

$H^\infty(m)$ の w^* maximality に ついて

和歌山人 教育 貴志 一男

§1. 序

A を compact Hausdorff space X 上の uniform algebra, $\mathcal{M}(A)$ を A の maximal ideal space とする. 又 $m \in \mathcal{M}(A)$ の表現測度は unique (これをまた m で表わす), m を含む Gleason part $P(m)$ は nontrivial ($P(m) \neq \{m\}$) であるとする. また A の $L^\infty(m)$ w^* closure を $H^\infty(m)$ で表わす.

§3 では $H^\infty(m)$ が $L^\infty(m)$ の w^* closed subalgebra として maximal であるときの $H^\infty(m)$, $\mathcal{M}(H^\infty(m))$ の二, 三の性質 (定理 A, B), §4 では $H^\infty(m)$ が $L^\infty(m)$ の w^* closed subalgebra として maximal である条件 (定理 C. 特に, $H^\infty(m)$ が $L^\infty(m)$ の w^* closed subalgebra として maximal である必要十分条件は $f \in H^\infty(m)$, $f \neq 0$ のときは $\int \log |f| dm > -\infty$ である) を述べる.

§2. 準備

X を compact Hausdorff space, A を X 上の uniform algebra, $M(A)$ を A の maximal ideal space とする. $m \in M(A)$ の表現測度は unique (これをまた m で表わす), A の $L^p(m)$ norm closure ($p=\infty$ のときは w^* closure) を $H^p(m)$ と書く. $H^\infty(m)$ の Gelfand 表現 $\hat{H}^\infty$ を $L^\infty(m)$ の maximal ideal space $\tilde{X}$ 上に制限したとき, これを $\tilde{H}^\infty$ で表わす. $\tilde{H}^\infty$ は $\tilde{X}$ 上の logmodular algebra である. すなわち $L_R^\infty = \log |(H^\infty)^{-1}|$ または $C_R(\tilde{X}) = \log |(\tilde{H}^\infty)^{-1}|$ である.

$f \in H^p(m)$, $\int \log |f| dm = \log |\int f dm| > -\infty$ なる関数を outer, $f \in H^p(m)$, $|f|=1$ a.e. (m) なる関数を inner という. 以下では, m を含む Gleason part $P = P(m)$ は

$$P(m) \cong \{m\}$$

とする. $\varphi \in P(m)$ の表現測度も unique であるのでこれを $d\varphi$ で示すことにする.

$m \in M(H^\infty(m))$ を含む Gleason part P 上 $f_0 = f_0(m)$ と示すと f_0 は nontrivial である. $\tilde{m}(\tilde{f}) = \int \tilde{f} d\tilde{m}$ ($\tilde{f} \in H^\infty(m)$) におけると $\tilde{m} \in M(\tilde{H}^\infty)$ である. $\tilde{m}$ を表現する測度が一意に定まる. これをまた $\tilde{m}$ で示す. すなわち $\tilde{m}(f) = \int_{\tilde{X}} \tilde{f} d\tilde{m} = \int_X f dm = m(f)$. $f \in H^p(m)$ に対して $\hat{f}(\varphi) = \int f d\varphi$ ($\forall \varphi \in P(m)$) とおく.

「定理 (Wermer) $P(m) \cong \{m\}$ とすると次の性質をもつ

inner function Z が存在する.

$$1) \quad Z H^2(m) = H_m^2, \quad H_m^2 = \{f \in H^2(m); \int f dm = 0\}.$$

2) $\hat{Z}$ は P を $\Delta = \{\lambda; |\lambda| < 1\}$ 上へ 1 対 1 に写像し,
 $\hat{Z}^{-1}$ は (w^*) -continuous である.

