

正則化された平均曲率流 のゲージ理論への応用について

東京理科大学・理学部第一部数学科* 小池 直之†

Naoyuki Koike

Department of Mathematics, Faculty of Science

Tokyo University of Science

概要

本稿では、まず、主バンドルの接続の空間からその構造群へのホロノミー写像とよばれる写像を定義し、その写像を用いたヒルベルト空間内の等径部分多様体の新しい構成法を与える。次に、ヒルベルト空間内の正則化された平均曲率流のゲージ理論への応用として、ある主バンドルのある種の接続達がゲージ不変な正則化された平均曲率流に沿って一斉に動くとき、それらの接続達のあるループに沿うホロノミー元達が、 G の 1 点に集中することを主張する“ホロノミー集中定理”を紹介する。さらに、(主バンドルの) 接続の空間に、ゲージ変換群のその空間への作用が等長的になるようなリーマン計量を与えたとき、ゲージ軌道 (これは、その空間内の部分多様体) の形作用素をある線形微分作用素のグリーン作用素 (または、熱核) を用いて表示した式を与える。

1 序

リーマンヒルベルト多様体内の無限次元部分多様体の研究は、ゲージ理論におけるゲージ軌道、あるいは、ゲージ軌道の束の外在的研究において、重要である。しかしながら、リーマンヒルベルト多様体内の無限次元部分多様体の研究は、あまり行われていないのが現状である。その中で、1989 年、Chuu-Lian Terng([Te1]) は、(可分な) ヒルベルト空間内で、固有フレッドホルム部分多様体とよばれる良い焦点構造をもつ (比較的取り扱いや

〒162-8601 東京都新宿区神楽坂 1-3

本研究は JSPS 科研費 22K03300 の助成を受けたものである。

すい) 無限次元部分多様体を定義し、さらに、その特別なものとして、無限次元等径部分多様体という概念を定義した。固有フレッドホルム部分多様体の形作用素は、コンパクト作用素になり、それゆえ、そのスペクトラムは有界であり、0以外のスペクトルは点スペクトル(つまり、固有値)であり、0は点スペクトル、または、連続スペクトルである。無限次元等径部分多様体の等質な例は、ヒルベルトリー群のヒルベルト空間への極作用とよばれる等長作用の主軌道として与えられる。ヒルベルトリー群のヒルベルト空間への極作用の具体例は、次のように与えられる。 $\pi: P_o := S^1 \times G \rightarrow S^1$ をサークル S^1 上のコンパクト半単純リー群 G を構造群としてもつ自明な主バンドルとし、 $\mathcal{G}_{P_o}^{H^1} (\approx H^1([0, 1], G))$ をその H^1 ゲージ変換群、 $\mathcal{A}_{P_o}^{H^0} (\approx H^0([0, 1], \mathfrak{g}))$ をその H^0 接続の空間とする。このとき、 $\mathcal{G}_{P_o}^{H^1}$ の閉部分リー群 K で、その $\mathcal{A}_{P_o}^{H^0}$ への作用が極作用になるようなものを豊富に見出すことができ、その結果、 $\mathcal{A}_{P_o}^{H^0}$ 内の無限次元等径部分多様体の等質な例を豊富にえることができる。

本稿では、より一般に、コンパクトリーマン多様体 (B, g_B) 上のコンパクト半単純リー群 G を構造群としてもつ主バンドル $\pi: P \rightarrow B$ を考える。以下、 $s > \frac{1}{2} \dim B - 1$ とする。 $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$ をこの主バンドルの H^{s+1} ゲージ変換群とし、 $\mathcal{A}_P^{H^s}$ をこの主バンドルの H^s 接続の空間とする。まず、 B における各 C^∞ ループ c に対し、 c に沿うホロノミー写像(これは、 hol_c で表される)を、 $\mathcal{A}_P^{H^s}$ から G への沈め込み写像として定義した後、この写像を用いて、ヒルベルト空間 $\mathcal{A}_P^{H^s}$ 内の基点付きゲージ変換群 $(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0}$ に関して不変な等径部分多様体が、組織的に構成されることを保障する定理を述べる。次に、ある種のヒルベルトリー群作用 $\mathcal{G} \curvearrowright V$ を備えたヒルベルト空間 V 内の $\mathcal{G}$ 同変な正則化された平均曲率流の一意存在性について述べた後、 $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$ 不変な正則化された平均曲率流に沿うホロノミー集中定理(概要を参照)を紹介する。最後に、ゲージ作用 $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \curvearrowright \mathcal{A}_P^{H^s}$ が等長作用になるようなリーマン計量(これを g_s で表す)を $\mathcal{A}_P^{H^s}$ に与えたとき、ゲージ軌道(これは、 $(\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s)$ 内の部分多様体)の形作用素を、ある線形微分作用素のグリーン作用素(または、熱核)を用いて表示した式を与えることにする。

2 固有フレッドホルム部分多様体

この節において、ヒルベルト空間内の良い性質をもつ部分多様体として、1989年に Chuu-Lian Terng によって導入された固有フレッドホルム部分多様体の定義を振り返ることにする。 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を(可分な)ヒルベルト空間とし、 M を(C^∞ 級)ヒルベルト多様体とし、 f を M から V への(C^∞ 級)はめ込みとする。1989年、C. L. Terng([Te1])は、 f が次の3条件を満たすとき、 M を(f によってはめ込まれた)固有フレッドホルム部分

多様体と呼んだ：

(PF-i) $\text{codim } M < \infty$;

(PF-ii) 任意の $r > 0$ に対し, $\exp^\perp|_{B^{\perp r}(M)}$ は固有写像である ;

(PF-iii) M の任意の法ベクトル ξ に対し, $\exp_{*\xi}^\perp$ はフレッドホルム作用素である.

(PF-ii) において, $\exp^\perp$ は M の法指数写像を表し, $B^{\perp r}(M)$ は M の半径 r の法ボールバンドルを表す. f の法ベクトル ξ に対する形作用素を A_ξ で表すことにする. 序章で述べたように, 固有フレッドホルム部分多様体は, 良い焦点構造をもつ (図 1.1, 図 1.2 を参照). 詳しく説明すると, まず, 条件 (PF-i) と (PF-iii) により, 各法測地線 γ に対し, γ に沿う各焦点の重複度 (零化空間の次元) が有限であることが保障され, 条件 (PF-ii) により, 各法測地線 γ に対し, γ に沿う焦点全体からなる集合は, γ の始点以外に集積点をもたないことが保障される. これらの事実から, f の形作用素について, 次の事実が成り立つ.

事実 1.1. 各法ベクトル ξ に対し, A_ξ はコンパクト作用素になる.

$f: M \hookrightarrow V$ を固有フレッドホルム部分多様体とする. f が次の 2 条件を満たすとする：

(I-i) f の法ホロノミー群は, 自明である ;

(I-ii) f の任意の平行法ベクトル場 $\tilde{\xi}$ に対し, 形作用素 $A_{\tilde{\xi}_p}$ のスペクトラムは, 重複度を込めて, p の選択から独立している.

このとき, f は, (無限次元) 等径部分多様体とよばれる. この概念は, C. L. Terng([Te1])

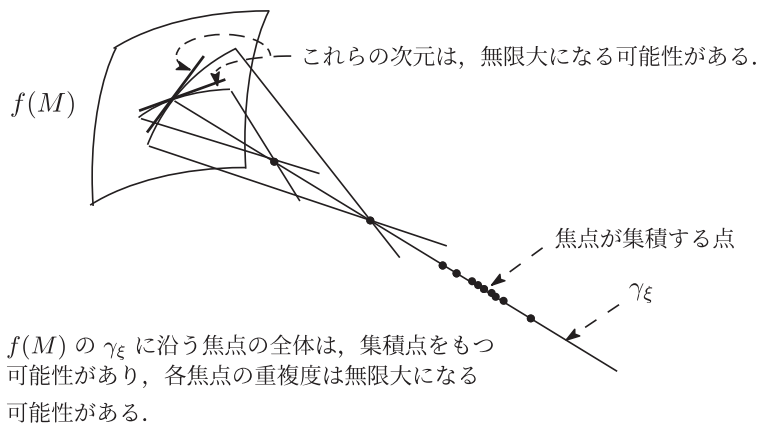


図 1.1：一般のヒルベルト部分多様体の焦点構造

によって導入された. (無限次元) 等径部分多様体の等質な例は, Kac-Moody 対称空間とよばれる無限次元ローレンツ対称空間のイソトロピー表現を用いて組織的に構成される.

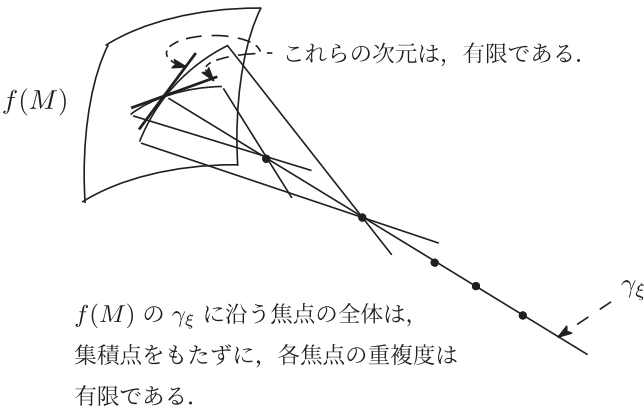


図 1.2：固有フレッドホルム部分多様体の焦点構造

3 正則化可能性

この節において, 固有フレッドホルム部分多様体の正則化可能性の定義を振り返ることにする. そのために, まず, ヒルベルト空間 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の自己随伴作用素の 2 種類の正則化可能性の定義を振り返ることにする. A を $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の自己随伴作用素とする. 1993 年, C. King と C. L. Terng([KT]) は, 自己随伴作用素 A の正則化されたトレース $\text{Tr}_r A$ を次のように定義した:

$$\text{Tr}_r A_\xi := \lim_{s \downarrow 1} \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i^s - (-\mu_i)^s)$$

$$(\text{Spec } A_\xi = \{\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq 0 \leq \cdots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1\}).$$

一方, 2006 年, E. Heintze, X. Liu と C. Olmos([HLO]) は, 自己随伴作用素 A の正則化されたトレース $\text{Tr}_r A$ を次のように定義した:

$$\text{Tr}_r A_\xi := \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i + \mu_i)$$

$$(\text{Spec } A_\xi = \{\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq 0 \leq \cdots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1\}).$$

本稿では, Heintze-Liu-Olmos の定義を採用する.

固有フレッドホルム部分多様体の正則化可能性が, 次のように定義される.

定義 ([HLO]) 固有フレッドホルム部分多様体 $f : M \hookrightarrow V$ が, 次の条件を満たすとする: $\forall \xi \in T^\perp M, \exists \text{Tr}_r A_\xi (< \infty) \ \& \ \exists \text{Tr}(A_\xi^2) (< \infty)$.

このとき, f を, **正則化可能な部分多様体**といい, 特に, 余次元が 1 の場合, f を**正則化可能な超曲面**という.

$f : M \hookrightarrow V$ を正則化可能な超曲面で (大域的に定義された) 単位法ベクトル場 $\tilde{\xi}$ を許容するようなものとする. このとき, $H := \text{Tr}_r A_{\tilde{\xi}}$ を**正則化された平均曲率**とよび, $\mathbf{H} := \text{Tr}_r A_{\tilde{\xi}} \cdot \tilde{\xi}$ を**正則化された平均曲率ベクトル場**とよぶ.

$f : M \hookrightarrow V$ を正則化可能な部分多様体とする. $\omega_u : T_u^\perp M \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\omega_u(\xi) := \text{Tr}_r A_\xi \quad (\xi \in T_u^\perp M)$$

によって定義する. ω_u が線形ならば, リースの表現定理により,

$$\langle \mathbf{H}_u, \xi \rangle = \omega_u(\xi) \quad (\forall \xi \in T_u^\perp M)$$

を満たす $\mathbf{H}_u \in T_u^\perp M$ が一意に存在する. しかしながら, 一般には, ω_u が線形であることを示すことができない. そこで, 次の条件

(*) 各点 $u \in M$ に対し, ω_u は線形である.

