G(x) < 1\}$$

とすると, E は Y の open subset であり, $\pi(E) = \partial D \setminus G$ である。

ある。 $E^\lambda \equiv \{x \in Y; \widehat{x_{G_\lambda}}(x) < 1\}$ とすると、 E^λ も Y で open であり $\pi(E^\lambda) = \partial D \setminus G_\lambda$ である。 $\bigcap_{i=1}^n G_{\lambda_i} \neq \emptyset$ であるから $\bigcup_{i=1}^n E^{\lambda_i} \neq Y$ である ($\forall \{\lambda_i\}_1^n$)。よって $\bigcup \{E^\lambda; \lambda \in \partial D\} \neq Y$ である。 $x \in Y \setminus \bigcup \{E^\lambda; \lambda \in \partial D\}$ ととる。

F を定理 1 の証明にでてくる X の closed subset とすると、 $\text{supp } \mu_x \subset F$ である。 $f \in H^\infty$ を non-trivial peaking function とし $f \equiv 1$ on F とすると、 $f(x_\lambda) = 1$ ($\forall \lambda \in \partial D$) である。よって $f = 1$ on $\overline{O(x)}$ となり $\overline{O(x)} \cap X \neq X$ である。

上の x に代りて、 $\overline{O(x)} \cap X \neq \emptyset$ かどうかはわかりづらい。
 $\overline{O(x)}$ が X と接するかどうかを決めるには、 H^∞ のより深い結果が必要のように思われる。

定理 5. $x \in M(H^\infty) \setminus (X \cup D)$ とする。次は同値である。

- 1) $\overline{O(x)} \cap X = X$.
- 2) $\overline{O(y)} = X \quad \forall y \in \text{supp } \mu_x$.
- 3) $\overline{O(y)} = X$ となる $y \in \text{supp } \mu_x$ がある。

証明. 1) $\Rightarrow$ 2) $y \in \text{supp } \mu_x$ とし $\overline{O(y)} \neq X$ と仮定する。
 $\widehat{m}(\overline{O(y)}) = 0$ であるから、 $\widehat{m}(p(\overline{O(y)})) = 0$ である、 $\hat{m}$ は m を $M(\mathbb{Q}C)$ に持ち上げた測度を表す。 Wolff 定理 [3] より、 $f \in \mathbb{Q}A$ とし $f \neq 0$, $f = 0$ on $\overline{O(y)}$ なるものが取れる。

すると $f = 0$ on $\overline{O(x)}$ となり, 1) より $f \equiv 0$ となり矛盾が生ずる。

2) $\Rightarrow$ 3) あたりまえ。

3) $\Rightarrow$ 1) $\overline{O(x)} \cap X \neq X$ と仮定する。定理3の証明方法をもう少し精密に行なうと, $f \in H^\infty$ で $f = 0$ on $\overline{O(x)}$, $f \neq 0$ が存在することになる。Wolff 定理より $h \in QA$ で $h = 0$ on $\overline{O(x)}$ がある。よって $h = 0$ on $\bigcup \{\text{supp } \mu_\lambda; \lambda \in \partial D\}$ となり条件3)に矛盾する。

例. $x, y \in M(H^\infty) \setminus (X \cup D)$ とする。 $\text{supp } \mu_x \supset \text{supp } \mu_y$ とする。この時, $\overline{O(x)} \cap X = X \Leftrightarrow \overline{O(y)} \cap X = X$ 。

注1) U open subset of $M(H^\infty) \setminus D$

$$\Rightarrow U \not\subset \overline{O(x)} \quad \forall x \in M(H^\infty) \setminus D.$$

$$2) \quad \overline{O(x)} \neq M(H^\infty) \setminus D \quad \forall x \in M(H^\infty) \setminus D$$

問題2. U open subset of $M(H^\infty) \setminus D$

$$\Rightarrow \overline{O(x)} \cap X = X \text{ なる } x \in U \text{ が存在する?}$$

§ 3 Douglas algebras

$E \subset M(H^\infty) \setminus D$ に対して, $O(E) = \bigcup \{E_\lambda; \lambda \in \partial D\}$ とする。

定理6. I を連続でない inner とし, $Z(I) = \{x \in M(H^\infty) \setminus D; I(x) = 0\}$ とする。 $\Rightarrow \overline{O(Z(I))} \supset X$

証明. I は interpolating Blaschke product であり、その零点 $\{z_n\}$ は $z_n \rightarrow 1$ と仮定してよい。

[1] $\overline{O(Z(I))} \cap X \neq \emptyset$ である。

(i) $\overline{O(Z(I))} \cap X = \emptyset$ と仮定する。 $J=0$ on $\overline{O(Z(I))}$ なる inner J が取れる。各 $\lambda \in \partial D$ に対して $|J(\lambda z_n)| \leq \frac{1}{2}$ ($\forall n \geq k$) とする最小の k を $n(\lambda)$ と表す。 $P_N \equiv \{\lambda \in \partial D; n(\lambda) \leq N\}$ とする。 P_N は ∂D の closed subset である。 $\bigcup_1^\infty P_N = \partial D$ であるから、ある P_N は ∂D の open を含む。その open の中で $|J|$ は radial limit が 1 とはならない。矛盾

[2] $\overline{O(Z(I))} \cap X = X$ である。

(i) $\overline{O(Z(I))} \cap X \neq X$ と仮定する。 $f \in H^\infty$ であり $f=0$ on $\overline{O(Z(I))}$ かつ $f \neq 0$ が取れる。 J の変わりには f に対して [1] と同じ方針で矛盾を導ける。

系. B を rotation invariant Douglas algebra であり $H^\infty + C \subsetneq B$ とする。 $\Rightarrow B \neq [H^\infty, \bar{I}_n; n=1, 2, \dots]$, $z \in \{I_n\}$ は inner の列, $[\cdot]$ は生成される Douglas algebra を表す。

系. I を inner とする。 $\Rightarrow H^\infty + C = \bigcap \{[H^\infty, \bar{I}_\lambda]; \lambda \in \partial D\}$.

問題3. $[H^\infty, \bar{I}_\lambda; \lambda \in \partial D] = L^\infty$ とする inner I が存在するか?

注) $\text{supp } I$ が m -measure 0 の時は上の等号が成立しない。等号が成立することの同値な条件は

$$\bigcup \{ \{x \in M(H^\infty) \setminus D; |I(x)| < 1\}_\lambda; \lambda \in \partial D \} = M(H^\infty) \setminus (X \cup D)$$

である。

問題4. I を連続でない inner とする。この時, $x \in Z(I)$ で $\overline{O(x)} \cap X = X$ となる x が存在するか?

注) I が定理3の $\{z_n\}$ より作られる Blaschke product の時は, すべての x について上の事が成立する。又定理4の証明から, $\pi(Z(I)) = \partial D$ をみたす inner I に対しては, $x \in Z(I)$ で $\overline{O(x)} \cap X \neq X$ となる x が存在する。

問題2がOKならば問題4もOKである。 $U = \{ |I| < 1 \}$ とし定理5の系を使えばよい。

参考文献

1. P. Gorkin, Rotation invariant ideals in subalgebras of L^∞ , PAMS, 95(1985), 32-36.
2. K. Hoffman, Banach spaces of analytic functions (本), 1962.
3. K. Iszuchi, Countably generated Douglas algebras, TAMS, 299(1987), 171-192.
4. T. Wolff, Two algebras of bounded functions, Duke M. 49(1982), 321-328.