$$3) \quad f \in H^2(m) \text{ のとき, } \hat{f}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n \quad (\forall y \in P(m))$$

$$\lambda = \hat{Z}(y), \quad a_n = \int \bar{Z}^n f dm.$$

Z についての多項式の $L^p(m)$ -norm closure を $\mathcal{H}^p$, Z と $\bar{Z}$
 についての多項式の $L^p(m)$ -norm closure を $\mathcal{L}^p$ と示す ($p=\infty$
 のときは w^* closure).

$$\mathcal{H}^p = \mathcal{H}^p \oplus \mathcal{I}^p, \quad \mathcal{I}^p = \{f \in H^p(m); \int \bar{Z}^n f dm = 0, n=0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p \oplus \mathcal{N}^p, \quad \mathcal{N}^p = \{f \in L^p(m); \int Z^n f dm = 0, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

($\oplus$ は algebraic direct sum を示す)

$$(1.1) \quad f \in \mathcal{I}^p \Leftrightarrow \bar{Z}^n f \in \mathcal{I}^p (n \geq 1) \Leftrightarrow \varphi(f) = \int f d\varphi = 0 \quad (\forall \varphi \in P)$$

$\mathcal{N}^p$ は $\mathcal{I}^p + \bar{\mathcal{I}}^p$ の $L^p(m)$ norm closure である.

$$\mathcal{H}^p \cap L^\infty = \mathcal{H}^\infty, \quad \mathcal{I}^p \cap L^\infty = \mathcal{I}^\infty \text{ 等々 (cf. [6])}$$

$d\theta$ は複素平面の単位円周 $|\lambda|=1$ 上の normalized Lebesgue
 measure, $H^p(d\theta)$ は classical Hardy space とする. すると

$$(1.2) \quad T: Z \rightarrow e^{i\theta}$$

は $\mathcal{L}^p$ から $L^p(d\theta)$ ($1 \leq p \leq \infty$) 上への isometrically isomorphism

に拡張される. この T は $\mathcal{H}^p$ を $H^p(d\theta)$ ($1 \leq p \leq \infty$) 上に

isometrically isomorphic に与す. この際 $T\bar{f} = \overline{Tf}$,
 $f \in L^p$ ($\bar{f}$ は f の complex conjugate) である. $p=\infty$ のと
 きは T は $\mathcal{H}^\infty$ (または L^∞) から $H^\infty(d\sigma)$ (または $L^\infty(d\sigma)$) 上
 への algebra isomorphism である. 従って T の adjoint map
 T^* は $\mathcal{M}(H^\infty(d\sigma))$ (または $\mathcal{M}(L^\infty(d\sigma))$) を $\mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty)$ (または
 $\mathcal{M}(L^\infty)$) に homeomorphic に与す. $\mathcal{H}^\infty/\mathcal{H}^\infty$ は $\mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty)$ におけ
 る nontrivial Gleason part であり, 容易に解さる, $(T^*)^{-1}(\mathcal{H}^\infty/\mathcal{H}^\infty)$
 $= D$, ただし D は複素平面上の単位円板で $D \subset \mathcal{M}(H^\infty(d\sigma))$
 と考へたものである. $\overline{D} = \mathcal{M}(H^\infty(d\sigma))$, $(T^*)^{-1}(\overline{\mathcal{H}^\infty/\mathcal{H}^\infty}) = \overline{D}$
 であるから

$$(1.3) \quad \overline{\mathcal{H}^\infty/\mathcal{H}^\infty} = \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty)$$

$$(T^*)^{-1}(ch(\mathcal{H}^\infty)) = ch(H^\infty(d\sigma)) = \partial(H^\infty(d\sigma)) = \mathcal{M}(L^\infty(d\sigma)) \text{ から}$$

$$(1.4) \quad ch(\mathcal{H}^\infty) = \partial(\mathcal{H}^\infty) = \mathcal{M}(L^\infty).$$

(uniform algebra A の choquet boundary $\subset ch A$, Silov
 boundary $\subset \partial A$ を示す.) 次の事柄も容易に解さる.