を考える必要がある. この条件が成り立つ場合, 各 $u \in M$ に対し, $\mathbf{H}_u \in T_u^\perp M$ を

$$\langle \mathbf{H}_u, \xi \rangle = \omega_u(\xi) \quad (\forall \xi \in T_u^\perp M)$$

によって定義することができ, それらを用いて, 法ベクトル場 $\mathbf{H}(: u \mapsto \mathbf{H}_u)$ を定義することができる. この法ベクトル場 $\mathbf{H}$ を M の**正則化された平均曲率ベクトル場**という.

4 正則化された平均曲率流

この節において, 2017 年, [K2] において導入された正則化された平均曲率流の定義を振り返ることにする. $\{f_t : M \hookrightarrow V\}_{t \in [0, T)}$ を, 条件 (*) を満たす正則化可能な部分多様体の C^∞ 族とし, $\mathbf{H}_t$ を $f_t(M)$ の正則化された平均曲率ベクトル場とする.

$$(RMCF) \quad \frac{\partial f_t}{\partial t} = \mathbf{H}_t$$

が成り立つとき, $\{f_t\}_{t \in [0, T)}$ を**正則化された平均曲率流**という.

$f : M \hookrightarrow (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を条件 (*) を満たす正則化可能な部分多様体とし, ∇ を誘導計量 $g := f^*\langle \cdot, \cdot \rangle$ のリーマン接続とする. ベクトル値関数 f のヘッシアン ∇df が

$$(\nabla df)(X, Y) := X(Y(f)) - df(\nabla_X Y) \quad (X, Y \in \mathcal{X}(M))$$

によって定義される. 各 $v \in T_u M$ と各 $\xi \in T_u^\perp M$ に対し,

$$w \mapsto \langle (\nabla df)_u(v, w), \xi \rangle \quad (w \in T_u M)$$

は線形なので, リースの表現定理より,

$$g(u_{v,\xi}, w) = \langle (\nabla df)(v, w), \xi \rangle \quad (\forall w \in T_u M)$$

を満たす $u_{v,\xi} \in T_u M$ が一意に定まる. このベクトル $u_{v,\xi}$ を $((\nabla df)_u)_\xi^\sharp(v)$ と表す. 各 $v \in T_u M$ と各 $\xi \in T_u^\perp M$ に対し, $((\nabla df)_u)_\xi^\sharp(v)$ を対応させる対応を $(\nabla df)_u^\sharp$ と表す. $(\nabla df)_u^\sharp$ はテンソル積空間バンドル $(T_u^\perp M)^* \otimes T_u^* M \otimes T_u M$ の元であり, それゆえ, 各 $u \in M$ に対し, $(\nabla df)_u^\sharp$ を対応させる対応 $(\nabla df)^\sharp$ は, テンソル積バンドル $(T^\perp M)^* \otimes T^* M \otimes TM$ の C^∞ 切断を与える. 明らかに, $(\nabla df)_\xi^\sharp$ は, 形作用素 A_ξ と一致する. それゆえ, 仮定から, $\text{Tr}_r(\nabla df)_\xi^\sharp$ が存在する. $\xi \mapsto \text{Tr}_r(\nabla df)_\xi^\sharp$ は線形なので, リースの表現定理より,

$$\langle \eta, \xi \rangle = \text{Tr}_r(\nabla df)_\xi^\sharp \quad (\forall \xi \in T_u M)$$

を満たす η が一意に定まる. この法ベクトル η を $(\Delta_r f)_u$ と表す. 各 $u \in M$ に対し, $(\Delta_r f)_u$ を対応させることにより定義される法ベクトル場を $\Delta_r f$ と表す. この法ベクトル場 $\Delta_r f$ を f の正則化されたラプラシアンという. 明らかに, $\Delta_r f$ は, f の正則化された平均曲率ベクトル場と一致する. それゆえ, 正則化された平均曲率方程式 (RMCF) は,

$$(4.1) \quad \frac{\partial f_t}{\partial t} = \Delta_r f_t$$

と表される. このヒルベルト多様体 M 上の偏微分方程式は, 有限次元の場合の平均曲率流方程式の無限次元版である. 有限次元の場合, 平均曲率流方程式は弱放物型偏微分方程式であり, デ・タートリックという手法を用いて, 部分多様体がコンパクトという仮定の下で, 任意の初期データに対し, その解の存在性と一意性が示される. その証明において, Nash-Moser の逆関数定理 ([Ha]) が用いられることも注意しておく. しかしながら, 無限次元であるがゆえ, 部分多様体がコンパクトであることを仮定することができず, また, Nash-Moser の逆関数定理に相当する定理もないため, 任意の初期データに対し, (RMCF) の解の存在性と一意性を示すことはできない.

5 G 同変な正則化された平均曲率流の存在性・一意性

この節において、ある種のヒルベルトリー群 $\mathcal{G}$ の等長作用を備えたヒルベルト空間内の $\mathcal{G}$ 不変なコンパクトな初期データに対し、(RCMF) の解の存在性と一意性が示されることを説明する。

ヒルベルトリー群 $\mathcal{G}$ がヒルベルト空間 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ に等長的に作用していて、次の条件を満たしているとする：

($\sharp$) $\mathcal{G} \curvearrowright (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ は、概自由な作用であり、その各軌道は極小な正則化可能な部分多様体である。

$\mathcal{G}$ がヒルベルト多様体 M に作用していて、次の条件を満たしているとする：

($\sharp_M$) $\mathcal{G} \curvearrowright M$ は概自由な作用であり、 $M/\mathcal{G}$ はコンパクトである。

$f : M \hookrightarrow V$ を $\mathcal{G}$ 同変な正則化可能部分多様体とする。このとき、像 $f(M)$ は、 $\mathcal{G}$ 不変であることを注意しておく。

定理 5.1. f を発する $\mathcal{G}$ 同変な正則化された平均曲率流は、一意に存在する。

この定理の証明の概略を述べる前に、いくつか記号を準備しておく。空間 $C_{\mathcal{G}}^{\infty}(M \times [0, T], V)$ を

$$C_{\mathcal{G}}^{\infty}(M \times [0, T], V) := \{F \in C^{\infty}(M \times [0, T], V) \mid f_t := F(\cdot, t) : \mathcal{G} \text{ 同変 } (\forall t \in [0, T])\}$$

によって定義する。 M 上のある $\mathcal{G}$ 不変なアフィン接続 $\mathring{\nabla}$ を任意にとり、固定する。このアフィン接続 $\mathring{\nabla}$ を用いて、 $(\Delta_r)_t$ を変形した作用素 $(\mathring{\Delta}_r)_t$ を

$$(\mathring{\Delta}_r)_t(f_t) := (\Delta_r)_t(f_t) + df_t(\text{Tr}_{g_t}(\nabla^t - \mathring{\nabla}))$$

によって定義する。写像

$$\mathcal{D} : C_{\mathcal{G}}^{\infty}(M \times [0, T], V) \rightarrow C_{\mathcal{G}}^{\infty}(M \times [0, T], V) \times C_{\mathcal{G}}^{\infty}(M, V)$$

を

$$\mathcal{D}(F) := \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} - (\mathring{\Delta}_r)_t \right) (F), F|_{M \times \{0\}} \right) \quad (F \in C_{\mathcal{G}}^{\infty}(M \times [0, T], V))$$

によって定義する。また、 $\phi : V \rightarrow V/\mathcal{G}$ を、作用 $\mathcal{G} \curvearrowright V$ の軌道写像とする。

$$C_{\mathcal{G}}^{\infty}(M \times [0, T], V) \cong C^{\infty}(M/\mathcal{G} \times [0, T], V/\mathcal{G})$$

に注意することにより、次の事実が示される。

補題 5.2. $C_{\mathcal{G}}^{\infty}(M \times [0, T], V)$ は、タイムなフレシェ空間である。

ここで、タイムなフレシェ空間とは、1982 年に、R.S. Hamilton によって導入された空間であり、この空間をモデル空間として、タイムなフレシェ多様体が定義され、この多様体上のリーマン計量に対し、そのリーマン接続や測地線の存在性・一意性が示される。上述の補題を用いて、定理 5.1 は、以下のような流れで証明される。

定理 5.1 の証明の概略 上述の写像 $\mathcal{D}$ の任意の点 F における線形化

$$d\mathcal{D}_F : C_{\mathcal{G}}^{\infty}(M \times [0, T], V) \rightarrow C_{\mathcal{G}}^{\infty}(M \times [0, T], V) \times C_{\mathcal{G}}^{\infty}(M, V)$$

は、強放物型線形作用素になる。それゆえ、 $d\mathcal{D}_F$ は線形同型写像になる。さらに、Nash-Moser の逆関数定理により、 $\mathcal{D}$ は、各点の近傍で C^{∞} 同型写像なる。それゆえ、任意の初期データ $f \in C^{\infty}(M, V)$ に対し、

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = (\dot{\Delta}_r)_t(F) \\ F|_{M \times \{0\}} = f \end{cases}$$

の解は、一意的に存在する。その解 F に対し、 $\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^{\perp_t} = \mathbf{H}_t$ が成り立つことを注意しておく。さらに、その解 $\{f_t\}_{t \in [0, T]}$ に付随して定義される M の C^{∞} 同型写像の 1 パラメーター族 $\{\psi_t\}_t$ に関する $\mathcal{G}$ 不変な常微分方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\text{Tr}_{g_t}(\nabla^t - \dot{\nabla}) \circ \psi_t \\ \psi_0 = \text{id}_M \end{cases}$$

の解を ψ_t とするとき、 f_t と ψ_t との合成の族 $\{f_t \circ \psi_t\}_t$ は、

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = (\Delta_r)_t(F) \\ F|_{M \times \{0\}} = f \end{cases}$$

の (一意的に定まる) 解になることが示される。 □

6 無限次元等径部分多様体の例

この節において、無限次元等径部分多様体の例を与えることにする。

G をコンパクト半単純リー群とし、 $\mathfrak{g} := \text{Lie } G$ をそのリー代数とする。また、 $\langle, \rangle$ を $\mathfrak{g}$ のキリング形式とし、 g_G を $-\langle, \rangle$ から定まる G の両側不変計量とする。 $H^0([0, 1], \mathfrak{g})$

を $[0, 1]$ を定義域とする $\mathfrak{g}$ 内の H^0 曲線の全体のなすヒルベルト空間とし, $H^1([0, 1], G)$ を $[0, 1]$ を定義域とする G 内の H^1 曲線の全体のなすヒルベトリーク群とする. ここで, $\mathfrak{g}$ 内の H^0 曲線とは, 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関するものであり, G 内の H^1 曲線とは, g_G に関するものであることを注意しておく. また, 序章で述べたように, $H^0([0, 1], \mathfrak{g})$, $H^1([0, 1], G)$ は, 各々, S^1 上の自明な G バンドル $\pi: P_o := S^1 \times G \rightarrow S^1$ の H^0 接続の空間 (正確には, $\pi: P_o := S^1 \times G \rightarrow S^1$ の C^∞ 接続の空間の H^0 完備化), H^1 ゲージ変換群であることを注意しておく. 写像 $\phi: H^0([0, 1], \mathfrak{g}) \rightarrow G$ を次式によって定義する:

$$\phi(u) := \mathbf{g}_u(1) \quad (u \in H^0([0, 1], \mathfrak{g}))$$

$$\left(\mathbf{g}_u \in H^1([0, 1], G) \text{ s.t. } \begin{cases} \mathbf{g}_u(0) = e, \\ (R_{\mathbf{g}_u(t)})_*^{-1}(\mathbf{g}'_u(t)) = u(t) \end{cases} \right).$$

写像 ϕ は, G に対する平行移送写像とよばれる. ゲージ作用 $H^1([0, 1], G) \curvearrowright H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ は, 次式によって定義される:

$$(\mathbf{g} \cdot u)(t) := \text{Ad}(g(t))(u(t)) - (R_{g(t)})_*^{-1}(g'(t)) \quad (t \in [0, 1])$$

$$(\mathbf{g} \in H^1([0, 1], G), \quad u \in H^0([0, 1], \mathfrak{g})).$$

また, $H^1([0, 1], G)$ の閉部分リー群 $\Lambda_e^{H^1}(G)$ を次式によって定義する:

$$\Lambda_e^{H^1}(G) := \{\mathbf{g} \in H^1([0, 1], G) \mid \mathbf{g}(0) = \mathbf{g}(1) = e\}.$$

事実 6.1. (i) $\Lambda_e^{H^1}(G) \curvearrowright H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ は自由な等長作用で, その各軌道は, 極小な正則化可能部分多様体である.

