

Multiplicative η -products について

東大教養 近藤 武 (Takeshi Kondo)

本講は、实例に就き、理論的なものではない。紙数の関係で、保型函数論的な説明は省略し、とくに §2 で定義する 2 つの変換については、極めて形式的に論ずる。詳しくは文献 [5] を参照せよ。

§1. Multiplicative η -products の基本的实例.

1.1 便宜のため、次の記号を用いる。シンボル

$$\pi = \prod_{t=1}^{\infty} t^{r_t} \quad (r_t \in \mathbb{Z})$$

は、有限個の t を除いて $r_t = 0$ のとき、generalized permutation と呼ばれる。

$$\deg(\pi) = \sum_t t r_t$$

$$\text{ord}(\pi) = \text{L.C.M. of } \{t \mid r_t \neq 0\} \text{ 最小公倍数}$$

$$\text{wt}(\pi) = \frac{1}{2} \sum_t r_t$$

とおく。 $\text{wt}(\pi)$ は、integer または half-integer である。

gen. perm. $\pi = \prod_t t^{r_t}$ に対応して、有理式 $\prod_t (x^t - 1)^{r_t}$

を対応させ、これが多項式となるとき、 π は Frame shape
~~と呼ばれる~~と呼ばれる。この多項式は、明らかに有理整係数の最
 高次の係数は1、しかも根は全て1の ℓ べき根である。逆にこ
 のような多項式は、 $\prod_t (x^t - 1)^{r_t}$ の形に (一意的に) 書き表
 され、したがって Frame shape $\prod_t t^{r_t}$ が対応する。

1.2. $\eta(z)$ を Dedekind η -関数とする:

$$\eta(z) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \quad q = e^{2\pi i z}$$

$$\text{gen. perm. } \pi = \prod_t t^{r_t} \quad 1 \leq t \leq \ell$$

$$\eta_{\pi}(z) = \prod_t \eta(tz)^{r_t}$$

とおく。 π が

$$(1) \quad \deg(\pi) = 0 \text{ or } 24$$

$$(2) \quad \text{wt}(\pi) \text{ が 正の整数}$$

をみたすとする。 (1) により、 $\eta_{\pi}(z)$ は

$$\eta_{\pi}(z) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots \quad (a_n \in \mathbb{Z})$$

と、 q のべき級数に展開されるが

$$(3) \quad a_1 \neq 0$$

$$(4) \quad (m, n) = 1 \implies a_1 a_{mn} = a_m a_n$$

をみたすとき、 $\eta_{\pi}(z)$ は multiplicative η -product
 と呼ばれる。簡単にたの " π が multiplicative" などと

いう方もする。

1.3. 注目すべきことは、Leech lattice の自己同型群 $\cdot O$ から、次のように 12 mult. η -products の実例が得られることである。Leech lattice は、 24 次元ユークリッド空間の lattice であり、 $\cdot O$ は自然数 $\mathbb{N}$ 上の 24 次元表現 ρ_0 をもつ。 $\cdot O \ni \sigma$ に対して、固有多項式 $\det(xI - \rho_0(\sigma))$ を考えよと、この多項式は 1.1 で説明したようにして、Frame shape $\prod_{+} x^{r_{+}}$ が対応する。あまり複雑な書き方はないが、便宜のため

$$\sigma = \prod_{+} x^{r_{+}}$$

のような書き方をする。さて、 $\cdot O$ は 168 個の共役類をもつが、異なる形の Frame shape は 160 個生ずる。このうち 90 個は、 $\text{wt}(\sigma) = 0$ (i.e. $\sum r_{+} = 0$) であり、他の 70 個は、 $\text{wt}(\sigma)$ が正整数 (i.e. $\sum_{+} r_{+}$ が正の偶数) となる。

$\cdot O$ の Frame shape は、[4] の Table I が与えられているので参照されたい。この著しい事実は、次の定理が成立することである。

定理. (1) $\text{wt}(\sigma) = 0$ とする。 $\eta_0(z) = \prod_{+} \eta(1+z)^{r_{+}}$ は次の性質をもつ：或る $\Gamma_0(N)$ を含む genus 0 の Fuchs 群が存在して、 $\eta_0(z)$ は対応する虚数域の生成元である。

(2) $\text{wt}(\sigma) > 0$ ならば、 $\eta_0(z)$ は multiplicative である。

3.