$$(1.5) \quad \partial\mathcal{H}^\infty = \{ \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty); |\varphi(h)|=1 \text{ for every inner function } h \text{ in } \mathcal{H}^\infty \}$$

$$(1.6) \quad \mathcal{L}_R^\infty = \log |(\mathcal{H}^\infty)^{-1}|, \quad C_R(\mathcal{M}(L^\infty)) = \log |(\tilde{\mathcal{H}}^\infty)^{-1}|$$

§3. $H^\infty(m)$, $\mathcal{M}(H^\infty(m))$ のある性質

$$\text{補題 3.1} \quad L^\infty \cdot I^\infty = I^\infty$$

証明 $f \in I^\infty$ のとき $\bar{Z}^n f \in I^\infty$ ($n \geq 1$). $g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n \in \mathcal{H}^2$

$\therefore$ 対して $\int |fg - \sum_{n=0}^k \bar{a}_n Z^n f|^2 dm \leq \|f\|_{\infty}^2 \int |g - \sum_{n=0}^k a_n Z^n|^2 dm \rightarrow 0$
 $(k \rightarrow \infty)$. $\therefore \bar{\mathcal{H}}^2 \cdot I^{\infty} \subseteq I^2$. また $\mathcal{H}_m^2 \cdot I^{\infty} \subseteq I^2$ であるから
 $\mathcal{L}^2 \cdot I^{\infty} \subseteq I^2$ ($\because \mathcal{L}^2 = \bar{\mathcal{H}}^2 \oplus \mathcal{H}_m^2$) $\therefore \mathcal{L}^{\infty} \cdot I^{\infty} \subseteq I^{\infty}$
 $\therefore \mathcal{L}^{\infty} I^{\infty} = I^{\infty}$. Q.E.D.

定理 A. 1) H^{∞}/I^{∞} と $\mathcal{H}^{\infty}$ は Banach algebra として
 同型である ($H^{\infty}/I^{\infty} \cong \mathcal{H}^{\infty}$).

2) $\text{hull } I^{\infty} = \mathcal{J}_0 = \mathcal{M}(\mathcal{H}^{\infty})$ (同一表現を来す), また
 $\hat{\mathcal{H}}^{\infty} \subset \hat{H}^{\infty(cu)}$ と $\mathcal{H}^{\infty}|_{\mathcal{J}_0}$ は $\mathcal{C}(\mathcal{J}_0)$ の uniform
 algebra である. $\text{ch}(\mathcal{H}^{\infty}|_{\mathcal{J}_0}) = \partial(\mathcal{H}^{\infty}|_{\mathcal{J}_0}) = \{g \in \mathcal{J}_0; |g(h)|=1$
 for every inner function h in $\mathcal{H}^{\infty}\} = \mathcal{M}(\mathcal{L}^{\infty})$ ($= \tilde{\gamma}$ とおく),
 $C_R(\tilde{\gamma}) = \log |(\hat{\mathcal{H}}^{\infty})^{-1}| \tilde{\gamma}|$ また $\mathcal{M}(\mathcal{L}^{\infty}) = \mathcal{M}(\mathcal{L}^{\infty})|_{\mathcal{L}^{\infty}}$, 従って $\tilde{x}$
 $(\in \tilde{X} = \mathcal{M}(\mathcal{L}^{\infty}))$ に $\tilde{x}|_{\mathcal{L}^{\infty}}$ と対応する写像 $\tilde{x}$ と π とする
 と, π は $\mathcal{M}(\mathcal{L}^{\infty})$ から $\mathcal{M}(\mathcal{L}^{\infty})$ 上への連続写像である.

3) $\mathcal{M}(\mathcal{H}^{\infty}) - \mathcal{J}_0 \ni \varphi$ ならば $\varphi|_{\mathcal{H}^{\infty}} \in \mathcal{M}(\mathcal{L}^{\infty})$ である.