(ii) $H^0([0, 1], \mathfrak{g})/\Lambda_e^{H^1}(G)$ は G と同一視され, この同一視の下, $\Lambda_e^{H^1}(G) \curvearrowright H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ の軌道写像は, 平行移送写像 ϕ と同一視される.

Γ を $G \times G$ の閉部分リー群とし,

$$P(G, \Gamma) := \{\mathbf{g} \in H^1([0, 1], G) \mid (\mathbf{g}(0), \mathbf{g}(1)) \in \Gamma\}$$

とおく. このとき, 次の事実が成り立つ.

定理 6.2. Γ が $G \times G$ の対称部分群ならば, 作用 $P(G, \Gamma) \curvearrowright H^0([0, 1], \mathfrak{g})$ は, 極作用になり, それゆえ, その主軌道は等径部分多様体になる. ここで, Γ が対称部分群であるとは, G の対合 θ で $(\text{Fix } \theta)_0 \subset \Gamma \subset \text{Fix } \theta$ を満たすようなものが存在することを意味する ($\text{Fix } \theta$ は θ の固定点集合を表し, $(\text{Fix } \theta)_0$ は $\text{Fix } \theta$ の単位元を含む連結成分を表す.)

一方, ヒルベルト空間内の等径部分多様体の焦点構造を調べることにより, 次の事実が示される.

定理 6.3. ヒルベルト空間内の等径部分多様体は、第 3 節で述べた条件 (*) を満たす正則化可能な部分多様体になる。

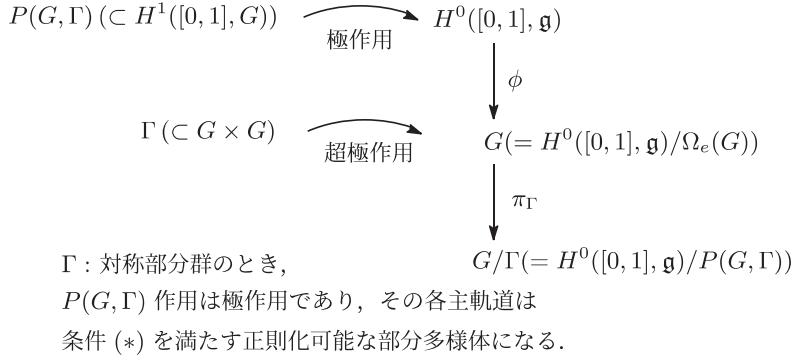


図 6.1 : ヒルベルト空間上の極作用の例

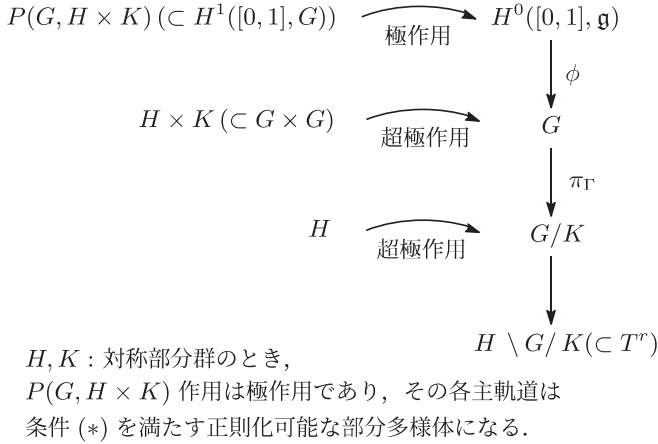


図 6.2 : ヒルベルト空間上の極作用の例 (続)

7 Palais と Uhlenbeck の結果 (ゲージ変換群に関する結果)

この節において、コンパクトリーマン多様体上のコンパクト半単純リー群を構造群にもつ主バンドルのゲージ変換群、及び、その接続の空間への作用に関する R. S. Palais([P]) と K. Uhlenbeck([U]) による結果を思い起こすことにする。この節における主バンドルの接続理論の議論の進め方は、野水克己先生流 ([N], [KN]) の議論の進め方に基づいている。

(B, g) をコンパクトリーマン多様体, G をコンパクト半単純リー群とし, $\pi : P \rightarrow (B, g)$

を (B, g) 上の G バンドルとする. P の C^∞ 接続の全体を $\mathcal{A}_P^\infty$ で表し, P 上の C^∞ 級のテンソリアル k 次微分形式の全体を $\Omega_{\mathcal{T},k}^\infty(P, \mathfrak{g})$ で表す. P 上の C^∞ 級のテンソリアル k 次微分形式とは, P 上の $\mathfrak{g}$ に値をとる k 次微分形式で, 次の条件を満たすようなものである:

$$R_g^* A = \text{Ad}(g^{-1}) \circ A \quad (\forall g \in G), \quad \mathcal{V}_u \subset \text{Ker } A_u \quad (u \in P).$$

$\mathcal{A}_P^\infty$ は, $\Omega_{\mathcal{T},1}^\infty(P, \mathfrak{g})$ を同伴ベクトルバンドルにもつアフィン空間であることを注意しておく. P の随伴ベクトルバンドル $P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}$ を $\text{Ad}(P)$ で表す. $\Omega_k^\infty(B, \text{Ad}(P))$ を B 上の $\text{Ad}(P)$ に値をとる C^∞ 級 k 次微分形式全体のなす空間, つまり,

$$\Omega_k^\infty(B, \text{Ad}(P)) = \Gamma^\infty((\wedge^k T^* B) \otimes \text{Ad}(P))$$

とする. ここで, $\Gamma^\infty(\cdot)$ は, ベクトルバンドル $(\cdot)$ の C^∞ 切断の全体を表す. 次の対応により, $\Omega_{\mathcal{T},k}^\infty(P, \mathfrak{g})$ は, $\Omega_k^\infty(B, \text{Ad}(P))$ と同一視される:

$$\begin{aligned} A \in \Omega_{\mathcal{T},k}^\infty(P, \mathfrak{g}) &\longleftrightarrow \hat{A} \in \Omega_k^\infty(B, \text{Ad}(P)) \\ (\hat{A}_{\pi(u)}(\pi_*(v_1), \dots, \pi_*(v_k)) &:= u \cdot A_u(v_1, \dots, v_k) \quad (u \in P, v_1, \dots, v_k \in T_u P)). \end{aligned}$$

$\omega_0 \in \mathcal{A}_P^\infty$ を基点としてとる. このとき, $\mathcal{A}_P^\infty, T_{\omega_0} \mathcal{A}_P^\infty, \Omega_{\mathcal{T},1}^\infty(P, \mathfrak{g}) (\approx \Omega_1^\infty(B, \text{Ad}(P)))$ が, 同一視される (図式 7.1 を参照):

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}_P^\infty & \approx & T_{\omega_0} \mathcal{A}_P^\infty = \Omega_{\mathcal{T},1}^\infty(P, \mathfrak{g}) & \approx & \Omega_1^\infty(B, \text{Ad}(P)) \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \omega & \longleftrightarrow & A := \omega - \omega_0 & \longleftrightarrow & \hat{A} \end{array}$$

図式 7.1: 接続の空間と同一視される 2 つの空間

P の s 回弱微分可能な接続の全体を $\mathcal{A}_P^{w,s}$ をで表し, B 上の s 回弱微分可能な $\text{Ad}(P)$ に値をとる k 次微分形式の全体を $\Omega_k^{w,s}(B, \text{Ad}(P))$ で表す. $\omega \in \mathcal{A}_P^{w,s}$ に対し, $\square_\omega : \Omega_k^{w,s}(B, \text{Ad}(P)) \rightarrow \Omega_k^{w,s-2}(B, \text{Ad}(P))$ を次のように定義する:

$$\square_\omega := \begin{cases} d_\omega \circ d_\omega^* + d_\omega^* \circ d_\omega + \text{id} & (k \geq 1) \\ d_\omega^* \circ d_\omega + \text{id} & (k = 0). \end{cases}$$

ここで, d_ω は, ω に関する共変外微分を表し, d_ω^* は, $\Gamma^{w,s}((\wedge^i T^* B) \otimes \text{Ad}(P)) (\approx \Omega_{\mathcal{T},i}^{w,s}(P, \mathfrak{g}))$ ($i = k-1, k, k+1$) の L^2 内積

$$\langle A_1, A_2 \rangle_0 := \int_{x \in B} \langle (\hat{A}_1)_x, (\hat{A}_2)_x \rangle_{B, \mathfrak{g}} dv_B \quad (A_1, A_2 \in \Omega_{\mathcal{T},i}^{w,s}(P, \mathfrak{g}))$$

に関する d_ω の随伴作用素を表す. ここで, $\langle, \rangle_{B, \mathfrak{g}}$ は, g と $\langle, \rangle_{\mathfrak{g}}$ の定める $(\wedge^k T^*B) \otimes \text{Ad}(P)$ のファイバー計量を表し, dv_B は, (B, g) の体積要素を表す.

$$T_\omega \mathcal{A}_P^{w,s} (\approx \Omega_{T,1}^{w,s}(P, \mathfrak{g}) \approx \Omega_1^{w,s}(B, \text{Ad}(P)))$$

の H^s 内積 $\langle, \rangle_s^\omega$ が次式によって定義される:

$$\langle A_1, A_2 \rangle_s^\omega := \int_{x \in B} \langle (\widehat{A_1})_x, \widehat{\square_\omega^s(A_2)}_x \rangle_{B, \mathfrak{g}} dv_B \quad (A_1, A_2 \in \Omega_{T,1}^{w,s}(P, \mathfrak{g})).$$

ソボレフ空間 $\Omega_{T,1}^{H^s}(P, \mathfrak{g})$ が,

$$\Omega_{T,1}^{H^s}(P, \mathfrak{g}) := \{A \in \Omega_{T,1}^{w,s}(P, \mathfrak{g}) \mid \langle A, A \rangle_s^\omega < \infty\}$$

によって定義され, それを付随するベクトル空間としてもつアフィンヒルベルト空間として, $\mathcal{A}_P^{H^s}$ が定義される. また, $\Omega_{T,1}^{H^s}(P, \mathfrak{g})$ に対応する $\Omega_1^\infty(B, \text{Ad}(P))$ の H^s 完備化を $\Omega_1^{H^s}(B, \text{Ad}(P))$ で表す.