(1) 12711215, 以下本講ではふれないが, 明らかに有限群の "moonshine" と密接に関連している。(cf. [1], [4])。 (2) の主張は, 部分的には何人かの人によって知られていたが, 全部をもちんと確かめたのは, 小池正夫氏である (cf [3])。

参考のため, (2) の内容をもう少し説明しよう。 $wt(\sigma) > 0$ かつ 0 の元 σ の Frame shape $\sigma = \prod_{+} x^{r_x}$ は,

$$r_x \geq 0 \quad (x) \Rightarrow \text{Type C}$$

$$r_x < 0 \quad (x) \Rightarrow \text{Type E}$$

と呼ばれる。 Type C の Frame shape は, 25 個存在するが, そのうち 21 個は, 24 次 Mathieu 群の元を cycle 分割したものに該当する:

$$1^{24}, 1^8 2^8, 2^{12}, 1^6 3^6, 3^8, 1^4 2^2 4^4, 2^4 4^4, 4^6, 1^4 5^4, 1^3 2^3 6^2, \\ 6^4, 1^3 7^3, 1^2 2 \cdot 4 \cdot 8^2, 2^2 10^2, 1^2 11^2, 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 12, 12^2, 1 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 14, \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 15, 3 \cdot 21, 1 \cdot 23 \quad (\text{計 } \pm 21 \text{ 個})$$

他の 4 個は,

$$2^3 6^3, 4^2 8^2, 4 \cdot 20, 2 \cdot 22$$

である。これら 25 個の $\eta_0(z)$ は primitive cusp form となり, $\gamma < 12$ multiplicative である (cf Koike [2])。

Type E の Frame shape は $45 (= 70 - 25)$ 個存在する

が、これは全2具体形は Eisenstein series と区別され
 ね、これは $\eta_0(z)$ が multiplicative であることが分る
 (cf [3] の Table I)。例として $\sigma = 2^{16}/8$ とすると、

$$\eta_0(z) = E(z) - E(2z)$$

$$E(z) = \frac{1}{240} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \quad a_n = \sum_{d|n} d^3$$

である。

1.4. 0 の元の Frame shape に対するものは、
 mult. η -products の使用は、文献の中に多数見出される。

例 1. $3^2 9^2, 6.18, 8.16$

$$\frac{4^{16}}{2^8 8^4}, \frac{8^8}{4^2 16^2}, \frac{4^5 8^5}{2^2 16^2}.$$

最初の3つは、Jacobi 形式知られておらずであり、上を
 引用した Koike [2] にも扱われていない。5, 6番目のもの
 もその中に見出される。最後のものは、本年1月小池氏に指
 摘されたものである。今までの例は、全て degree が24のもの
 であり、 $\deg(\pi) = 0$ の例を1つあげておこう：

例 2. $\pi = 2^{10}/444$ とすると

$$\eta_{\pi}(z) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$$

ここで a_n は、 $x^2 + y^2 = n$ の整数解の数が $\sum_{d|n} \chi(d)$

$$a_n = \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ odd}}} (-1)^{\frac{d-1}{2}}$$

と書ける。これから $\eta_{\pi}(z)$ が mult. η -product であることが分る。なお、上の等式の最初の等式は、古典的な公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} = \theta_3(2\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1})^2$$

を変形したもので、 $\pi = 0$ の等式は自明である。

このほかにも、mult. η -products の実例は多数存在するが、それらと $\cdot 0$ の元の Frame shape に対応するものと関係を探るための、本講の目的がある。

§2. W-変換と T-変換.

2.1. 上記の目的のため、2種類の変換を考へる。一般に、gen. perm $\pi = \prod_{\star} t^{\nu_t}$ と正整数 Q に対して、

$$(5) \quad \pi * Q = \prod_{\star} \left(\frac{Q + t}{(Q, t)^2} \right)^{\nu_t}$$

とおく。 (Q, t) は Q と t の最大公約数を表す。 π かつ、(1), (2) をみたすとき、(i.e. $\deg(\pi) = 0$ または 24 かつ $\text{wt}(\pi) = \text{正整数}$) 次の条件をみたす最小の自然数 N をとる：

$$(6) \quad \text{ord}(\pi) \mid N \quad \text{i.e.} \quad \star \mid N \quad \text{if } \nu_{\star} \neq 0$$

$$(7) \quad \sum_{\star} \frac{N}{\star} \nu_t \equiv 0 \pmod{24}$$

$$(8) \quad D_{\pi} \mid N. \quad \text{ここで } D_{\pi} \text{ は、体 } \mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{\text{wt}(\pi)} \prod_{\star} t^{\nu_t}})$$

