

有限巡回被覆のコホモロジーについて

(この解説文を中岡稔先生に捧げます)

大阪大学大学院理学研究科 原 靖浩 (Yasuhiro Hara)

Graduate school of Science, Osaka University

京都大学大学院理学研究科 岸本大祐 (Daisuke Kishimoto)

Department of Mathematics, Kyoto University

1 序

本稿の目的は [2] でスミスコホモロジーの応用として紹介した次の定理について, [3] のスペクトル系列による証明を紹介することである.

定理 1 ([2], [3]). p を奇素数とし, X を位数 p の巡回群 C_p が自由に作用するハウスドルフ空間とする. $H^n(X; \mathbb{Z}/p) = 0$ で, 同変写像 $f: X \rightarrow EC_p$ から定まる写像 (分類写像) $\bar{f}: X/C_p \rightarrow BC_p$ が $(\bar{f}^*)^n \neq 0: H^n(BC_p; \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^n(X/C_p; \mathbb{Z}/p)$ を満たすとき, $(\bar{f}^*)^{n+1}: H^{n+1}(BC_p; \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^{n+1}(X/C_p; \mathbb{Z}/p)$ は自明な準同型ではない.

BC_p の $\mathbb{Z}/p$ 係数のコホモロジーは

$$H^*(BC_p; \mathbb{Z}/p) = \Lambda(u) \otimes \mathbb{Z}/p[v], \quad \beta u = v, \quad |u| = 1$$

である (β は Bockstein 作用素). 奇数次元の球面 S^{2n-1} に C_p が自由に作用するとき, 分類写像 $\bar{f}: S^{2n-1} \rightarrow BC_p$ に対して, $(\bar{f}^*)^1: H^1(BC_p; \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^1(S^{2n-1}/C_p; \mathbb{Z}/p)$ は自明な準同型ではない. 定理 1 を繰り返し利用すれば, $(\bar{f}^*)^{2n-1}: H^{2n-1}(BC_p; \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^{2n-1}(S^{2n-1}/C_p; \mathbb{Z}/p)$ が自明な準同型ではないことがわかる. 一方, $k > 2n-1$ では, $H^k(S^{2n-1}/C_p; \mathbb{Z}/p) = 0$ なので, $(\bar{f}^*)^k: H^k(BC_p; \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^k(S^{2n-1}/C_p; \mathbb{Z}/p)$ は自明な準同型である. このことを用いると, 「 S^{2m-1} , S^{2n-1} に C_p が自由に作用するとき, C_p 写像 $f: S^{2m-1} \rightarrow S^{2n-1}$ が存在すれば, $m \leq n$ 」 という C_p 作用に関する Borsuk-Ulam の定理は容易に証明できる.

このように, 分類写像 $X/G \rightarrow BG$ から誘導されるコホモロジーの準同型の形を調べることは Borsuk-Ulam 型定理につながる. 定理 1 も分類写像から誘導される準同型に関する定理であり, 本稿は Borsuk-Ulam 型定理の研究のスペクトル系列を用いた手法の紹介ともいえる.

2 Massey Product

この節では, Massey product について定義と後で使う性質を紹介しよう. X を位相空間とし, Z を X の部分空間とする. $u_1, u_2, \dots, u_k$ を $u_i \in H^{p_i}(X, Z; R)$ (R は環) をみたすものとし, 整数 $p(i, j)$ ($i \leq j$) を

$$p(i, j) = \sum_{r=i}^j (p_r - 1) = p_i + p_{i+1} + \dots + p_j - j + i + 1$$

により定める. $a_1, a_2, \dots, a_k \in C^*(X, Z; R)$ を

$$[a_i] = u_i \quad (1 \leq i \leq k)$$

をみたすものとし, $\bar{a}_i = (-1)^{p_i} a_i$ と定義する.

$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq k, (i,j) \neq (1,k)}$ を $C^*(X, Z; R)$ の元の族で,

$$a_{ii} = a_i, \quad a_{ij} \in C^{p(i,j)+1}, \quad \delta a_{ij} = \sum_{r=i}^{j-1} \bar{a}_{ir} a_{r+1j}$$

を満たすものとする. このような A を *defining system* という. $a_1, \dots, a_k$ に対して, defining system A が存在するとき, Massay product $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$ は定義可能であるといい, defining system A に対して,

$$c(A) = \sum_{r=1}^{k-1} \bar{a}_{1r} a_{r+1k} \in C^{p(1,k)+2}(X, Z; R)$$

と定義して, Massay product $\langle a_1, \dots, a_k \rangle_k$ を

$$\langle a_1, \dots, a_k \rangle_k = \{[c(A)] \in H^{p(1,k)+2}(X, Z; R) \mid A : \text{defining system}\}$$

により定義する. このとき, 次のことが知られている.

命題 2.1 ([5], [7]). $\langle a_1, \dots, a_k \rangle_k$ は $a_1, \dots, a_k$ のコホモロジー類で決まる.