$\mathcal{G}_P^\infty$ を P の id_B をカバーする C^∞ ゲージ変換のなす群とし, $\widehat{\mathcal{G}}_P^\infty$ を

$$\widehat{\mathcal{G}}_P^\infty := \{\widehat{\mathbf{g}} \in C^\infty(P, G) \mid \widehat{\mathbf{g}}(ug) = \text{Ad}(g^{-1})(\widehat{\mathbf{g}}(u)) \quad (\forall u \in P, \forall g \in G)\}$$

によって定義する. 次の対応により, $\mathcal{G}_P^\infty$ と $\widehat{\mathcal{G}}_P^\infty$ は, 同一視される:

$$\mathbf{g}(\in \mathcal{G}_P^\infty) \longleftrightarrow \widehat{\mathbf{g}}(\in \widehat{\mathcal{G}}_P^\infty) \quad (\mathbf{g}(u) = u\widehat{\mathbf{g}}(u) \quad (u \in P)).$$

P の $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(G)$ ($\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{Ad}(\mathbf{g}_1)(\mathbf{g}_2) := \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_1^{-1}$) による同伴ファイバーバンドルを $P \times_{\text{Ad}} G$ で表す. 次の対応により, $\widehat{\mathcal{G}}_P^\infty$ と $\Gamma^\infty(P \times_{\text{Ad}} G)$ は, 同一視される:

$$\widehat{\mathbf{g}}(\in \widehat{\mathcal{G}}_P^\infty) \longleftrightarrow \check{\mathbf{g}}(\in \Gamma^\infty(P \times_{\text{Ad}} G)) \quad (\check{\mathbf{g}}(\pi(u)) := u \cdot \widehat{\mathbf{g}}(u) \quad (u \in P)).$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G}_P^\infty & \approx & \widehat{\mathcal{G}}_P^\infty & \approx & \Gamma^\infty(P \times_{\text{Ad}} G) \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathbf{g} & \longleftrightarrow & \widehat{\mathbf{g}} & \longleftrightarrow & \check{\mathbf{g}} \end{array}$$

図式 7.2 : ゲージ変換群と同一視される 2 つの群

$\Gamma^\infty(P \times_{\text{Ad}} G)$ の H^{s+1} 完備化 $\Gamma^{H^{s+1}}(P \times_{\text{Ad}} G)$ は, Groisser-Parker([GP1]) によって定義された. $\Gamma^{H^{s+1}}(P \times_{\text{Ad}} G)$ に対応する $\mathcal{G}_P^\infty$, $\widehat{\mathcal{G}}_P^\infty$ の完備化を, 各々, $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$, $\widehat{\mathcal{G}}_P^{H^{s+1}}$ で表す.

$\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$ は, $\mathcal{A}_P^{H^s}$ に次のように作用する:

$$(\mathbf{g} \cdot \omega)_u := \text{Ad}(\widehat{\mathbf{g}}(u)) \circ \omega_u - (R_{\widehat{\mathbf{g}}(u)})_*^{-1} \circ \widehat{\mathbf{g}}_{u*} \\ (\mathbf{g} \in \mathcal{H}_P^{H^{s+1}}, \omega \in \mathcal{A}_P^{H^s}, u \in P).$$

g_s を次式によって定義される $\mathcal{A}_P^{H^s}$ のリーマン計量とする:

$$(g_s)_\omega := \langle \cdot, \cdot \rangle_s^\omega \quad (\omega \in \mathcal{A}_P^{H^s}).$$

定理 7.1 (Palais([P]), Uhlenbeck([U])). $s > \frac{1}{2} \dim B - 1$ とする. このとき, 次の主張 (i) – (iii) が成り立つ.

- (i) $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$ は, C^∞ ヒルベルトリー群になる.
- (ii) $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \curvearrowright \mathcal{A}_P^{H^s}$ は, C^∞ 作用になる.
- (iii) $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \curvearrowright (\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s)$ は, 等長作用になる.

注意 (i) は, Palais([P]) による結果であり, (ii) は, Uhlenbeck([U]) による結果である. (iii) は, 作用 $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \curvearrowright \mathcal{A}_P^{H^s}$ と g_s の定義から導かれる. $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \curvearrowright (\mathcal{A}_P^{H^s}, \langle \cdot, \cdot \rangle_s^\omega)$ は, 等長作用にならない.

8 ホロノミー写像・引き戻し接続写像

この節において, 主バンドルの接続の空間からの 2 つの写像を定義する.

$\pi: P \rightarrow (B, g)$ をコンパクトリーマン多様体 (B, g) 上の C^∞ 級の G バンドルとする. ここで, G は, コンパクト半単純リー群とする. $S^1 := \{e^{2\pi\sqrt{-1}t} \mid t \in [0, 1]\}$ とし, $z: [0, 1] \rightarrow S^1$ を $z(t) := e^{2\pi\sqrt{-1}t}$ ($t \in [0, 1]$) によって定義する. 以下, $s > \frac{1}{2} \dim B - 1$ とする. $\omega \in \mathcal{A}_P^{H^s}$ とし, $c: S^1 \rightarrow B$ を $c \circ z$ が C^∞ 級の等速ループとなるような C^∞ 写像とする. $a := \|(c \circ z)'(t)\|$ とおく. ω に関する $c \circ z$ に沿う平行移動を $P_{c \circ z}^\omega$ で表す. $\omega_0 \in \mathcal{A}_P^{H^s}$ と $u_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ ($x_0 := c(0) = c(1)$) を固定する.

定義 (ホロノミー写像) $\text{hol}_c: \mathcal{A}_P^{H^s} \rightarrow G$ を次式によって定義する:

$$(P_{c \circ z}^\omega \circ (P_{c \circ z}^{\omega_0})^{-1})(u_0) = u_0 \cdot \text{hol}_c(\omega).$$

この写像 hol_c を c に沿うホロノミー写像という.

σ を $c \circ z$ の ω_0 に関する u_0 を発する水平リフトとする.

定義 (引き戻し接続写像) $\mu_c : \mathcal{A}_P^{H^s} \rightarrow H^s([0, 1], \mathfrak{g})$ を次式によって定義する :

$$\mu_c(\omega)(t) := \omega_{\sigma(t)}(\sigma'(t)) \quad (\omega \in \mathcal{A}_P^{H^s}).$$

この写像 μ_c を c に沿う引き戻し接続写像とよぶ.

注意 定義により, 次式が成り立つ :

$$\mu_c(\omega)(t) = (\sigma^*\omega)_{t_0} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \right) \quad (t_0 \in [0, 1]).$$

それゆえ, μ_c は, 上述のようにネーミングされた ([K3], [K4]).

命題 8.1([K3], [K4]).

- (i) $\mu_c : (\mathcal{A}_P^{H^s}, \langle \cdot, \cdot \rangle_s^{\omega_0}) \rightarrow H^s([0, 1], \mathfrak{g})$ は, 倍率 a の相似的沈め込みになる.
- (ii) $\phi \circ \mu_c = \text{hol}_c$ が成り立つ.

注意 $\Lambda^{H^s}(\mathfrak{g}) := \{u \in H^s([0, 1], \mathfrak{g}) \mid u(0) = u(1)\}$ とおく. 容易に, $\mu_c(\mathcal{A}_P^{H^s}) = \Lambda^{H^s}(\mathfrak{g})$, 及び, $\overline{\Lambda^{H^s}(\mathfrak{g})} = H^s([0, 1], \mathfrak{g})$ が示される. ここで, $\bar{\cdot}$ は $\cdot$ の閉包を表す.

定理 8.2([K3], [K4]). $\text{hol}_c : (\mathcal{A}_P^{H^s}, \langle \cdot, \cdot \rangle_s^{\omega_0}) \rightarrow G$ は, 倍率 a の相似的沈め込みになり, 各ファイバーは, 極小な正則可能部分多様体になる.

$\lambda_c : \mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \rightarrow H^{s+1}([0, 1], G)$ を次式によって定義する :

$$\lambda_c(\mathbf{g})(t) := \widehat{\mathbf{g}}(\sigma(t)) \quad (\mathbf{g} \in \mathcal{G}_P^{H^{s+1}}).$$

命題 8.3.

$$\mu_c(\mathbf{g} \cdot \omega) = \lambda_c(\mathbf{g}) \cdot \mu_c(\omega) \quad (\mathbf{g} \in \mathcal{G}_P^{H^{s+1}}, \omega \in \mathcal{A}_P^{H^s})$$

が成り立つ.

注意 λ_c により, $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$ が $H^{s+1}([0, 1], G)$ に作用しているとみなせば, 上述の関係式は, μ_c が, $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$ 同変であることを意味する.

$(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0}$ を

$$(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0} := \{\mathbf{g} \in \mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \mid \widehat{\mathbf{g}}(u) = e \quad (\forall u \in \pi^{-1}(x_0))\}$$

によって定義する. この群は, x_0 における基点付きゲージ変換群とよばれる. $\Lambda_e^{H^{s+1}}(G)$ を

$$\Lambda_e^{H^{s+1}}(G) := \{\mathbf{g} \in H^{s+1}([0, 1], G) \mid \mathbf{g}(0) = \mathbf{g}(1) = e\}$$

によって定義する.

命題 8.4 $\lambda_c((\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0}) = \Lambda_e^{H^{s+1}}(G)$ が成り立つ.

事実 6.1 の (ii) に類似して, $H^s([0, 1], \mathfrak{g})/\Lambda_e^{H^{s+1}}(G) \cong G$ が成り立つので, 命題 8.3, 8.4 より, $\bar{\mu}_c: \mathcal{A}_P^{H^s}/(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0} \rightarrow G$ を次式によって定義することができる:

$$\bar{\mu}_c([\omega]_{x_0}) := (\phi \circ \mu_c)(\omega) \quad ([\omega]_{x_0} \in \mathcal{A}_P^{H^s}/(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0}).$$

ここで, ϕ は, G に対する平行移送写像を表す. $\pi^{x_0}, \bar{\pi}^{x_0}$ を, 各々, 作用 $(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0} \curvearrowright \mathcal{A}_P^{H^s}$, $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}/(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0} \curvearrowright \mathcal{A}_P^{H^s}(P)/(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0}$ の軌道写像とする.

命題 8.5 ([K3],[K4]). $\bar{\mu}_c \circ \pi^{x_0} = \phi \circ \mu_c$ が成り立つ.

命題 8.6. 次式が成り立つ:

$$\text{hol}_c(\mathbf{g} \cdot \omega) = \text{Ad}(\widehat{\mathbf{g}}(\sigma(0))) (\text{hol}_c(\omega)) \quad (\mathbf{g} \in \mathcal{G}_P^{H^{s+1}}, \omega \in \mathcal{A}_P^{H^s}).$$

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0} & \xrightarrow{\lambda_c} & \Lambda_e^{H^{s+1}}(G) \\
 \searrow & & \searrow \\
 \mathcal{A}_P^{H^s} & \xrightarrow{\mu_c} & H^s([0, 1], \mathfrak{g}) \\
 \downarrow \pi^{x_0} & \searrow \text{hol}_c & \downarrow \phi \\
 \mathcal{A}_P^{H^s}/(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0} & \xrightarrow{\bar{\mu}_c} & G
 \end{array}$$

図式 8.1: $\mu_c, \bar{\mu}_c, \text{hol}_c$ 間に成り立つ可換図式

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}_P^{H^s} & \xrightarrow{\mu_c} & H^s([0, 1], \mathfrak{g}) \\
 \downarrow \pi^{x_0} & \searrow \text{hol}_c & \downarrow \phi \\
 \mathcal{A}_P^{H^s}/(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0} & \xrightarrow{\bar{\mu}_c} & G \\
 \downarrow \bar{\pi}^{x_0} & \searrow & \downarrow \pi_{\text{Ad}} \\
 \mathcal{A}_P^{H^s}/\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} & \xrightarrow{\bar{\bar{\mu}}_c} & G/\text{Ad}(G)
 \end{array}$$

図式 8.2: $\mu_c, \bar{\mu}_c, \text{hol}_c$ 間に成り立つ可換図式

$\pi_{\text{Ad}}: G \rightarrow G/\text{Ad}(G)$ を随伴作用 $\text{Ad}: G \rightarrow \text{Aut}(G)$ の軌道写像とする.