証明. 1) $\forall f \in H^{\infty(cu)}$, $f = g + h$ ($g \in \mathcal{H}^{\infty}$, $h \in I^{\infty}$) とす
 ると, Lemma 3.1 から $f^n = g^n + h_n$, $g^n \in \mathcal{H}^{\infty}$, $h_n \in I^{\infty}$.
 $\therefore \int |f|^{2n} dm = \int |g|^{2n} dm + \int |h_n|^2 dm \geq \int |g|^{2n} dm$
 $\therefore (\int |f|^{2n} dm)^{1/2n} \geq (\int |g|^{2n} dm)^{1/2n}$. $n \rightarrow \infty$ すると $\|f\|_{\infty} \geq \|g\|_{\infty}$.
 従って H^{∞} から H^{∞}/I^{∞} の上への自然写像 γ によって, $g \in \mathcal{H}^{\infty}$
 $\mapsto \bar{g} = g + I^{\infty} \in H^{\infty}/I^{\infty}$ が対応したとすると,

$$\|\bar{g}\|_\infty = \inf \{ \|g+h\|_\infty ; h \in I^\infty \} = \|g\|_\infty$$

$$H^\infty = \mathcal{H}^\infty \oplus I^\infty \text{ であるから } H^\infty / I^\infty \cong \mathcal{H}^\infty.$$

$$2) H^\infty / I^\infty \cong \mathcal{H}^\infty, \mathcal{M}(H^\infty / I^\infty) = \text{hull } I^\infty = \{ \varphi \in \mathcal{M}(H^\infty) ; \varphi(h) = 0$$

for all $h \in I^\infty \}$ から $\text{hull } I^\infty = \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty)$. $\varphi \in \text{hull } I^\infty$ から

$\mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty)$ 上への homeomorphic Σ mapping Σ が存在する

のだから $\bar{f} \in \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty) = \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty / I^\infty)$ (1.3) 式より $\bar{f} \in \text{hull } I^\infty$ であるから

$$\bar{f} = \Sigma^{-1}(\bar{f} \in \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty)) = \Sigma^{-1} \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty) \quad \therefore \bar{f} = \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty).$$

($\exists \Sigma$. $\phi \in \text{hull } I^\infty, \Sigma \phi = \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty)$ とする $\Sigma \phi(g) = \varphi(g)$

for $\forall g \in \mathcal{H}^\infty$). 従って $\hat{\mathcal{H}}^\infty \subset \hat{H}^\infty(\text{on } \mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty))$ と $\hat{\mathcal{H}}^\infty$ は $\hat{H}^\infty$ の Gelfand 表現 (on $\mathcal{M}(\mathcal{H}^\infty)$) とは同一のものである。

(1.4), (1.5) 式より $\text{ch}(\hat{\mathcal{H}}^\infty / \bar{f}) = \partial(\hat{\mathcal{H}}^\infty / \bar{f}) = \{ \varphi \in \bar{f} : |\varphi(h)| = 1 \text{ for all inner function } h \text{ on } \mathcal{H}^\infty \} = \Sigma^{-1} \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)$, (1.6) 式より $\log |\hat{\mathcal{H}}^\infty / \bar{f}| = \log |\mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)|$. 従って $\mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty) = \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty) / \mathcal{L}^\infty$ を示す。これは $\mathcal{L}^\infty$ の $\mathcal{L}^\infty$ への embedding mapping, $\mathcal{E}^*$ は $\mathcal{E}$ の adjoint mapping とする。 $\mathcal{E}^*$ は $K_{(\mathcal{L}^\infty)^*} = \{ \varphi \in (\mathcal{L}^\infty)^* ; \varphi(1) = \|\varphi\| = 1 \}$ と $K_{(\mathcal{L}^\infty)^*} = \{ \varphi \in (\mathcal{L}^\infty)^* ; \varphi(1) = \|\varphi\| = 1 \}$ 上への map する (Hahn-Banach theorem を使う) ことを示す。

$$\mathcal{E}^* \text{ ext } K_{(\mathcal{L}^\infty)^*} \supseteq \text{ext } K_{(\mathcal{L}^\infty)^*} \quad ([1], \text{ p. 318})$$

