

負曲率多様体上の調和解析

新井仁之 (東京大学大学院数理科学研究科)

調和解析では、調和測度と境界上の Hausdorff 測度がどのような関係にあるかというテーマが古くから研究されている。特に複素平面内の単連結領域上の調和測度に関する Makarov の定理や、Lipschitz 領域上の場合の Dahlberg の研究が良く知られている。また、比較的最近では L^∞ 係数の一様楕円型偏微分作用素

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

から定義される調和測度について R. Fefferman, Dahlberg, Kenig, らが多くの結果を得ている ([1] 参照)。こういった研究を楕円型であるが境界のすべての点で楕円性が退化している場合に拡張することは興味深い。なぜそれが興味深いかを説明することからはじめたい。

一変数関数論では、たとえば単位円板上で成り立っているポテンシャル論的な性質が、等角写像あるいは擬等角写像でどのように変化するかを調べることがある。これは等角写像、擬等角写像の境界挙動の研究と密接に関連している。たとえば Makarov の定理は調和測度に関するものであるが、それは等角写像と関連した Bloch 関数の境界挙動を調べることにより証明された。一変数関数論のこの問題意識を多変数に一般化し、 $\mathbb{C}^m$ 内の強擬凸領域を双正則写像で別の領域に移したとき、もとの領域で成り立っていたポテンシャル論的な性質がどのように変化するかをみることは興味深い。しかしこの一般化に際しては一変数にはない多くの問題が生ずる。たとえば双正則写像の境界挙動は、比較的単純な場合ですら難しい問題を多く含んでいる ([2], [3])。

ところで多 (複素) 変数の場合、しばしばユークリッド・ラプラシアンではなく、Bergman ラプラシアンが意味をもってくる。たとえば Szegő 射影の H^1 有界性や正則関数の境界挙動を考えると自然にそれが見えてくる。そこで、たとえば単位球あるいは強擬凸領域上の Bergman ラプラ

シアンに関する調和測度が双正則写像で別の領域に写ったときに、写った領域の境界上の Hausdorff 測度との関連を調べることは興味深い。おそらくそれは双正則写像の境界挙動を調べることに役だつのではないかと考えられる。しかしこういったことを何の準備もなしに考えることは筆者には難しいように思える。いくつかの準備的な研究が必要である。その一つとして今回の講演では、負曲率多様体上の楕円型偏微分作用素の調和解析について述べた。(よく知られているように Bergman ラプラシアンを定義する Bergman 計量は単位球ではその断面曲率は負であり、また強擬凸領域でも境界の近傍では負になっている ([4])).

本講演では、まず負曲率多様体上のポテンシャル論に関する Anderson, Schoen, Ancona らの結果を紹介した。それは無限遠境界の Harnack 不等式, Martin コンパクト化と Eberlein と O'Neill の幾何学的なコンパクト化の同相性に関するものである。([5], [6])

その後、筆者 ([7]) が導入した admissible convergence が Anderson と Schoen の nontangential convergence と同値であり、また筆者が条件付で証明した H^1 -BMO 双対性 ([8]) が条件なしでも成り立つという Cifuentes と Koranyi の二つの結果 ([9]) を紹介した。Cifuentes と Koranyi のこれらの結果は負曲率多様体上の調和解析の研究を進める上で非常に重要なものである。

次に負曲率多様体上の Carleson 測度ならびに調和関数の L^∞ 勾配評価について述べ、多様体上の Bloch 関数論について述べた。これらは [10] の結果の紹介である。詳しくは [10] を参照してほしい。

負曲率多様体上の調和解析の研究 (特に実解析学的な観点からの研究) はまだ始まったばかりであるが、さまざまな観点から重要なテーマであると思われる。

ところで非正曲率の場合はさらに興味深い。そのような多様体上の調和解析は多重パラメータ実解析を昇華させたものとして実現可能であるはずだが、多重パラメータ実解析では各種被覆定理が成立せず、未だに問題点を多く抱えている。確率論的方法に訴えれば被覆定理は必要なくなるものの、多重パラメータの確率過程を解析する必要がある。被覆定理に関する問題点は、停止時間がないという難点にすりかわって現

参考文献

- [1] C. E. Kenig, Harmonic Analysis Techniques for Second Order Elliptic Boudary Value Problems, CBMS, 83, AMS, 1994.
- [2] C. Fefferman, The Bergman kernel and biholomorphic mapping of pseudoconvex domains, Invent Math. 26 (1974), 1–65.
- [3] R. E. Greene and S. G. Krantz, Deformation of complex structure estimates for the $\bar{\partial}$ equation, and stability of the Bergman kernel, Adv. Math. 43 (1982), 1–86.
- [4] P. Klembeck, Kähler metrics of negative curvature, the Bergman metric near the boundary and the Kobayashi metric on smooth bounded strictly pseudoconvex sets, Indiana Univ. Math. J. 27 (1978), 275–282.
- [5] M. T. Anderson and R. Schoen, Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvatures, Ann. of Math. 121 (1985), 701–721.
- [6] A. Ancona, Negatively curved manifolds, elliptic operators, and the Martin boundary, Ann. of Math. 125 (1987), 495–536.
- [7] H. Arai, Bondary behavior of functions on complete manifolds of negative curvature, Tohoku Math. J. 41 (1989), 307–319.
- [8] H. Arai, Harmonic analysis on negatively curved manifolds I, Proc. Japan Acad. 63 Ser. A (1987), 239–242.
- [9] P. Cifuentes and A. Korányi, Admissible convergence in Cartan-Hadamard manifolds, J. Geometric Analysis 11 (2) (2001), 233–239.
- [10] H. Arai, Hardy spaces, Carleson measures and a gradient estimate for harmonic functions on negatively curved manifolds, Advanced Studies in Pure Math. 31 (2001), 1–49.
- [11] H. Arai, Singular elliptic operators related to harmonic analysis and complex analysis of several variables, in “Trends in Probability and Related Analysis” pp. 1–34, World Sci. Publ. 1999.