の判別式を表す。ここで、 $\prod_{\star} t^{\nu_t}$ は有理数と見て

いる。

N の約数 $Q > 1$ かつ $(Q, \frac{N}{Q}) = 1$ を満たす Q に対して変換 (5) を考える。このとき

$$\pi * Q = \pi * W_{Q,N}$$

と書く。このような変換を W -変換という。これは、保型関数論の Atkin-Lehner の変換と呼ばれるものの一つであり、これについては、[1], [4], [5] を参照。

注意。 $\omega(\sigma) > 0$ なる $\cdot 0$ の元 σ に対して、 $\sigma * W_{Q,N}$ は再び $\cdot 0$ の元の Frame shape であり、 $\deg(\sigma * W_{Q,N}) = 0$ である。また次の定理が成立すると思われる：

“定理” π を (1), (2) を満たす gen. perm とする。 $\eta_\pi(x)$ が multiplicative ならば、 $\eta_{\pi * W_{Q,N}}(x)$ も multiplicative。

この命題は、現在の所証明されておらず、本稿で述べられている事例に対しては正しい。なお [5; Th 2.2] を参照。

(と ~~§~~ 本稿の §3.4)

さらにもう一つの変換を考える。gen. perm. $\pi = \prod_t t^{r_t}$ に対して、非負整数 e を次のように定める：

$$2^e \mid t \quad (\forall t \text{ with } r_t \neq 0)$$

$$2^{e+1} \nmid t \quad (\exists t \text{ with } r_t \neq 0)。$$

このとき、

$$\pi * T = \prod_{2^{24}|t} t^{r_t} \cdot \prod_{2^{24}|t} \frac{(2t)^{3r_t}}{t^{r_t} (4t)^{r_t}}$$

とある。このとき,

$$\eta_{\pi * T}(z) = c \eta_{\pi}\left(z + \frac{1}{2^{24}}\right) \quad (c \text{ は定数})$$

が容易に示され, これを用いて次の定理が得られる。

定理 $\eta_{\pi}(z)$ が multiplicative ならば, $\eta_{\pi * T}(z)$ もそうである。

注意. 上で定義した W -変換と T -変換は, ともに involutive な変換である: $\pi * W^2 = \pi * T^2 = \pi$ 。

2.2. この注意したいことは, mult. η -products の知られている実例の殆んど全ては, $\cdot 0$ の元 Γ の Frame shape に W -変換, T -変換をほどこして得られると云うことである。

例 3. (1) $\sigma = 1^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8^2$ (M_{24} の π) とする。

$$1^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8^2 \xrightarrow{T} \frac{2^7 8^2}{1^2 4} \xrightarrow{W_{16,16}} \frac{2^2 8^7}{4 \cdot 16^2} \xrightarrow{T} \frac{4^5 8^5}{2^2 16^2}$$

となり, §1.4 例 1 にあげた $\frac{4^5 8^5}{2^2 16^2}$ が $\cdot 0$ の元 $1^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8^2$ から得られる。なお σ に W -, T -変換をほどこして得られ

3 のは, これら 4 つだけがあることに注意された。

(2) $\cdot 0$ の元として $\sigma = \frac{8^4}{4^2}$ とすると,

$$\frac{8^4}{4^2} \xrightarrow{W_{8,8}} \frac{1^4}{2^2} \xrightarrow{T} \frac{2^{10}}{1^4 4^4}$$

となり, §1.4 §3.1 2 7 だけ $\frac{2^{10}}{1^4 4^4}$ が $\cdot 0$ の元 $\frac{8^4}{4^2}$ から得られる。なお

$$\frac{8^4}{4^2} \xrightarrow{T} \frac{4^2 16^2}{8^2}$$

も mult. η -product であり, $\frac{8^4}{4^2}$ に W -, T -変換をほどこして得られるのは, ことに現われる 4 つだけである。

注意. $\cdot 0$ の元 σ ($\text{wt}(\sigma) > 0$) には W -, T -変換をほどこして得られる gen. perm は有限個がある。このようにして, $\cdot 0$ の元の Frame shape に対応する mult. η -products から, 226 個の mult. η -products の実例が得られ, 知られた例の殆んど全ては, この中に包含される。これら 226 個を $\cdot 0$ に associate した mult. η -product と呼ぶことにしよう。

