

Cartier 因子の線型系の底点について

東大 理 藤田隆夫

超曲面の族を与える最も古典的な道具立てに線型系の理論がある。即ち、ある variety V ，その上の line bundle L ，その正則な section のなす線型空間 $H^0(V, L)$ の部分線型空間 Λ が与えられたとしよう。すると各 $\varphi \in \Lambda$ はその零点となるところの V の effective Cartier divisor (= 超曲面) D_φ を定める。こうしてできる族 $\{D_\varphi\}_{\varphi \in \Lambda}$ を線型系と呼ぶ。このような族は Λ を与えれば決まるから線型系自身を表わすのにも Λ なる記号を使うことにする。さて集合 $\bigcap_{\varphi \in \Lambda} D_\varphi$ ，言い代えれば $\varphi \in \Lambda$ の共通零点であるが、これを線型系 Λ の底点集合と呼ぶことにし、 $B_S \Lambda$ で表わそう。この性質を調べることは例えば次のような観点からその重要性がわかる： Λ に basis $\varphi_0, \dots, \varphi_N$ をとり，各 $p \in V$ に対して次なる比 $\{\varphi_0(p) : \dots : \varphi_N(p)\}$ 即ち射影空間 P^N の点を対応させることにより有理写像 $\rho_\Lambda : V \rightarrow P^N$ ができる。 $B_S \Lambda$ は，この ρ_Λ

の不定点の集合になる。また次の定理は特異点の問題との関連を示す：

定理 (Bertini) V が非特異なら, Λ の一般の member の特異点は, $B_S \Lambda$ に含まれる。

この他にも特異点に関する問題と線型系の底点に関する問題との間には *parallel* な関係がいくつか見い出される。とはいうものの、このノートではそれにはあまり触れない。

このノートは線型系の底点の構造を研究していくための一つの試案を説明するためのもので、何らかの *definite* な結果を目的としたものではない。だから、問題や結果を一般的に定式化することよりも、实例に即して説明することに力を注ぎたい。さて線型系の底点が与えられたとき、その構造を調べるための“ものさし”が欲しい。それには次のようなものが望ましいであろう：

- ① $B_S \Lambda$ に付随して定まるある数値 C (以下我々は $B_S \Lambda$ がただ一つの孤立点の場合を問題にする)。底点集合の離散的な性質を問題とする時には、 C は整数値、できるならば自然数値をとるものであってほしい。
- ② 同様の構造の線型系については C は同じ値をとり、逆に同じ値をとる線型系の“タイプ”は高々有限個しかない。
- ③ C がゼロに比較的近いようなタイプのものの構造はよくわ

かり, しかも比較的簡単な構造をもつ。

④ 計算しやすく, *global* な問題にも応用できる. *etc.*

以下このような‘ものさし’として使えるかもしれない量を構成してみる。またどのような条件のもとで線型系 Λ の一般の member が非特異になるかを考えてみたい。

§1. 準備

まず広中理論の一例たる次の結果が重要である。

定理. V を *compact* な *variety*, Λ をその上の *linear system* とする。この時次の条件をみたすような *variety* $V^\#$ とその上の *linear system* $\Lambda^\#$ が存在する。

① 有限個の *varieties* $V_0 = V, V_1, \dots, V_k = V^\#$ 及びその上の線型系 $\Lambda_0 = \Lambda, \Lambda_1, \dots, \Lambda_k = \Lambda^\#$ があって次を満たす。

① 各 $\lambda = 1, \dots, k$ に対して, $B_\lambda \Lambda_{\lambda-1}$ に含まれる $V_{\lambda-1}$ の非特異な *subvariety* C_λ で, V_λ は C_λ を *center* とする $V_{\lambda-1}$ のモイダル変換になっているものがある。

② V_λ における C_λ の逆像たる *Cartier divisor* を E_λ とすると, ある自然数 m_λ に対し $\Lambda_{\lambda-1}$ の V_λ への *pull back* は $m_\lambda E_\lambda + \Lambda_\lambda$ なる形にかけ, Λ_λ の *general member* は E_λ を *component* に持たない。

③ $B_\lambda \Lambda^\# = \emptyset$.