Bauer の定理 ([1], p. 315) より $\text{ext } K_{(\mathcal{L}^\infty)^*} = \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty)$,

$$\text{ext } K_{(\mathcal{L}^\infty)^*} = \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty). \text{ 従って } \mathcal{E}^* \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty) \supseteq \mathcal{M}(\mathcal{L}^\infty).$$

$\therefore M(L^\infty)/L^\infty \supset M(L^\infty)$. また $M(L^\infty)/L^\infty \subseteq M(L^\infty)$ が成り立つから $M(L^\infty)/L^\infty = M(L^\infty)$.

3) $\forall \varphi \in M(I^\infty)$ より $(\exists h \in I^\infty) \varphi(h) = 1$. $\therefore \Phi(\varphi) = \varphi(fh)$ ($\forall f \in H^\infty$) とおくと $\Phi(1) = 1$ と $\Phi(\varphi\psi) = \Phi(\varphi)\Phi(\psi)$ ($\forall \varphi, \psi \in H^\infty$)
 $\therefore \Phi \in M(H^\infty(I^\infty)) - \mathcal{F}$, 対応 $\varphi \rightarrow \Phi$ により $M(I^\infty) \simeq M(H^\infty) - \mathcal{F}$ とは homeomorphic になり, $L^\infty, I^\infty = I^\infty$ (補題 3.1) であるから $\forall f, g \in L^\infty$ に対して $\Phi(\varphi\psi) = \Phi(\varphi)\Phi(\psi)$. 即ち $\Phi|_{\mathcal{H}^\infty} \in M(L^\infty)$ となる ($\Phi|_{\mathcal{H}^\infty}$ は $M(L^\infty)$ に拡張される).

補題 3.2. C は Banach space, $S, T \subseteq C^*$ の w^* closed subspace とする. 若しある定数 $k (> 0)$ が存在して

$$\|u\| + \|v\| \leq k \|u+v\| \quad (\forall u \in S, \forall v \in T)$$

とすると $S+T$ は C^* の w^* closed subspace である.

(例として, G. M. Leibowicz: Lectures on complex function algebras, Scott, Foresman, p. 203 を参照.)

定理 B. $I^\infty \neq \{0\}$ のとき, $M(I^\infty)$ は disconnected である.

証明. $\therefore L^\infty \oplus I^\infty = B$ とおく. このとき $B \ni \forall f$
 $f = g + h$ ($g \in L^\infty, h \in I^\infty$) に対して定理 A-1) の証明と同様に $\|g\| \leq \|f\|$, 従って $\|h\| \leq 2\|f\|$ $\therefore \|g\| + \|h\| \leq 3\|f\|$ が得られ, 補題 3.2 から B は w^* closed 従って

Banach algebra になる. また $B/I^\infty \subset L^\infty$ は Banach algebra として同型である. よって $M(L^\infty) = \text{hull}(I^\infty)$ で $M(B) - \text{hull } I^\infty$ と $M(I^\infty)$ とは homeomorphic である.

$H^\infty(m)$ に属する inner function f を

$$(3.1) \quad f = g + h \quad (g \in H^\infty, h \in I^\infty), \quad h \neq 0$$

とあるものが存在する. ($\because$) 若し存在しなければ, [2] によって $L^\infty = L^\infty$ となり, $I^\infty \neq \{0\}$ に反する). このとき,

$$\left(\int |g| dm \right)^2 \leq \int |g|^2 dm < \int |g|^2 dm + \int |h|^2 dm = 1$$

より $\int |g| dm < 1$. また $|g| \leq |g|_\infty \leq \|f\|_\infty = 1$. この関係も $\tilde{X}$ に移すと,