命題 8.6 より, $\bar{\mu}_c : \mathcal{A}_P^{H^s} / \mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \rightarrow G/\text{Ad}(G)$ を次式によって定義することができる:

$$\bar{\mu}_c([\omega]) := (\pi_{\text{Ad}} \circ \phi \circ \mu_c)(\omega) \quad ([\omega] \in \mathcal{A}_P^{H^s} / \mathcal{G}_P^{H^{s+1}}).$$

命題 8.7. $\bar{\mu}_c \circ \bar{\pi}^{x_0} \circ \pi^{x_0} = \pi_{\text{Ad}} \circ \phi \circ \mu_c$ が成り立つ.

9 無限次元等径部分多様体の新しい構成法

この節において, ホロノミー写像を用いて, ヒルベルト空間内の無限次元等径部分多様体の新しい構成法を与える. 前節までの記号を用いることにする. $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \curvearrowright (\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s)$ は等長作用なので, g_s から $\mathcal{A}_P^{H^s} / \mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$ のリーマン計量が誘導される. 一方, $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \curvearrowright (\mathcal{A}_P^{H^s}, \langle \cdot, \cdot \rangle_s^\omega)$ は等長作用でないため, $\langle \cdot, \cdot \rangle_s^\omega$ から, $\mathcal{A}_P^{H^s} / \mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$ のリーマン計量は誘導されない. このように, ゲージ軌道の研究の立場からすると, ヒルベルト空間 $(\mathcal{A}_P^{H^s}, \langle \cdot, \cdot \rangle_s^\omega)$ よりもリーマンヒルベルト多様体 $(\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s)$ 内で, ゲージ軌道を研究すべきであることがわかる. しかしながら, 以下の定理で述べるように, ホロノミー写像を用いて, ヒルベルト空間 $(\mathcal{A}_P^{H^s}, \langle \cdot, \cdot \rangle_s^\omega)$ 内で, 等径部分多様体等の興味深い部分多様体をゲージ軌道の束として発見することができる.

今回えられた新しい構成法を述べるための準備をしよう. C. L. Terng と G. Thorbergsson([TT]) は, ユークリッド空間や球面内の (コンパクト) 等径部分多様体の一般概念として, コンパクト型対称空間内で, **等焦部分多様体** という概念を次の 3 条件を満たすコンパクト部分多様体 M として定義した:

- (E-i) M の法ホロノミー群は, 自明である;
- (E-ii) M は平坦な切断をもつ, つまり, 各 $x \in M$ に対し, 法傘 $\Sigma_x := \exp^\perp(T_x^\perp M)$ は全測地的部分多様体であり, Σ_x 上に誘導される計量は平坦である (Σ_x は M の x を通る**切断**とよばれる);
- (E-iii) M の各平行な法ベクトル場 $\tilde{\xi}$ に対し, $\tilde{\xi}_x$ 方向の法測地線 $\gamma_{\tilde{\xi}_x}$ に沿う焦半径達は, 重複度を込めて, $x(\in M)$ に依存しない.

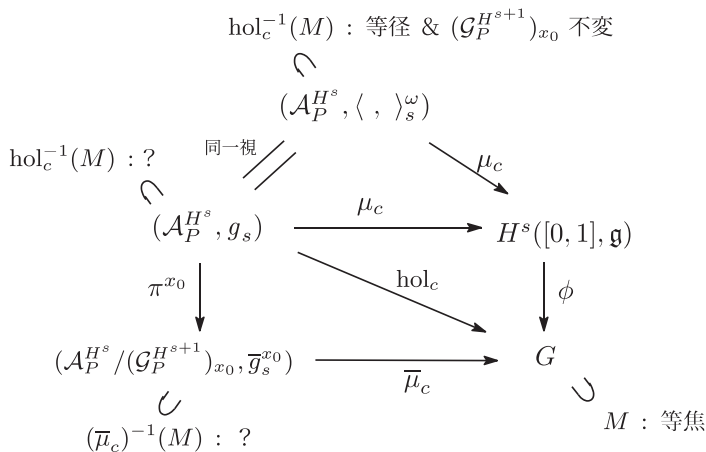
ホロノミー写像 hol_c に対し, 次の事実が成り立つ.

定理 9.1([K4]). M が G 内の等焦部分多様体であるならば, $\text{hol}_c^{-1}(M)$ の各連結成分は, $(\mathcal{A}_P^{H^s}, \langle \cdot, \cdot \rangle_s^\omega)$ 内の $(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0}$ 不変な等径部分多様体になる. 特に, M が $\text{Ad}(G)$ 不変ならば, $\text{hol}_c^{-1}(M)$ の各連結成分は, $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$ 不変になる.

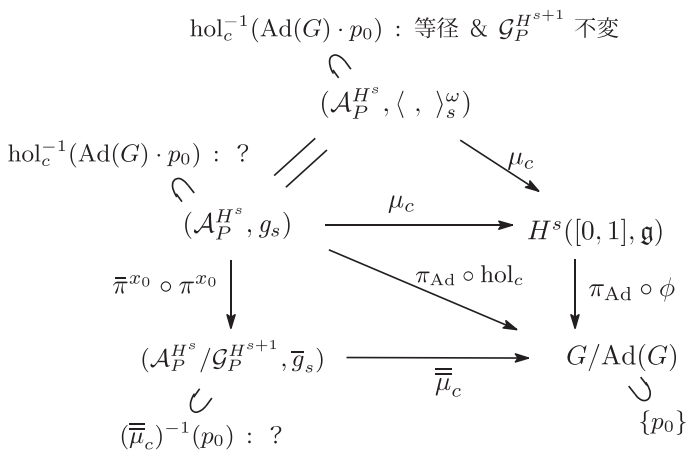
この事実により, ヒルベルト空間内の無限次元等径部分多様体の組織的構成法をえることができる. この事実のように, 様々なホロノミー条件を満たす接続の集合 (当然, これ

はゲージ軌道の束になる)が, ヒルベルト空間 $(\mathcal{A}_P^{H^s}, \langle, \rangle_s^\omega)$ 内でどのような部分多様体になるのかを調べることは, 今後, 興味深い研究テーマになるのではないと思われる.

g_s から $\mathcal{A}_P^{H^s}/\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$, $\mathcal{A}_P^{H^s}/(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0}$ に誘導されるリーマン計量を, 各々, $\bar{g}_s$, $\bar{g}_s^{x_0}$ で表す. G 内の等焦部分多様体 M に対し, $\text{hol}_c^{-1}(M)$, $(\bar{\mu}_c)^{-1}(M)$, $(\bar{\mu}_c)^{-1}(M)$ が, 各々, $(\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s)$, $(\mathcal{A}_P^{H^s}/(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0}, \bar{g}_s^{x_0})$, $(\mathcal{A}_P^{H^s}/\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}, \bar{g}_s)$ 内で, どのような部分多様体になるのかを調べることは, 興味深い問題である.



図式 9.1 : G 内の等焦部分多様体からえられる
 $(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0}$ 不変な等径部分多様体



図式 9.2 : G 内の随伴軌道からえられる
 $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$ 不変な等径部分多様体

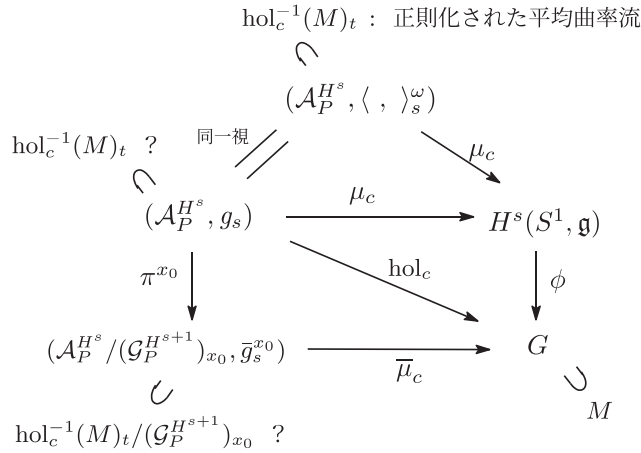
10 正則化された平均曲率流に沿うホロノミー集中定理

この節において, あるホロノミー条件を満たす接続の集まり (これは, 基点付きゲージ軌道の束になる) が, 正則化された平均曲率流に沿って, 一斉に動くときに, それらの接続達のあるループに沿うホロノミー元達が G のある 1 点に集中することを主張する **ホロノミー集中定理** について述べることにする. $\pi : P \rightarrow (B, g)$ をコンパクトリーマン多様体 (B, g) 上の G バンドルとする. ここで, G はコンパクト半単純リー群を表す. 前節までの記号を用いることにする. $n := \dim G - 1$ とする. M を G 内の閉超曲面とし, $\text{hol}_c^{-1}(M)$ から $(\mathcal{A}_P^{H^s}, \langle \cdot, \cdot \rangle_s^\omega)$ への包含写像を ι で表すことにする. M に対し, 次の 2 つのスマール条件を考える:

(S-i) $M \subset B_{\frac{\pi}{b}}(g_0) \quad \& \quad \exp_{g_0}|_{B_{\frac{\pi}{b}}^T(0)} : \text{単射}$

(S-ii) $b^2(1 - \alpha)^{-2/n}(\omega_n^{-1} \cdot \text{Vol}(M))^{2/n} \leq 1$

$$\left(\begin{array}{l} b := \sqrt{K} \quad (K : G \text{ の最大の断面曲率}) \\ B_{\frac{\pi}{b}}(g_0) : g_0 \in G \text{ を中心とする半径 } \frac{\pi}{b} \text{ の測地球体} \\ B_{\frac{\pi}{b}}^T(0) : 0 \in T_{g_0}G \text{ を中心とする半径 } \frac{\pi}{b} \text{ の球体} \\ \exp : \text{リーマン多様体 } G \text{ の指数写像} \\ \omega_n : n \text{ 次元ユークリッド空間における単位球体の体積} \\ \alpha : 0 < \alpha < 1 \text{ を満たす定数} \end{array} \right).$$



図式 10.1: G 内のコンパクト部分多様体からえられる
 $(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0}$ 不変な正則化された平均曲率流

定理 10.1(ホロノミー集中定理). M が強凸であり、かつ、上述のスモール条件 (S-i), (S-ii) を満たすとする。このとき、 ι を発する $(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0}$ 不変な正則化された平均曲率流は、有限時間において hol_c のあるファイバーに崩壊する。

注意 この定理の主張は、 $\text{hol}_c^{-1}(M)$ に属する接続達が、 ι を発するある正則化された平均曲率流に沿って一斉に動くとき、それらの接続達の c に沿うホロノミー元達が、 G のある 1 点に集中することを意味する。

11 グリーン関数

この節において、ベクトルバンドルの切断の空間からそれ自身への線形微分作用素のグリーン関数の定義を思い起こすことにする。 $\pi : E \rightarrow B$ をコンパクトリーマン多様体 (B, g_B) 上の C^∞ 級ベクトルバンドルとし、 g_E をそのファイバー計量とする。また、 $\Gamma^{H^s}(E)$ を E の H^s 切断の空間とする。 $\mathcal{L} : \Gamma^{H^s}(E) \rightarrow \Gamma^{H^s}(E)$ を線形微分作用素とする。次の線形微分方程式を考える：

$$(11.1) \quad \mathcal{L}(\sigma) = \rho,$$

ここで、 ρ は、 E のある H^s 切断を表す。 $y \in B$ と $\mathbf{v} \in E_y$ に対し、 $\delta_{\mathbf{v}}$ を

$$\int_{x \in B} (g_E)_x(\delta_{\mathbf{v}}(x), \sigma(x)) dv_B = (g_E)_y(\mathbf{v}, \sigma(y)) \quad (\forall \sigma \in \Gamma^{H^s}(E))$$