§3. $\cdot 0$ の元は associate した mult. η -products

3.1 $\cdot 0$ の元は associate した mult. η -products の例としては, §1.4 §3.1 1 7 だけ

$$3^2 9^2, 6.18, 8.16$$

がどのようなものである。これは、 $\cdot 0$ の元から、 W 、 T 変換をほいこしは得られぬが、

$$(3^2 9^2)^3 = (6.18)^6 = 1^6 3^6, \quad (8.16)^8 = 1^8 2^8$$

(置換としてのベキをとるといふ)

で、 $1^8 2^8, 1^6 3^6$ は M_{24} の元の cycle 分解であり、 π の上では、 $\cdot 0$ の元は置換に属してゐる。

3.2. 上の3つのほかにも、 $\cdot 0$ に associate した mult. η -products があるかどうかを調べるために次の問題を考へよう：

問題. Π_{24} を degree 24 の Frame shape 全体の集合 (i.e. 次数24の有理型群は、 π が全21の心を持つような対称式全体の集合) とする。 $\Pi_{24} \ni \pi = \prod_{\lambda} \lambda^{r_{\lambda}}$ に対し、 $\eta_{\pi}(z) = \prod_{\lambda} \eta(\lambda, z)^{r_{\lambda}}$ が mult. η -product となるのはどんな π か？

この問題に対する答は、次の定理である。

定理. $\eta_{\pi}(z)$ ($\pi \in \Pi_{24}$) が multiplicative とする。

I. $\omega(\pi)$ が偶数ならば、次の1つが成立つ：

(i) π は $\cdot 0$ の元の Frame shape が、これは associate したものである。

(ii) $\left. \begin{array}{l} 3^2 9^2, 8.16, 6.18 \text{ のどれか} \\ \pi \text{ は,} \end{array} \right\}$

(iii) π は、次の 6 つのうちのとれか：

$$1^3 6^5 / 2^3 \cdot 3 \sim 2^5 12^3 / 4 \cdot 6^3$$

$$2^2 \cdot 3^2 18^2 / 1 \cdot 6^2 \cdot 9$$

$$3^3 \cdot 18^2 / 6^2 \cdot 9 \sim 2^2 \cdot 12^3 / 4 \cdot 6^2$$

$$1 \cdot 3 \cdot 4^4 24^2 / 2^2 8^2 12^2$$

$\sim$ は W -, T -変換が互いに後れりことを示す。

II $\text{ord}(\pi)$ が half-integer ならば、 π は次の 9 つのうちのとれか：

$$6^5 / 3^2 \sim 3^3 12^2 / 6, \quad 8^3$$

$$16^2 / 8 \sim 8 \cdot 3^2 / 16, \quad 24$$

$$3 \cdot 18^2 / 6 \cdot 9 \sim 6^2 \cdot 9 \cdot 36 / 3 \cdot 12 \cdot 18 \sim 8^2 \cdot 48 / 16 \cdot 24$$

この定理の証明は、計算機を用いて行われた。もともとは、パソコン (NEC-PC9801 F2) を用いて、 $\text{ord}(\pi) < 100$ ($\pi \in \Pi_{24}$) なる π に対して上の定理が成り立つことを確かめたのであるが、一橋大学の山田裕理氏が大型計算機を用いて、全ての $\pi \in \Pi_{24}$ に対して上の定理が成り立つことを証明した。なお、 $|\Pi_{24}| = 195,966$ であり、このうち $\text{ord}(\pi) < 100$ なるものは 60,914 個である。また multiplicative η -products を与える $\pi \in \Pi_{24}$ (i.e. 上の定理に現れるもの) は、全部で 101 個である。

3.3. 証明の概要を述べる。自然数 n に対し π_n を 1 の原始 n 乗根を根とする円分多項式の Frame shape とする。

良く知られているように

$$\deg(\pi_n) = \varphi(n)$$

$$\pi_n = \prod_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

である。ここで φ , μ は Euler 関数, Möbius 関数である。さて, 次の不定方程式を考へる:

$$\sum_{n=1}^{90} \varphi(n) u_n = 24$$

ここで $\varphi(n) \leq 24$ ならば $n \leq 90$ があることは注意されたい。

この方程式の非負整数解 $(u_1, u_2, \dots, u_{90})$ に対して

$$(*) \quad \pi = \pi(u_1, u_2, \dots, u_{90}) = \pi_1^{u_1} \pi_2^{u_2} \dots \pi_{90}^{u_{90}}$$