このような pair $(V^\#, \Lambda^\#)$ を (V, Λ) の *admissible*

model free from base points と呼ぶことにする。なお model のとり方は一般には unique ではない。以下, 同様のやり方で model をつくれるような底点集合 (正確には V の subscheme 又は analytic subspace と思う) はすべて同様の構造をしていると考えることにする。

さて簡単のため manifold M 上の linear system Λ であって $B_s \Lambda$ がただ一つの点 p である場合に考察を限ってみる。この時必然的に M_1 は p を中心とする M のモノイダル変換 $Q_p(M)$ となり, Λ の pull back $= m_1 E_p + \Lambda_1$ となる m_1 も一意に定まる。実際 m_1 は Λ の general member (の定義方程式) を p を中心としてテイラー展開した時の最低次の項の次数に等しい。従って

Fact 1. Λ の general member が non-singular になるのは, $m_1=1$ の時で, かつこの時に限る。

しかしこの m_1 は 'ものさし' というにはあまりにお粗末なしろものであって, 例えば $m_1=1$ となる底点の構造には無限個の異なるタイプのものがあるし, また global theory と関連づけるにもこのままでは不便なことが多い。そのため

定義. manifold M 上の linear system Λ が与えられたとする。 Λ の定める line bundle (Λ) の first Chern class $\{ \Lambda \}$ の $n (= \dim M)$ 重 cup product を M 上で「積分」した値を

$d(M, \Lambda)$ で表わす。

さて $d(M, \Lambda) - d(M^\#, \Lambda^\#)$ なる値は $\text{model}(M^\#, \Lambda^\#)$ のとり方によらないことは容易にわかる。また $B_S \Lambda$ がただ一つの点 P からなる時は、この値は見かけ上 M や Λ の global な量に依存しているにもかかわらず、実際には P での局所的なあり様で定まってしまうことも自明であろう。このような場合には、この値 d が不十分ながらもある程度は“ものせし”として使えることを見てみよう。

§2. d の性質

Fact 2. d は正の整数値をとる。

この事実を証明するため少し準備をする。

定義. variety V 上の line bundle L を V の既約な sub-variety に制限したものが常に effective であるならば、 L を semi-positive と呼ぶことにする。従って $B_S |L| = \emptyset$ ならば L は semi-positive である。また任意の semi-positive line bundle の pull back は semi-positive である。

補題. L_1, L_2 を V 上の 2 つの semi-positive line bundles で、 $L_1 - L_2$ が effective だとすると $d(V, L_1) \geq d(V, L_2)$ 。

これは $\dim V$ に関する帰納法により容易に証明できる。

補題. Λ を variety V 上の linear system で、 $B_S \Lambda$ がただ一つの点 P となるものとする。この時 $V_1 = \mathcal{O}_P(V)$ 上の

line bundle $(\Lambda_1) = (\Lambda) - m_1(E_p)$ は semi-positive.

これは定義の条件を直接チェックすればわかる。さてこれらの結果を組みあわせて Fact 2 の精密化たる次の結果を得る。

Fact 3. Λ を manifold M 上の linear system で p がそのただ一つの底点とする。この時 $d \geq m_1^n$ ($n = \dim M$)。

系. $d < 2^n$ ならば, Λ の general member は非特異。

§3. $\dim M = 2$ の場合

以下 isolated base point の 'タイプ' にはどのようなものがあるか, $\dim M$ が小さい場合に見てみよう。まずこの § では $\dim M = 2$ の場合を見る。

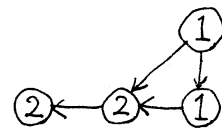
定義. (M, Λ) とその admissible model $(M^\#, \Lambda^\#)$ free from base points に対して次の規則に従って diagram を対応させる。

① blow up の列 $M = M_0 \leftarrow M_1 \leftarrow \dots \leftarrow M_k = M^\#$ の各段階の例外因子 E_λ に対し各一つずつ マルを書く。マルの中には数字 m_λ を書きこむ。

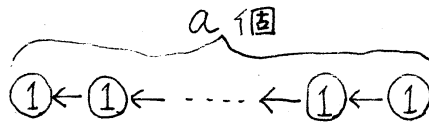
② $\lambda > \mu$ で, E_μ の M_λ における proper transform と E_λ とが交わる場合には, E_λ のマルから E_μ のマルへ矢印を書く。

例 1. $\Lambda = \{\mathbb{C}\varphi_0 + \mathbb{C}\varphi_1\}$, $\varphi_0 = x$, $\varphi_1 = y$ ①

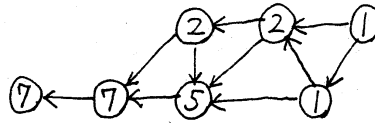
例 2. $\begin{cases} \varphi_0 = x^2 \\ \varphi_1 = y^5 \end{cases}$