を満たす E の切断とする。 $G_{\mathcal{L}}^{\mathbf{v}} \in \Gamma^{H^s}(E)$ ($\mathbf{v} \in E_y$) を $\mathcal{L}(\sigma) = \delta_{\mathbf{v}}$ の解とする。 $\text{pr}_i : B \times B \rightarrow B$ ($i = 1, 2$) を i 成分への射影とし、2つの誘導バンドルのテンソル積バンドル $\text{pr}_1^* E \otimes \text{pr}_2^* E^*$ を考える。このバンドルの全空間は、次式によって与えられる：

$$\text{pr}_1^* E \otimes \text{pr}_2^* E^* := \coprod_{(x,y) \in B \times B} (E_x \otimes E_y^*).$$

$\text{pr}_1^* E \otimes \text{pr}_2^* E^*$ の切断 $G_{\mathcal{L}}$ を

$$G_{\mathcal{L}}(x, y)(\mathbf{v}) := G_{\mathcal{L}}^{\mathbf{v}}(x) \quad ((x, y) \in B \times B, \mathbf{v} \in E_y)$$

によって定義する。ここで、 $\mathcal{L}$ が可逆であるとき、 $G_{\mathcal{L}}^{\mathbf{v}}$ は、一意に定まることを注意しておく。この切断 $G_{\mathcal{L}}$ を $\mathcal{L}$ の**グリーン関数**という。具体的に、 $G_{\mathcal{L}}$ は、次のように与えられることを注意しておく：

$$G_{\mathcal{L}}(x, y)(\mathbf{v}) = \sum_i \lambda_i^{-1} \cdot (g_E)_y(\mathbf{v}, \eta_i(y)) \delta_{y,1}(x) \eta_i(x).$$

ここで, $(\eta_i)_i$ は, $\Gamma^{H^s}(E)$ の正規直交基底で, $\mathcal{L}(\eta_i) = \lambda_i \eta_i$ を満たすようなものであり, $\delta_{y,1}$ は,

$$\int_B \delta_{y,1}(x) f(x) dx = f(y) \quad (\forall f \in C^\infty(B))$$

によって定義されるデルタ関数を表す. 写像 $G_{\mathcal{L}}^o : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ を

$$G_{\mathcal{L}}^o(\psi)(y) := \sum_{i=1}^m \int_{x \in B} g_E(\psi(x), G_{\mathcal{L}}(x, y)(e_i)) dv_B \cdot e_i \quad (\psi \in \Gamma(E), y \in B).$$

ここで, $(e_1, \dots, e_m)$ は, E_y の正規直交基底を表す. $G_{\mathcal{L}}^o$ を $\mathcal{L}$ のグリーン作用素という. $G_{\mathcal{L}}^o$ について, 次式が成り立つ:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(G_{\mathcal{L}}^o(\psi))(y) &= \sum_{i=1}^m \int_{x \in B} g_E(\psi(x), \mathcal{L}(G_{\mathcal{L}}(x, y)(e_i)) dv_B \cdot e_i \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{x \in B} g_E(\psi(x), \delta_{e_i}(x)) dv_B \cdot e_i \\ &= \sum_{i=1}^m g_E(\psi(y), e_i) \cdot e_i = \psi(y). \end{aligned}$$

このように, $G_{\mathcal{L}}^o(\psi)$ は, $\mathcal{L}(\sigma) = \psi$ の解になる.

12 $(\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s)$ におけるゲージ軌道の形作用素

この節において, $(\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s)$ におけるゲージ軌道の形作用素を, ある線形微分作用素のグリーン作用素 (または, 熱核) を用いて, 表示することにする.

A^ω をゲージ軌道 $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \cdot \omega$ ($\subset (\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s)$) の形テンソル場とする. $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \cdot \omega$ の法ベクトル ξ に対する形作用素 $A_\xi^\omega : T_\omega(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \cdot \omega) \rightarrow T_\omega(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \cdot \omega)$ は, $T_\omega \mathcal{A}_P^{H^s}$ と $\Omega_{T,1}^{H^s}(P, \mathfrak{g}) (\approx \Omega_1^{H^s}(B, \text{Ad}(P)))$ の同一視の下, $\Omega_{T,1}^{H^s}(P, \mathfrak{g}) (\approx \Omega_1^{H^s}(B, \text{Ad}(P)))$ の部分空間からそれ自身への線形変換とみなされる. $d_\omega : \Omega_k^{H^s}(P, \mathfrak{g}) \rightarrow \Omega_{k+1}^{H^s}(P, \mathfrak{g})$ を ω に関する共変外微分作用素とし, d_ω^* を d_ω の随伴作用素とする. $\square_\omega : \Omega_{T,k}^{H^s}(P, \mathfrak{g}) \rightarrow \Omega_{T,k}^{H^{s-2}}(P, \mathfrak{g})$ を

$$\square_\omega := \begin{cases} d_\omega \circ d_\omega^* + d_\omega^* \circ d_\omega + \text{id} & (k \geq 1) \\ d_\omega^* \circ d_\omega + \text{id} & (k = 0), \end{cases}$$

によって定義する. $\mathcal{D}_\omega^s : \Omega_0^{H^s}(P, \mathfrak{g}) \rightarrow \Omega_0^{H^s}(P, \mathfrak{g})$ を $\mathcal{D}_\omega^s := d_\omega^* \circ \square_\omega^s \circ d_\omega$ によって定義する. 特に, $\mathcal{D}_\omega^0 (= d_\omega^* \circ d_\omega)$ を Δ_ω^0 で表す. $\Omega_0^{H^s}(P, \mathfrak{g})$ と $\Omega_0^{H^s}(B, \text{Ad}(P)) = \Gamma^{H^s}(\text{Ad}(P))$ の同一視の下, $\mathcal{D}_\omega^s$ を $\Gamma^{H^s}(\text{Ad}(P))$ からそれ自身への線形微分作用素とみなす. $\mathcal{D}_\omega^s$ のグ

リーマン関数, 及び, グリーン作用素を, 各々, $G_{\omega,s}$, $G_{\omega,s}^0$ で表す. $\mathcal{V}^P$ を $\pi: P \rightarrow B$ の鉛直分布とし, $\mathcal{H}^\omega$ を接続 ω に関する水平分布 (つまり, $(\mathcal{H}^\omega)_u = \text{Ker } \omega_u$ ($u \in P$)) とする.

命題 12.1. P の接続 ω が既約であることと Δ_ω^0 が可逆であることは, 同値である.

証明 ω が既約であるとする. このとき, ω のホロノミー群は, G 全体になる. $f \in \text{Ker } d_\omega$ をとる. このとき, $df|_{\mathcal{H}^\omega} = 0$ が成り立つ. つまり, f は, ω に関する各水平曲線に沿って一定である. それゆえ, f は, 各ホロノミーバンドル上で一定である. 一方, ω のホロノミー群は, G 全体なので, ホロノミーバンドルは, P 全体と一致する. したがって, f は, P 全体で一定である. ところで, $f \in \Omega_{T,0}(P, \mathfrak{g})$ なので, 次式が成り立つ:

$$f(ua) = \text{Ad}(a^{-1})(f(u)) \quad (u \in P, a \in G).$$

この式と f の一定性から,

$$f(u) = \text{Ad}(a^{-1})(f(u)) \quad (u \in P, a \in G)$$

が導かれる. つまり, $f(u) \in \bigcap_{g \in G} \text{Fix}(\text{Ad}(g)) = \{0\}$. それゆえ, $f \equiv 0$ をえる. したがって, $\text{Ker } d_\omega = \{0\}$, それゆえ, d_ω が可逆であることが示される. この事実から, Δ_ω^0 が可逆であることが導かれる. 逆も同様に示される. $\square$

ω が既約の場合, 前述のように, Δ_ω^0 のグリーン関数 $G_{\omega,0}$ は, 一意に定まる. 一方, ω が可約の場合, 各 $v \in \text{Ad}(P)_x$ に対し, $G_{\omega,0}^v \in \Gamma^{H^s}(\text{Ad}(P))$ で

$$\Delta_\omega^0(G_{\omega,0}^v) = \delta_v - \sum_i g(v, \eta_i(x)) \eta_i$$

を満たすようなものが一意に存在する. ここで, $(\eta_i)_i$ は $\text{Ker } \Delta_\omega^0$ の正規直交基底を表す. $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}/(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0}$ は, G/Z に同型である. ここで, Z は, G の中心を表す. $\mathcal{M}_P^{H^s} := \mathcal{A}_P^{H^s}/\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$, $(\mathcal{M}_P^{H^s})_{x_0} := \mathcal{A}_P^{H^s}/(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0}$ とおく. 商群 $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}/(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0} (\cong G/Z)$ は, $(\mathcal{M}_P^{H^s})_{x_0}$ に作用し, その軌道空間 $(\mathcal{M}_P^{H^s})_{x_0}/(G/Z)$ は, $\mathcal{M}_P^{H^s}$ と同一視される. 作用 $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \curvearrowright \mathcal{A}_P^{H^s}$ と $(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0} \curvearrowright \mathcal{A}_P^{H^s}$ の軌道写像を, 各々, $\pi_{\mathcal{M}_P}$, $\pi_{(\mathcal{M}_P)_{x_0}}$ で表す. $(\mathcal{M}_P^{H^s})_{x_0}$ は C^∞ 多様体になり, $\pi_{(\mathcal{M}_P)_{x_0}}$ は沈め込み写像になる. 一方, $\mathcal{M}_P^{H^s}$ はオービフォールドになり, $\pi_{\mathcal{M}_P}$ はオービ沈め込みになる. $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$ は $(\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s)$ に等長的に作用するので, $(\mathcal{M}_P^{H^s})_{x_0}$ 上のリーマン計量 $\bar{g}_s^{x_0}$ で, $\pi_{(\mathcal{M}_P)_{x_0}}: (\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s) \rightarrow ((\mathcal{M}_P^{H^s})_{x_0}, \bar{g}_s^{x_0})$ がリーマン沈め込みになるようなものが一意に存在し, また, $\mathcal{M}_P^{H^s}$ のオービ計量 $\bar{g}_s$ で, $\pi_{\mathcal{M}_P}: (\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s) \rightarrow (\mathcal{M}_P^{H^s}, \bar{g}_s)$ がリーマンオービ沈め込みになるようなものが一意に存在する. $\mathcal{V}^A$, $\mathcal{H}^A$ を, 各々, リーマンオービ沈め込み $\pi_{\mathcal{M}_P}$ の鉛直分布, 及び, 水平分布

とする. 鉛直分布 $\mathcal{V}^{\mathcal{A}}$ は,

$$(12.1) \quad (\mathcal{V}^{\mathcal{A}})_{\omega} = \text{Im } d_{\omega} \quad (\omega \in \mathcal{A}_P^{H^s})$$

によって与えられ, 水平分布 $\mathcal{H}^{\mathcal{A}}$ は,

$$(12.2) \quad \begin{aligned} (\mathcal{H}^{\mathcal{A}})_{\omega} &= \{\eta \in \Omega_{\mathcal{T},1}^{H^s}(P, \mathfrak{g}) \mid \langle d_{\omega}(\rho), \eta \rangle_s^{\omega} = 0 \\ &\quad (\forall \rho \in \Omega_{\mathcal{T},0}^{H^s}(P, \mathfrak{g}))\} \\ &= \{\eta \in \Omega_{\mathcal{T},1}^{H^s}(P, \mathfrak{g}) \mid \langle d_{\omega}(\rho), \square_{\omega}^s(\eta) \rangle_0 = 0 \\ &\quad (\forall \rho \in \Omega_{\mathcal{T},0}^{H^s}(P, \mathfrak{g}))\} \\ &= \{\eta \in \Omega_{\mathcal{T},1}^{H^s}(P, \mathfrak{g}) \mid \langle \rho, d_{\omega}^*(\square_{\omega}^s(\eta)) \rangle_0 = 0 \\ &\quad (\forall \rho \in \Omega_{\mathcal{T},0}^{H^s}(P, \mathfrak{g}))\} \\ &= \text{Ker } (d_{\omega}^* \circ \square_{\omega}^s) \end{aligned}$$