とあると, $\pi \in \Pi_{24}$ であり, 逆に $\pi \in \Pi_{24}$ の Frame shape π は, 全てこのようにして得られる。(*) によつて得られる π に対して, $\eta_\pi(z) \in \mathbb{C}$, このフーリエ展開

$$\eta_\pi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \quad (a_1 = 1)$$

の係数 a_n は $1 \leq n \leq 21$ に対して計算し,

$$(**) \quad a_{mn} = a_m a_n \quad (m, n) = 1, \quad 1 \leq m, n \leq 21$$

が成り立つようた π を探す。もちろん, このようた $\eta_\pi(z)$ は mult. η -product の候補者にはかゝらないが, 以下が実際

に, mult. η -products を与えるかどうかは, 次のようにして
 確かめる。なお, 幸いながらこのように候補者の数は,

115,966 個の Π_{24} の元のうち, 189 個にしかならない。

さて, このうちの 189 個の元に対して, 次の条件をみたすか
 どうかを確かめるのが有益である:

(#) $\text{ord}(\pi) \mid N$ なる自然数 N が存在して, $Q > 1$
 $(Q, \frac{N}{Q}) = 1$ なる N の ~~任意~~ 素因数 Q に対して,
 $\deg(\pi * Q) > 0$ または 24.

この条件 (#) は, 一般の gen. perm ($\deg(\pi) = 0$ または 24 かつ
 $\text{wt}(\pi) = \text{正整数}$) に対して, $\eta_\pi(x)$ が multiplicative
 であるための必要条件があると思われる。あるいは次の定理
 が成り立つと思われる:

"定理" $\eta_\pi(x)$ が multiplicative なら π は (#) を
 みたす。(参. [5] Th 2.2)

これは証明されていいるわけではなかつ, (**) をみたす $\pi \in$
 Π_{24} が, (#) をみたさないときは, $n > 21$ なる a_n を計算し
 て見ると, 147 と 151 が (これら二つの a_n の和を偶数 n が)
 隣接の素数 $a_{mn} = a_m a_n$ が成立 (なかつ) ことが確かめら
 れる。 $\pi \in \Pi_{24}$ が (#) をみたせば, これは既知のものか定理
 の (iii) をみたすものかであり, 後者は具体的な Eisenstein

series と同一型である, したがって multiplicative であることが分る。詳しくは, [5] の §3 を参照された。

3.4. 最後は §2.1 (p.7) と上で述べた 2 つの "定理" (予題) について注意しておく。これらの予題は, 次の節と密接に関連している:

問題. $\pi \in (1), (2)$ を与え, gen. perm. である $\eta_\pi(z)$ が multiplicative である。このとき $\eta_\pi(z)$ は cusps (i.e. 有理数 $z \in \mathbb{Q}$) 上で holomorphic か? この問題が真ならば, 上の 2 つの予題が正しいことは, 小池正夫氏により確かめられている。なお, (1), (2) を与え, (multiplicative とは限らない) gen. perm. π に対して $N \in (6), (7), (8)$ を定めよと

$$\eta_\pi\left(\frac{az+b}{cNz+d}\right) = \chi(d) (cNz+d)^{wt(\pi)} \eta_\pi(z)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$$

χ は $\mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{wt(\pi)}} \prod_{p|N} p^{r_p})$ の Dirichlet 指標 (cf. [5] Th 2.1)

が成り立つが, 一般にはこの $\eta_\pi(z)$ が $\Gamma_0(N)$ の cusp 上で (meromorphic ではなく) holomorphic とは限らない。上の問題は, 「 $\eta_\pi(z)$ が multiplicative ならば,

$P_0(N)$ の各 cusp 上 holomorphic ψ に対し $z \mapsto \eta_\pi(z)$ は
 (level N , weight $wt(\pi)$, character χ) modular
 form である。と主張している。

文 献

- [1] J.H. Conway and S.P. Norton, Monstrous moonshine, Bull London Math. Soc., 11 (1979), 308-339
- [2] M. Koike, On Mackay's conjecture, Nagoya Math. J., 95 (1984), 85-90.
- [3] M. Koike, Moonshines of $PSL_2(\mathbb{F}_8)$ and the automorphism group of Leech lattice, to appear in Japanese Journal.
- [4] T. Kondo, The automorphism group of Leech lattice and elliptic modular functions, J. Math. Soc. Japan, 37 (1985), 337-362
- [5] T. Kondo, Examples of multiplicative η -products, 東大数表系要 近刊.