$\int |\tilde{g}| d\tilde{m} < 1$ で $|\tilde{g}| \leq 1$. 従って

$\tilde{E} = \{ \tilde{x} \in \tilde{X}; |\tilde{g}(\tilde{x})| < 1 \}$ は空集合ではない. $\forall \tilde{x} \in \tilde{E}$

に就いて $\pi \tilde{x} = \varphi \in M(L^\infty)$ とおくと, $M(L^\infty) = \text{hull } I^\infty$ であるから

$\varphi(f) = \varphi(g) = \tilde{x}(g)$ で $|\varphi(f)| < 1$. $\{ \varphi; \varphi \in M(L^\infty)$

$, |\varphi(f)| < 1 \} = U$ とおくと, U は $M(L^\infty)$ 上の空でない

open set である. また U の任意の要素 φ に対し, $\pi \tilde{\varphi} \rightarrow \tilde{x}$

とすると, $\varphi(f) = \varphi(g) = \tilde{x}(g)$ から $|\tilde{x}(g)| < 1$. 故に

$|\tilde{x}(h)| \geq |\tilde{x}(f)| - |\tilde{x}(g)| = 1 - |\tilde{x}(g)| > 0$ となり $\tilde{x} \notin M(L^\infty)$.

$\therefore \pi^{-1}U \cap M(L^\infty) = \emptyset$. また $U \neq V$ なる clopen

set V がとれる. ($\because$) $M(L^\infty) \subset M(L^\infty(\mathbb{D}))$ とは

homeomorphic であるから) そうすると, $\chi^2 = \chi \in L^\infty$

なる関数 χ が存在して

$V = \{g \in M(L^\infty) : g(X) = 1\}$ " " , $X_1 = \{g \in M(B) : g(X) = 1\}$, $X_2 = \{g \in M(B) : g(X) = 0\}$ とおくと, X_1, X_2 はそれぞれ $M(B)$ における $\hat{1}$ と $\hat{0}$ の clopen set である.

$$M(B) = X_1 \cup X_2, \quad X_1 \cap X_2 = \emptyset.$$

$$M(B) - M(L^\infty) = (X_1 - M(L^\infty)) \cup (X_2 - M(L^\infty)).$$

$M(B) - M(L^\infty)$ から $M(I^\infty)$ への homeomorphic map によって

$$M(I^\infty) = Y_1 \cup Y_2, \quad Y_1 \cap Y_2 = \emptyset, \quad Y_1, Y_2 \text{ は共に "開集合",}$$

従って, $M(I^\infty)$ は disconnected である. Q. E. D.

§4. $H^\infty(m)$ の w^* maximality について.

定理 C. 次の事柄は同値である.

- 1) $H^\infty(m)$ は $L^\infty(m)$ の w^* closed subalgebra として maximal である.
- 2) $H^\infty(m) = \mathcal{H}^\infty$.
- 3) $f \in H^\infty(m)$, $\hat{f}(\varphi) = 0$ for all φ in $P(m) \Rightarrow f \equiv 0$ a.e. (m).
- 4) $\int \log |f| dm > -\infty$ for all $f \in H^\infty(m)$, $f \neq 0$.
- 5) $f \in H^\infty(m)$, $f \neq 0$ ならば f は outer function g と inner function h の積に分解される.

証明. 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3) は [5], [6] による.

1) $\Rightarrow$ 2); 若し $L^\infty \neq \{0\}$ ならば $H^\infty(m) \subsetneq B \subsetneq L^\infty(m)$

なる w^* -closed $\mathfrak{z}$ -subalgebra が存在する (例には, 定理 B の証明の中の $B = L^\infty \oplus I^\infty$). 対偶をとればよい.