によって与えられる. また, $\mathcal{V}^{\mathcal{A},x_0}$, $\mathcal{H}^{\mathcal{A},x_0}$ を, 各々, リーマンオービッド沈め込み $(\pi_{\mathcal{M}_P})_{x_0}$ の鉛直分布, 及び, 水平分布とする. 水平分布 $(\mathcal{H}^{\mathcal{A},x_0})_{\omega}$ は, 次のように与えられる:

$$(12.3) \quad \begin{aligned} (\mathcal{H}^{\mathcal{A},x_0})_{\omega} &= \{\eta \in \Omega_{\mathcal{T},1}^{H^s}(P, \mathfrak{g}) \mid \langle d_{\omega}(\rho), \eta \rangle_s^{\omega} = 0 \\ &\quad (\forall \rho \in \Omega_{\mathcal{T},0}^{H^s}(P, \mathfrak{g}) \text{ s.t. } \rho(x_0) = 0)\} \\ &= \{\eta \in \Omega_{\mathcal{T},1}^{H^s}(P, \mathfrak{g}) \mid \langle d_{\omega}(\rho), \square_{\omega}^s(\eta) \rangle_0 = 0 \\ &\quad (\forall \rho \in \Omega_{\mathcal{T},0}^{H^s}(P, \mathfrak{g}) \text{ s.t. } \rho(x_0) = 0)\} \\ &= \{\eta \in \Omega_{\mathcal{T},1}^{H^s}(P, \mathfrak{g}) \mid \langle \rho, d_{\omega}^*(\square_{\omega}^s(\eta)) \rangle_0 = 0 \\ &\quad (\forall \rho \in \Omega_{\mathcal{T},0}^{H^s}(P, \mathfrak{g}) \text{ s.t. } \rho(x_0) = 0)\} \\ &= \{\eta \in \Omega_{\mathcal{T},1}^{H^s}(P, \mathfrak{g}) \mid \exists \mathbf{v} \in \text{Ad}(P)_{x_0}, (d_{\omega}^* \circ \widehat{\square_{\omega}^s})(\eta) = \delta_{\mathbf{v}}\} \\ &= \{\eta \in \Omega_{\mathcal{T},1}^{H^s}(P, \mathfrak{g}) \mid \exists \mathbf{v} \in \text{Ad}(P)_{x_0}, (d_{\omega}^* \circ \square_{\omega}^s)(\eta) = (d_{\omega}^* \circ d_{\omega})(G_{\omega,0}^{\mathbf{v}})\} \\ &= \{\eta \in \Omega_{\mathcal{T},1}^{H^s}(P, \mathfrak{g}) \mid \exists \mathbf{v} \in \text{Ad}(P)_{x_0} \\ &\quad (d_{\omega}^* \circ \square_{\omega}^s)(\eta) = (d_{\omega}^* \circ \square_{\omega}^s \circ \square_{\omega}^{-s} \circ d_{\omega})(G_{\omega,0}^{\mathbf{v}})\} \\ &= \{\eta \in \Omega_{\mathcal{T},1}^{H^s}(P, \mathfrak{g}) \mid \exists \mathbf{v} \in \text{Ad}(P)_{x_0} \\ &\quad (d_{\omega}^* \circ \square_{\omega}^s)(\eta - (\square_{\omega}^{-s} \circ d_{\omega})(G_{\omega,0}^{\mathbf{v}})) = 0\} \\ &= \text{Ker } (d_{\omega}^* \circ \square_{\omega}^s) \\ &\quad \oplus \text{Span}\{(\square_{\omega}^{-s} \circ d_{\omega})(G_{\omega,0}^{\mathbf{v}}) \mid \mathbf{v} \in \text{Ad}(P)_{x_0} \ominus (\text{Ker } d_{\omega})_{x_0}\} \\ &= (\mathcal{H}^{\mathcal{A}})_{\omega} \oplus \text{Span}\{(\square_{\omega}^{-s} \circ d_{\omega})(G_{\omega,0}^{\mathbf{v}}) \mid \mathbf{v} \in \text{Ad}(P)_{x_0} \ominus (\text{Ker } d_{\omega})_{x_0}\}. \end{aligned}$$

(12.1), (12.2), 及び (12.3) から, 次の 2 式が導かれる:

$$(12.4) \quad T_{\omega}(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \cdot \omega) = \text{Im } d_{\omega} (\cong \Omega_{\mathcal{T},0}^{H^s}(P, \mathfrak{g}) / \text{Ker } d_{\omega}),$$

$$(12.5) \quad \begin{aligned} &T_{\omega}((\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0} \cdot \omega) \\ &= \text{Im } d_{\omega} \cap (\text{Span}\{(\square_{\omega}^{-s} \circ d_{\omega})(G_{\omega,0}^{\mathbf{v}}) \mid \mathbf{v} \in \text{Ad}(P)_{x_0} \ominus (\text{Ker } d_{\omega})_{x_0}\})^{\perp}. \end{aligned}$$

ここで, $T_{\omega}(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \cdot \omega)$ は, $\Omega_{\mathcal{T},1}^{H^s}(P, \mathfrak{g}) (= \Omega_1^{H^s}(B, \text{Ad}(P)))$ の部分空間とみなされる. 命題 12.1 と (12.4) から, 次の事実が導かれる.

定理 12.2. (i) ω が既約接続ならば, $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \cdot \omega$ は作用 $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \curvearrowright \mathcal{A}_P^{H^s}$ の主軌道である.

(ii) ω が可約接続ならば, $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \cdot \omega$ は作用 $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \curvearrowright \mathcal{A}_P^{H^s}$ の特異軌道である. $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \curvearrowright (\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s)$ の ω におけるスライス表現の主軌道の次元は, $\text{Ker } d_\omega$ の次元に等しい.

$v \in T_\omega \mathcal{A}_P^{H^s}$ に対し, v の $\mathcal{V}_\omega^{\mathcal{A}}$ 成分を $v_{\mathcal{V}_\omega^{\mathcal{A}}}$ で表し, v の $\mathcal{H}_\omega^{\mathcal{A}}$ 成分を $v_{\mathcal{H}_\omega^{\mathcal{A}}}$ で表す.

命題 12.3. $v \in T_\omega \mathcal{A}_P^{H^s}$ に対し,

$$\begin{aligned} v_{\mathcal{V}_\omega^{\mathcal{A}}} &= (d_\omega \circ G_{\omega,s}^o \circ d_\omega^* \circ \square_\omega^s)(v), \\ v_{\mathcal{H}_\omega^{\mathcal{A}}} &= v - (d_\omega \circ G_{\omega,s}^o \circ d_\omega^* \circ \square_\omega^s)(v) \end{aligned}$$

が成り立つ.

証明 $G_{\omega,s}^o$ は, $\text{Im } d_\omega^*$ 上で well-defined であり, $D_\omega^s \circ G_{\omega,s}^o = \text{id}$ が成り立つので,

$$(d_\omega^* \circ \square_\omega^s)(v - (d_\omega \circ G_{\omega,s}^o \circ d_\omega^* \circ \square_\omega^s)(v)) = 0$$

つまり,

$$v - (d_\omega \circ G_{\omega,s}^o \circ d_\omega^* \circ \square_\omega^s)(v) \in \mathcal{H}_\omega^s$$

をえる. 一方,

$$(d_\omega \circ G_{\omega,s}^o \circ d_\omega^* \circ \square_\omega^s)(v) \in \text{Im } d_\omega = \mathcal{V}_\omega$$

をえる. したがって, 主張におけるような関係式をえる. $\square$

g_s のリーマン接続を $\tilde{\nabla}$ で表す. 作用素 $d_\omega^* \circ \square_\omega^s$ は, $\Omega_{\mathcal{T},1}^{H^s}(P, \mathfrak{g})^* \otimes \Omega_{\mathcal{T},0}^{H^0}(P, \mathfrak{g})$ の元なので, $\Omega_{\mathcal{T},1}^{H^s}(P, \mathfrak{g})$ を $T_\omega \mathcal{A}_P^{H^s}$ と同一視することにより, $T_\omega^* \mathcal{A}_P^{H^s} \otimes \Omega_{\mathcal{T},0}^{H^0}(P, \mathfrak{g})$ の元とみなされる. それゆえ, 対応

$$d_\omega^* \circ \square_\omega^s : \omega \mapsto d_\omega^* \circ \square_\omega^s \quad (\omega \in \mathcal{A}_P^{H^s})$$

は, テンソル積バンドル $T^* \mathcal{A}_P^{H^s} \otimes (\mathcal{A}_P^{H^s} \times \Omega_{\mathcal{T},0}^{H^0}(P, \mathfrak{g}))$ の切断, それゆえ, $\mathcal{A}_P^{H^s}$ 上の $\Omega_{\mathcal{T},0}^{H^0}(P, \mathfrak{g})$ に値をとる 1 次微分形式とみなされる. 同様に, 対応

$$d_\omega \circ G_{\omega,s}^o : \omega \mapsto d_\omega \circ G_{\omega,s}^o \quad (\omega \in \mathcal{A}_P^{H^s})$$

は, テンソル積バンドル $(\mathcal{A}_P^{H^s} \times \Omega_{\mathcal{T},0}^{H^0}(P, \mathfrak{g})^*) \otimes T \mathcal{A}_P^{H^s}$ の切断とみなされる. $\tilde{\nabla}$ を用いて自然に定義されるこれらのテンソル積バンドルの接続も同じ記号 $\tilde{\nabla}$ で表すことにする.

定理 12.4. $\xi \in T_\omega^\perp(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \cdot \omega) = \mathcal{H}_\omega^A$ と $\mathbf{v} \in T_\omega(\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \cdot \omega) = \mathcal{V}_\omega^A$ に対し, 次式が成り立つ:

$$(12.6) \quad \begin{aligned} A_\xi^\omega(\mathbf{v}) &= (d_\omega \circ G_{\omega,s}^o) \left(\left(\tilde{\nabla}_{\mathbf{v}}(d_\bullet^* \circ \square_\bullet^s) \right) (\xi) \right) \\ &= \int_0^\infty \left(d_\omega \circ (e^{-t\mathcal{D}_\omega^s} - \text{pr}_{\text{Ker } \mathcal{D}_\omega^s}) \right) \left(\left(\tilde{\nabla}_{\mathbf{v}}(d_\bullet^* \circ \square_\bullet^s) \right) (\xi) \right) dt. \end{aligned}$$

特に, ω が既約ならば, 次式が成り立つ:

$$(12.7) \quad \begin{aligned} A_\xi^\omega(\mathbf{v}) &= \int_0^\infty \left(d_\omega \circ e^{-t\mathcal{D}_\omega^s} \right) \left(\left(\tilde{\nabla}_{\mathbf{v}}(d_\bullet^* \circ \square_\bullet^s) \right) (\xi) \right) dt \\ &= \int_0^\infty d_\omega \left(\int_{y \in B} e_\omega^s(t, \cdot, y) \left(\left(\left(\tilde{\nabla}_{\mathbf{v}}(d_\bullet^* \circ \square_\bullet^s) \right) (\xi) \right)_y \right) dv_B \right) dt. \end{aligned}$$

ここで, $e_\omega^s(t, x, y)$ は, $\mathcal{D}_\omega^s$ の熱核 (つまり, $\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{D}_\omega^s$ の核) を表す.