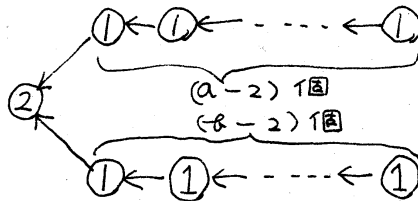
例 3. $\begin{cases} \varphi_0 = y \\ \varphi_1 = x^a \end{cases}$



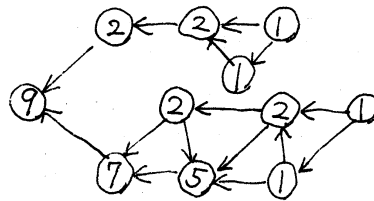
例 4. $\begin{cases} \varphi_0 = y^7 \\ \varphi_1 = x^{19} \end{cases}$



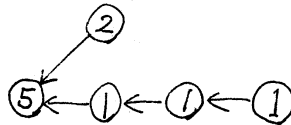
例 5. $\begin{cases} \varphi_0 = x^a \\ \varphi_1 = xy \\ \varphi_2 = y^b \end{cases}$



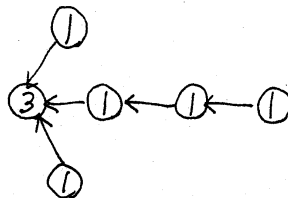
例 6. $\begin{cases} \varphi_0 = x^{21} \\ \varphi_1 = x^2 y^7 \\ \varphi_2 = y^{14} \end{cases}$



例 7. $\begin{cases} \varphi_0 = x^6 - x^4 y \\ \varphi_1 = x^2 y^3 \\ \varphi_2 = y^7 \end{cases}$



例 8. $\begin{cases} \varphi_0 = x^6 \\ \varphi_1 = x^3 - y^3 \\ \varphi_2 = (x-y)x^3 \end{cases}$



まずすぐわかることは

Fact 4. diagram はモデルのとり方によらない。

また次が成立つ:

Fact 5. 同一のマル E_μ に向け矢印の出ているマルを $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots, E_{\lambda_r}$ とするとき $m_\mu \geq m_{\lambda_1} + \dots + m_{\lambda_r}$ 。

これは $M^\#$ における E_p の proper transform と $(\Lambda^\#)$ との intersection number が non-negative なることから出る。実は逆にこのような diagram に対しては対応する isolated base point が存在する。

ドグマ isolated base point の numerical な性質はこの diagram によって完全に決定される。

言い代えと diagram によって決定されないような量は, numerical な量とはみなさないものである。 d はこの見地からすると numerical な量であって, 実際, マルの中に書きこまれた数字の平方の和に等しい。また d を fix した場合には対応する diagram が有限個しかないことは明らかであろう。

§4. $\dim M = 3$ の場合

$\dim M = 3$ となる一般の isolated base point の構造は複雑をきわめ flow up の様子を詳細に調べることはきわめて困難である。そこでいくつかの簡単な‘タイプ’のものについて述べよう。まず $m_1 = 1$ となる場合を調べておく。

補題. M_1 上の linear system $\Lambda_1 = \Lambda_{M_1} - m_1 E_p = \Lambda_{M_1} - E_p$ の底点集合は, $E_p (\cong \mathbb{P}^2)$ 内の linear subspace である。

⊙ x, y を $B_s \Lambda_1$ の異なる2点とすると, E_p 内でこの2点を結ぶ line ^(ℓ) をとり, その $M^\#$ での proper transform を $\tilde{\ell}$ とすれば, $\ell \in B_s \Lambda_1$ なるば $(m_2 E_2 + \cdots + m_k E_k) \tilde{\ell} \geq 2$, $E_1 \tilde{\ell} = -1$

より $(\Lambda^\#)\tilde{\mathcal{L}} = -(m_1 E_1 + m_2 E_2 + \dots + m_n E_n)\tilde{\mathcal{L}} < 0$ となって矛盾する。従って $\mathcal{L} \subset B_S \Lambda_1$ であり、故に $B_S \Lambda_1$ は linear。

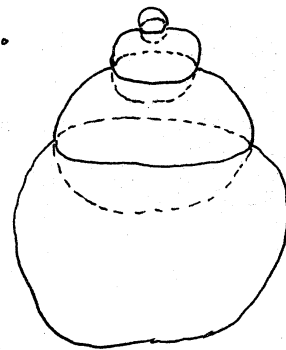
さて $B_S \Lambda_1$ がただ一つの点 P_2 であったと仮定しよう。この時必然的に $M_2 = \mathbb{Q}_{P_2}(M_1)$, また $\Lambda_2 = \Lambda_1 - E_{P_2}$ なることも容易にわかる。