2) $\Rightarrow$ 1); $H^\infty(m) = \mathcal{H}^\infty \Leftrightarrow I^\infty = \{0\}$. 故に $L^\infty(m) = L^\infty$, $TH^\infty(m) = H^\infty(d\sigma)$, $TL^\infty = L^\infty(d\sigma)$ (§2, (1.2) 以下参照).
 $\rightarrow H^\infty(d\sigma)$ は $L^\infty(d\sigma)$ の w^* -closed subalgebra として maximal である. よって 1) が従う.

2) $\Leftrightarrow$ 3); $I^\infty = \{f \in H^\infty(m); \varphi(f) = 0 \text{ for all } \varphi \in P(m)\}$ により明らか.

2) $\Rightarrow$ 4); $f \in H^\infty = \mathcal{H}^\infty \subset H^2 = \mathcal{H}^2$, $f \neq 0$ から
 $f = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n Z^n$ ($a_{n_0} \neq 0$). $\bar{Z}^{n_0} f = a_{n_0} + a_{n_0+1} Z + \dots$
 $\therefore \int \log |f| dm = \int \log |\bar{Z}^{n_0} f| dm \geq \log \left| \int a_{n_0} dm \right| = \log |a_{n_0}| > -\infty$.

4) $\Rightarrow$ 2); 対偶をとって, 2) でないならば,

$\exists f \in I^\infty \subset H^\infty(m)$, $f \neq 0$, $\int \log |f| dm = -\infty$ となることを示せばよい. I^∞ から注意の要素 f をとり. 若し $\int \log |f| dm > -\infty$ ならば $|f| > 0$ a.e. (m). さて, 複素平面の単位円周 $K = \{ |z| = 1 \}$ 上に (d σ) 可測な集合 E で $0 < \sigma(E) = \int_K \chi_E d\sigma < 1$ となるものをとり. (d σ は normalized Lebesgue measure, χ_E は E の特性関数である). $U_E = \{ \varphi; \varphi \in \mathcal{M}(L^\infty(d\sigma)), \varphi(\chi_E) = 0 \}$, $U_{K \setminus E} = \{ \varphi; \varphi \in \mathcal{M}(L^\infty(d\sigma)), \varphi(\chi_E) = 1 \}$ は $\mathcal{M}(L^\infty(d\sigma))$ の nonempty clopen set である. $T^{-1}\chi_E = \chi \in L^\infty$ である (§2, (1.2) 式以下参照).

$T^*U_E = \{g; g \in M(L^\infty), g(X)=0\}$, $T^*U_{K|E} = \{g; g \in M(L^\infty), g(X)=1\}$ は $M(L^\infty)$ の nonempty clopen set である. 定理 A, 2) の Π により, $U = \Pi^{-1}(T^*U_E)$, $V = \Pi^{-1}(T^*U_{K|E})$ は $\tilde{X}$ の nonempty clopen set である. $\tilde{X} \setminus U = V$ である. 今 $F = \chi_f$ とおくと, 補題 3.1 から $F \in I^\infty \subset H^\infty(m)$,

$$\tilde{F} = \begin{cases} 0 & \text{on } U \\ \tilde{f} & \text{on } \tilde{X} \setminus U \end{cases}$$

$$\therefore \int \log |F| dm = \int_{\tilde{X}} \log |\tilde{F}| dm = -\infty.$$

4) $\Leftrightarrow$ 5) は明白.

文献

- [1] E. Bishop and K. de Leeuw, The representation of linear functionals by measures on sets of extreme points, Ann. Inst. Fourier 9 (1959).
- [2] R. G. Douglas and W. Rudin, Approximation by inner functions, Pacific J. Math., 31 (1969).
- [3] T. W. Gamelin, Uniform algebra, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., (1969).
- [4] K. Hoffman, Analytic functions and logmodular

Banach algebra, Acta Math., 108 (1962).

[5] S. Merrill, Maximality of certain algebras $H^\infty(\text{ann})$, Math. Zeits., 106 (1968).

[6] S. Merrill and N. Lal, Characterization of certain invariant subspaces of H^p and L^p spaces derived from logmodular algebras, Pacific J. Math., 30 (1969).