したがって, $u_1, u_2, \dots, u_k \in H^*(X, Z; R)$ に対して, $[a_i] = u_i$ を満たす $a_1, \dots, a_k \in C^*(X, Z; R)$ を取り, $u_1, \dots, u_k$ の Massay product を

$$\langle u_1, \dots, u_k \rangle_k = \langle a_1, \dots, a_k \rangle_k$$

により定義する.

例. $\langle u_1, u_2 \rangle_2 = u_1 u_2$ (カップ積)

$u_1, u_2, u_3 \in H^1(X; R)$ のとき, $[a_{ii}] = u_i$ となる $a_{ii} \in C^1(X; R)$ ($i = 1, 2, 3$) を取り, $\delta a_{12} = -a_{11} a_{22}$, $\delta a_{23} = -a_{22} a_{33}$ を満たすような a_{12}, a_{23} が defining system $(a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq 3}$ である.

$$\langle u_1, u_2, u_3 \rangle_3 = \{[-a_{11} a_{23} - a_{12} a_{33}] \mid (a_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq 3} \text{ は defining system}\}.$$

$\langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle_{n-1}$ の defining system $\{x_{ij}\}_{1 \leq i \leq j \leq n-1}$ が $\langle x_{k+1}, \dots, x_n \rangle_{n-k}$ の defining system に拡張できるとき, 新たに $\{x'_{ij}\}_{1 \leq i \leq j \leq k+1}$ を

$$x'_{ij} = \pm x_{ij} \quad (j \leq k), \quad x'_{i,k+1} = \sum_{l=k+1}^{n-1} \pm x_{il} x_{ln} \quad (2 \leq i \leq k+1)$$

により定義する. これは $\langle x_1, \dots, x_k, \langle x_{k+1}, \dots, x_n \rangle_{n-k} \rangle_{k+1}$ の defining system である. defining system $\{x_{ij}\}_{1 \leq i \leq j \leq n-1}$ で定まるコホモロジーの元を x と書くと, x は, ある $y \in \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle_{n-1}$ に対して $x = \pm y x_n$ となる (cf. [6]).

3 有限巡回被覆のコホモロジー

以下, コホモロジーの係数は断りのない限りすべて $\mathbb{Z}/p$ とする. 序にも述べたとおり,

$$H^*(BC_p) = \Lambda(u) \otimes \mathbb{Z}/p[v], \quad \beta u = v, \quad u \in H^1(BC_p)$$

である. ここで, β は Bockstein 作用素を表す.

$E \rightarrow B$ を正規巡回 p 重被覆とし, $S_*(E)$ を E の singular chain complex とすると, $S_*(E)$ には C_p が自由に作用する. これより, $S_*(E)$ を $\mathbb{Z}[C_p]$ -module と見て

$$(1) \quad \begin{aligned} H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}[C_p]}(S_*(E), \mathbb{Z}/p[C_p])) &\cong H^*(E), \\ H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}[C_p]}(S_*(E), \mathbb{Z}/p)) &\cong H^*(B) \end{aligned}$$

が成り立つ. g を C_p の生成元とし, $\tau = 1 - g$ とおく. $\mathbb{Z}/p[C_p] = \mathbb{Z}/p[\tau]/(\tau^p)$ であり, filtration

$$0 \subset \tau^{p-1}\mathbb{Z}/p[C_p] \subset \tau^{p-2}\mathbb{Z}/p[C_p] \subset \cdots \subset \tau\mathbb{Z}/p[C_p] \subset \mathbb{Z}/p[C_p]$$

を考え,

$$F^n C^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}[C_p]}(S_*(E), \tau^n \mathbb{Z}/p[C_p])$$

とおくことにより, cochain complex $C^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}[C_p]}(S_*(E), \mathbb{Z}/p[C_p])$ の filtration

$$C^* = F^0 C^* \supset F^1 C^* \supset \cdots \supset F^{p-1} C^* \supset 0$$

を得る. この filtration に対するスペクトル系列を考えると,

$$E_1^{s,t} = H^t(F^s C^* / F^{s+1} C^*) = \begin{cases} H^t(B) & 0 \leq t \leq p-1 \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

である. また, $d_r: E_r^{s,t} \rightarrow E_r^{s-r,t+1}$, $H^t(E) \cong \bigoplus_{s \geq 0} E_\infty^{s,t}$ である. 次に cochain complex

$$\bigoplus_{i=0}^{p-1} \text{Hom}_{\mathbb{Z}[C_p]}(S_*(E), \tau^i \mathbb{Z}/p[C_p] / \tau^{i+1} \mathbb{Z}/p[C_p]) \cong \bigoplus_{i=0}^{p-1} \tau^i \text{Hom}_{\mathbb{Z}[C_p]}(S_*(B), \mathbb{Z}/p)$$

における coboundary $\bar{\delta}$ を考えよう. まず, 普遍被覆 $EC_p \rightarrow BC_p$ において,

$1 \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(BC_p, \mathbb{Z}/p)$ に対して,

$$\bar{\delta}(1) = \tau u_1 + \cdots + \tau^{p-1} u_{p-1}, \quad u_i \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_1(BC_p), \mathbb{Z}/p)$$

とおくことができる.