証明 $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \cdot \omega$ の ω における法ベクトル ξ に対し, $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \cdot \omega$ の法ベクトル場 $\tilde{\xi}$ を

$$\tilde{\xi}_{\mathbf{g} \cdot \omega} := (\bar{\xi}_{\mathbf{g} \cdot \omega})_{\mathcal{H}_{\mathbf{g} \cdot \omega}^s} (= \xi_{\mathcal{H}_{\mathbf{g} \cdot \omega}^s}) \quad (\mathbf{g} \in \mathcal{G}_P^{H^{s+1}})$$

によって定義する. ここで, $\bar{\xi}$ は, ξ から定まる定ベクトル場 (つまり, $\bar{\xi}_\omega = \xi$ ($\omega \in A_P^{H^s}$)) を表す. $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \cdot \omega$ 上の曲線 $c_{\mathbf{v}} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{G}_P^{H^{s+1}} \cdot \omega$ で $c'_{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{v}$ となるようなものをとる. 曲線 $c_{\mathbf{v}}$ は, $\mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$ 内のある曲線 $\mathbf{g} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{G}_P^{H^{s+1}}$ を用いて, $c_{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{g}(t) \cdot \omega$ ($t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$) と表せる. このとき, 命題 12.3 を用いて,

$$\begin{aligned} A_\xi^\omega(\mathbf{v}) &= -\tilde{\nabla}_{\mathbf{v}} \tilde{\xi} \\ &= -\left(\tilde{\nabla}_{\frac{d}{dt}}^{c_{\mathbf{v}}} \left(\bar{\xi}_{c_{\mathbf{v}}(t)} - (d_{c_{\mathbf{v}}(t)} \circ G_{c_{\mathbf{v}}(t),s}^o \circ d_{c_{\mathbf{v}}(t)}^* \circ (\square_{c_{\mathbf{v}}(t)})^s) (\bar{\xi}_{c_{\mathbf{v}}(t)})) \right) \right)_{\mathcal{V}_\omega} \\ &= -\left(\tilde{\nabla}_{\frac{d}{dt}}^{c_{\mathbf{v}}} \bar{\xi}_{c_{\mathbf{v}}(t)} \right)_{\mathcal{V}_\omega} \\ &\quad + \left(\left(\tilde{\nabla}_{\frac{d}{dt}}^{c_{\mathbf{v}}} \left(d_{c_{\mathbf{v}}(t)} \circ G_{c_{\mathbf{v}}(t),s}^o \right) \right) \left((d_\omega^* \circ (\square_{c_{\mathbf{v}}(t)})^s) (\xi) \right) \right)_{\mathcal{V}_\omega} \\ &\quad + (d_\omega \circ G_{\omega,s}^o) \left(\left(\tilde{\nabla}_{\frac{d}{dt}}^{c_{\mathbf{v}}} \left(d_{c_{\mathbf{v}}(t)}^* \circ (\square_{c_{\mathbf{v}}(t)})^s \right) \right) (\xi) \right) \\ &\quad + (d_\omega \circ G_{\omega,s}^o \circ d_\omega^* \circ \square_\omega^s) \left(\tilde{\nabla}_{\mathbf{v}} \bar{\xi} \right) \\ &= -\left(\tilde{\nabla}_{\mathbf{v}} \bar{\xi} \right)_{\mathcal{V}_\omega} + (d_\omega \circ G_{\omega,s}^o) \left(\left(\tilde{\nabla}_{\mathbf{v}}(d_\bullet^* \circ \square_\bullet^s) \right) (\xi) \right) \\ &\quad + (d_\omega \circ G_{\omega,s}^o \circ d_\omega^* \circ \square_\omega^s) \left(\tilde{\nabla}_{\mathbf{v}} \bar{\xi} \right) \\ &= (d_\omega \circ G_{\omega,s}^o) \left(\left(\tilde{\nabla}_{\mathbf{v}}(d_\bullet^* \circ \square_\bullet^s) \right) (\xi) \right). \end{aligned}$$

(4 番目の等号は, $\mathcal{H}_{c_v(t)}^A = \text{Ker}(d_{c_v(t)}^* \circ (\square_{c_v(t)})^s)$ を用いて示される.) このように, (12.6) 式の最初の等号が示される. さらに, グリーン作用素 $G_{\omega,s}^o$ が,

$$(12.8) \quad G_{\omega,s}^o = \int_0^\infty (e^{-t\mathcal{D}_\omega^s} - \text{proj}_{\text{Ker } \mathcal{D}_\omega^s}) dt,$$

によって与えられることから, (12.7) 式の 2 つ目の等号が示される.

ω 既約であるとする. このとき, 命題 12.1 により, $\mathcal{D}_\omega^s$ は可逆である. それゆえ, (12.6) 式から, (12.7) 式の 1 つ目の等号が示される. 一方,

$$e^{-t\mathcal{D}_\omega^s} \left(\left(\tilde{\nabla}_v(d_\bullet^* \circ \square_\bullet^s) \right) (\xi) \right)$$

は, 熱方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{D}_\omega^s \right) (u) = 0$$

の初期条件

$$u(0, \bullet) = \left(\tilde{\nabla}_v(d_\bullet^* \circ \square_\bullet^s) \right) (\xi)$$

を満たす解である. それゆえ,

$$\begin{aligned} & e^{-t\mathcal{D}_\omega^s} \left(\left(\tilde{\nabla}_v(d_\bullet^* \circ \square_\bullet^s) \right) (\xi) \right) \\ &= \int_{y \in B} e_\omega^s(t, \cdot, y) \left(\left(\left(\tilde{\nabla}_v(d_\bullet^* \circ \square_\bullet^s) \right) (\xi) \right)_y \right) dv_B \end{aligned}$$

をえる. したがって, (12.7) 式の 2 つ目の等号が示される. $\square$

13 今後の研究計画

この節において, 第 9 節の記号を用いる. G バンドル $\pi: P \rightarrow (B, g_B)$ の H^s 級の Yang-Milles 接続の全体を $\mathcal{YM}_P^{H^s}$ で表す. $\mathcal{YM}_P^{H^s}$ には, $\mathcal{A}_P^{H^s}$ の計量 g_s から誘導される計量 (以下, $\check{g}_s$ で表す) を与えておく.

問題 1. M を G 内の等焦部分多様体として, $\text{hol}_c^{-1}(M)$, $\text{hol}_c^{-1}(M) \cap \mathcal{YM}_P^{H^s}$ が, 各々, $(\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s)$, $(\mathcal{YM}_P^{H^s}, \check{g}_s)$ 内の良い性質をもつ部分多様体になるように, B におけるループ c を適切に選択することはできるのか?

問題 2. B を具体的に与え (例えば, B として, S^n , $\mathbb{CP}^n$ 等を選択する), $\{c_1, \dots, c_k\}$ を $\pi_1(B)$ の最短閉測地線からなる生成系として, $(\text{hol}_{c_1} \times \dots \times \text{hol}_{c_k}) \circ \Delta: \mathcal{A}_P^{H^s} \rightarrow \Pi^k G$ を考える. このとき, $g \in G$ に対し, $(\text{hol}_{c_1} \times \dots \times \text{hol}_{c_k}) \circ \Delta$ の $(g, \dots, g)$ 上のファイ

バー $\text{hol}_{c_1}^{-1}(g) \cap \cdots \cap \text{hol}_{c_k}^{-1}(g)$ ($g \in G$), 及び, その $\mathcal{YM}_P^{H^s}$ との交わり $(\text{hol}_{c_1}^{-1}(g) \cap \cdots \cap \text{hol}_{c_k}^{-1}(g)) \cap \mathcal{YM}_P^{H^s}$ ($g \in G$) は, 各々, $(\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s)$, $(\mathcal{YM}_P^{H^s}, \check{g}_s)$ において, どのような部分多様体になるのか.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{hol}_c^{-1}(M) \cap \mathcal{YM}_P^{H^{s+1}} & & \text{hol}_c^{-1}(M) \\
 \cap & & \cap \\
 (\mathcal{YM}_P^{H^s}, \check{g}_s) & \subset & (\mathcal{A}_P^{H^s}, g_s) \\
 \downarrow \pi^{x_0} & & \downarrow \pi^{x_0} \\
 (\mathcal{YM}_P^{H^s} / (\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0}, \check{g}_s^{x_0}) & \subset & (\mathcal{A}_P^{H^s} / (\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0}, \bar{g}_s^{x_0}) \\
 \cup & & \cup \\
 (\text{hol}_c^{-1}(M) \cap \mathcal{YM}_P^{H^{s+1}}) / (\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0} & & \text{hol}_c^{-1}(M) / (\mathcal{G}_P^{H^{s+1}})_{x_0}
 \end{array}$$

図式 13.1 : G 内のコンパクト部分多様体からえられる
Yang-Miles 接続のモジュライ空間内の
部分多様体

参考文献

- [GP1] D. Groisser and T. H. Parker, The Riemannian geometry of Yang-Mills moduli space, Commun. Math. Phys. **112** (1987), 663–689.
- [GP2] D. Groisser and T. H. Parker, The geometry of the Yang-Mills moduli space for definite manifolds, J. Differential Geom. **29** (1989), 499–544.
- [Ha] R. S. Hamilton, The inverse function theorem of Nash and Moser, Bulltin of the AMS **7** (1982), 65–222.
- [H] E. Heintze, Towards symmetric spaces of affine Kac-Moody type, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., **3**(5-6), (2006) 881–898.
- [HLO] E. Heintze, X. Liu and C. Olmos, Isoparametric submanifolds and a Chevalley-type restriction theorem, Integrable systems, geometry, and topology, 151-190, AMS/IP Stud. Adv. Math. 36, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [KT] C. King and C. L. Terng, Minimal submanifolds in path spaces, Global Analysis and Modern Mathematics, edited by K. Uhlenbeck, Publish or Perish (1993), 253–282.

- [KN] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics 15, Vol. I, II, New York, 1969.
- [K1] N. Koike, On proper Fredholm submanifolds in a Hilbert space arising from submanifolds in a symmetric space, *Japan. J. Math.* **28** (2002) 61–80.
- [K2] N. Koike, The mean curvature flow for invariant hypersurfaces in a Hilbert space with an almost free group action, *Asian J. Math.* **21** (2017), 953–980.
- [K3] N. Koike, Regularized mean curvature flow for invariant hypersurfaces in a Hilbert space and its application to gauge theory, arXiv:math/DG1811.03441 v10.
- [K4] N. Koike, Isoparametric submanifolds in Hilbert spaces and holonomy maps, arXiv:math/DG2206.12566v3.
- [MRT] Y. Maeda, S. Rosenberg and P. Tondeur, The mean curvature of gauge orbits, *Global Analysis in Modern Mathematics* (ed. K. Uhlenbeck), Publish or Perish 1993 pp171–217.
- [N] 野水克己, 現代微分幾何学入門 (基礎数学選書 25), 裳華房, 1981.
- [O’N] B. O’Neill, The fundamental equations of a submersion, *Michigan Math. J.* **13** (1966), 459–469.
- [P] R. S. Palais, *Foundations of global non-linear analysis*, New York, Benjamin, 1968.
- [PaTe] R. S. Palais and C. L. Terng, *Critical point theory and submanifold geometry*, *Lecture Notes in Math.* **1353**, Springer, Berlin, 1988.
- [PiTh] U. Pinkall and G. Thorbergsson, Examples of infinite dimensional isoparametric submanifolds, *Math. Z.* **205** (1990), 279–286.
- [Ta] C. H. Taubes, Self-dual Yang-Mills connections on non-self-dual 4-manifolds, *J. Differential Geom.* **17** (1982), 139–170.
- [Te1] C. L. Terng, Proper Fredholm submanifolds of Hilbert space, *J. Differential Geom.* **29** (1989), 9–47.
- [Te2] C. L. Terng, Polar actions on Hilbert space, *J. Geom. Anal.* **5** (1995), 129–150.
- [TT] C. L. Terng and G. Thorbergsson, Submanifold geometry in symmetric spaces, *J. Differential Geom.* **42** (1995), 665–718.
- [U] K. Uhlenbeck, Connections with L^2 bounds on curvature, *Comm. Math. Phys.* **83** (1982), 31–42.