補題. $B_S \Lambda_2$ と $E_1 = E_P = E_{P_1}$ の M_2 における proper transform $\tilde{E}_{P_1}$ とは交わらない。従って $B_S \Lambda_2$ は有限個の点。

① 交点 x があつたとする。このとき $E_{P_1} \subset M_1$ 内の line l でその M_2 における proper transform が x を通るようなものをとると、先の補題の時と同様に $(m_3 E_3 + \dots + m_n E_n)\tilde{\mathcal{L}} \geq 1$, $E_{P_2}\tilde{\mathcal{L}} = 1$, $E_{P_1}\tilde{\mathcal{L}} = -1$ より $(\Lambda^\#)\tilde{\mathcal{L}} < 0$ となり矛盾する。さて $B_S \Lambda_2$ は $E_{P_2} \cong \mathbb{P}^2$ 内の linear subspace であり、 $\tilde{E}_{P_1} \cap E_{P_2}$ はこの中の hyperplane になっていることから、 $B_S \Lambda_2$ はただ一つの点となるか又は $\emptyset$ であることがわかる。

かくてこの型の場合には点を中心とする blow up を有限回行なうことによって底点解消モデルが作れる。

右の絵は、4回目の blow up を終えたところの状況の想像図である。



さて Λ の general member D は non-singular であるが、 Λ の D への制限 Λ_0 の孤立底点 P のタイプは $\textcircled{1} \leftarrow \textcircled{1} \leftarrow \dots \leftarrow \textcircled{1}$ なる diagram によ

って表わされる。

さて次は $B_S \Lambda_1$ が $E_{P_1} \cong \mathbb{P}^2$ 内の line l_2 になる場合を考えてみよう。この時は $M_2 = Q_{l_2}(M_1)$ としてよく、また $\Lambda_2 = \Lambda_1|_{M_2} - E_{l_2}$ なることも容易にわかる。では $B_S \Lambda_2$ は E_{l_2} 内のいかなる部分空間になっているであろうか。ところで E_{l_2} は $l_2 \cong \mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^1$ -bundle になっているが、これは l_2 の M_1 に対する normal bundle から自然に構成されるものと一致する。また M_2 上の line bundle (E_{l_2}) を E_{l_2} に制限したものはいわゆる tautological line bundle に一致する。 l_2 の M_1 に対する normal bundle は degree が 1 と -1 の 2 つの line bundle の直和であるので、これらのことより容易に次が得られる：

$$E_{l_2} \cong \Sigma_2 = \{((\xi_0 : \xi_1 : \xi_2), (\xi_0 : \xi_1)) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid \xi_0 \xi_1^2 = \xi_1 \xi_0^2\}$$

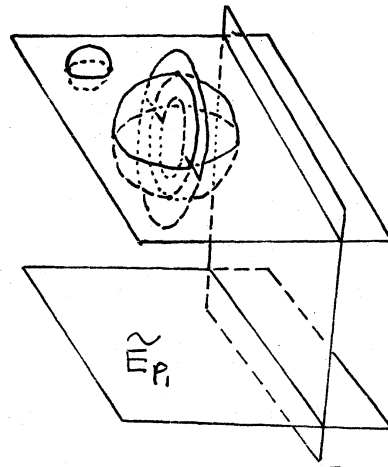
$$(E_{l_2})|_{E_{l_2}} = -H_\xi + H_\zeta, (\Lambda_2)|_{E_{l_2}} = H_\xi. \text{ 但しここで } H_\xi \text{ は } \{\xi_0 = 0\} \text{ なる式で定義される divisor の定める line bundle であり, } H_\zeta \text{ も同様である。}$$

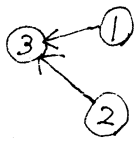
補題. $B_S \Lambda_2$ は $E_{l_2} \cap \tilde{E}_{P_1} = \{\xi_0 = \xi_1 = 0\}$ とは交わらない。
 また $E_{l_2} \rightarrow l_2$ の各 fiber との支わりは高々 1 点でしかもそれは transversal になる。従って、 $B_S \Lambda_2$ は、 $|H_\xi|$ に属する curve となるか、又は有限個の点となる。いずれの場合にも m_3 は 1 となる。

証明は先の補題同様であるので省略する。さてこうして次

らと議論をくり返すと次の結論が得られる:

Fact 6. $m_1 = 1$ の時は点又は $\mathbb{P}^1$ と同型な curve を center とするモノイダル変換を何度か適当に交互に行なうことによりモデルが構成できる。その様子は Λ の非特異 member D 上の linear system Λ_D の base point P に対応する diagram によって知ることができる。



右の絵は, diagram  に対応する flow up の様子を模式的に表わした想像図である。 M_3 までは curve の flow up が続く。 $B_S \Lambda_3$ は異なる 2 点となる。

一方は 1 回 flow up すれば消える。他方は, χ の点を center とする flow up のあと, 再び curve の flow up を一回行なうことによって model ができる。

以上によ, て $m_1 = 1$ の場合の様子はおおむねわかった。一般に $\dim M \geq 4$ の時も $B_S \Lambda_1$ が curve ないし point になるならば同様の結果が得られる。

ところが $m_2 = 2$ の場合には既に相当複雑な状況が現われてきてすっかりとはしない。この時 $B_S \Lambda_1$ は次の 6 つのうちのどれかになる: ア) $\emptyset$, イ) 1 点, ウ) 2 点², エ) $E_P \cong \mathbb{P}^2$ 内の line, オ) 1 点で交わる 2 本の line, カ) 非特異 2 次曲線。これらのう

ちエ)型を除く他の5つの型についてはこれまでと同様のやり方で構造を調べ分類することができる。エ)型ではしかし単純にはできない。エ)型以外の場合、また $m_1 = 1$ の場合においては、*blow up* のやり方は、*unique* ではないにしても、ある標準的なやり方が存在することが容易にわかるのだが、エ)型の場合にはどうもそうはいかないようである。けれども、Fact 3. の証明と同様にして、そうした複雑な構造のものでは d の値がかなり大きくなってしまうことが示せる。特に

Fact 7. $d \leq 27$ なる *isolated base point* の型はすべて *explicit* に記述することができる。

勿論この27という数字には大して深い意味はない。また

Fact 8. Λ の *general member* D の p での特異性が *ordinary double point* であるなら、このような Λ の型はよくわかる。
(実際エ)型ないしオ)型にはならない。)

Appendix.

当日は次のような話題に触れた。

Def. p が manifold M 上の linear system Λ の唯一の base point であるとし, $(M^\#, \Lambda^\#)$ を (M, Λ) の model とする。 $\pi: M^\# \rightarrow M$ を自然な写像とし, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_M(\Lambda)$, $\mathcal{L}^\# = \mathcal{O}_{M^\#}(\Lambda^\#)$ とおく。すると $\chi(p, \Lambda; t) = \chi(M, \mathcal{L}^{\otimes t}) - \chi(M^\#, \mathcal{L}^{\# \otimes t})$ は t に関して高々 $n = \dim M$ 次の多項式となり,

$$\chi(p, \Lambda; t) = \sum_{\mu=0}^n \frac{1}{\mu!} \chi_\mu(p, \Lambda) t^{[\mu]}, \quad t^{[\mu]} := \prod_{j=0}^{\mu-1} (t+j),$$

と展開されるが、実はこの係数 $\chi_\mu(p, \Lambda)$ は p の近傍での Λ の様子のみによつて定まる整数であり、 M と $M^\#$ との間の差に関する “relative な” Chern class によつて計算できる。また一般に $\chi_0(p, \Lambda) = 0$, $\chi_n(p, \Lambda) = d(p, \Lambda)$ が成立ち、 $\rho_a(p, \Lambda) = -\chi_1(p, \Lambda)$ は Λ の general member が p で持つ singularity で定まる量で、 Λ そのものにはよらない。

さて $g: \pi_* \mathcal{L}^\# \rightarrow \mathcal{L}$ を canonical な sheaf homomorphism とするとき、 $\text{Coker } g$ は p にのみ support を持ち有限次元ベクトル空間とみなせる。その次元は model のとり方によらない量であり、以下 $\kappa^0(p, \Lambda)$ で表わす。 $R^g \pi_* \mathcal{L}^\#$ ($g \geq 1$) についても同様でその次元を $-\kappa^g(p, \Lambda)$ で表わす。すると

$$\text{Fact. A1. } \sum_{g=0}^{\infty} (-1)^g \kappa^g(p, \Lambda) = \sum_{\mu=1}^n \chi_\mu(p, \Lambda).$$

$$\text{Fact. A2. } \kappa^g(p, \Lambda) = 0 \text{ for } g \geq n-1. \quad \text{証明は共に容易。}$$