分類写像 $\rho: B \rightarrow BC_p$ の lift を $\tilde{\rho}: E \rightarrow EC_p$, $\pi: E \rightarrow B$ を射影とし, $E \xrightarrow{\tilde{\rho} \times \pi} EC_p \times B$ を考える. このとき, cochain complex $\bigoplus_{i=0}^{p-1} \tau^i \text{Hom}_{\mathbb{Z}[C_p]}(S_*(B), \mathbb{Z}/p)$ 上に誘導される coboundary 写像 $\bar{\delta}$ は, $x \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_*(B), \mathbb{Z}/p)$ に対して

$$\bar{\delta}x = \delta x + \tau \rho^*(u_1)x + \cdots + \tau^{p-1} \rho^*(u_{p-1})x,$$

をみだす. 上で, $[u_1] = 0$ ならば, $1 \in E^{1,0}$ はスペクトル系列において permanent cycle となり, $1 \in E^{0,0}$ も permanent cycle なので $H^t(E) \cong \bigoplus_{s \geq 0} E_\infty^{s,t}$ で, E が可縮であることに矛盾する. したがって, $[u_1] \neq 0$ で $u_1 \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(BC_p, \mathbb{Z}/p)$ は $[u_1] = u \in H^1(BC_p)$ (u は生成元) を満たすものとしてよい.

さて, $\bar{\delta}^2(1) = 0$ であり,

$$\begin{aligned}\bar{\delta}^2(1) &= \tau\bar{\delta}u_1 + \cdots + \tau^{p-1}\bar{\delta}u_{p-1} \\ &= \tau(\delta u_1 + \tau u_1 u_1 + \cdots + \tau^{p-1}u_{p-1}u_1) + \cdots \\ &\quad + \tau^{p-1}(\delta u_{p-1} + \tau u_1 u_{p-1} + \cdots + \tau^{p-1}u_{p-1}u_{p-1}) \\ &= \tau(\delta u_1) + \tau^2(u_1 u_1 + \delta u_2) + \tau^3(u_2 u_1 + u_1 u_2 + \delta u_3) + \cdots \\ &\quad + \tau^{p-1}(u_{p-2}u_1 + u_{p-3}u_2 + \cdots + u_1 u_{p-2} + \delta u_{p-1})\end{aligned}$$

したがって,

$$(2) \quad \delta u_i = - \sum_{j < i} u_j u_{i-j} \quad (i = 2, 3, \dots, p-1)$$

が成り立つ. 等式 (1), (2) と $[u_1] = u$ より, defining system として $x_{ij} = \rho^*(u_{j-i+1})$ ($j \leq r$), $x_{i,r+1}$ として defining system の条件を満たすような cochain をとると,

$$d_r x \in \pm \langle \bar{u}, \dots, \bar{u}, x \rangle_{r+1}$$

がわかる (ここで, $\bar{u} = \rho^*u$).

$EC_p \rightarrow BC_p$ については次のことが成り立つ.

命題 3.1 ([5]).

$$\langle u, \dots, u \rangle_k = \begin{cases} \{0\} & k < p \\ \{v\} & k = p. \end{cases}$$

$\rho^*(u_i)$ で定義される $\langle \bar{u}, \dots, \bar{u} \rangle_{r+r'}$ ($r+r' \leq p$) の defining system を考える. この defining system は上で $d_{r'}$ について考察したように, $\langle \bar{u}, \dots, \bar{u}, x \rangle_{r'+1}$ の defining system に拡張できる. 命題 3.1 と Massay Product について2節の最後で紹介したことから, $x' = d_{r'}x$ とおくと,

$$\begin{aligned}d_r x' &= \pm \langle \bar{u}, \dots, \bar{u}, x' \rangle_{r+1} = \pm \langle \bar{u}, \dots, \bar{u}, \langle \bar{u}, \dots, \bar{u}, x \rangle_{r'+1} \rangle_{r+1} \\ &= \pm \langle \bar{u}, \dots, \bar{u} \rangle_{r+r'} x\end{aligned}$$

したがって,

$$d_r x' = \begin{cases} 0 & r+r' < p \\ \pm \bar{v} x & r+r' = p. \end{cases}$$

4 定理 1 の証明

定理 1 を示すには, 分類写像 $\bar{f}: X/C_p \rightarrow BC_p$ が $\bar{f}^*(\bar{f}^*)^n \neq 0: H^n(BC_p; \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^n(X/C_p; \mathbb{Z}/p)$ かつ $(\bar{f}^*)^{n+1} = 0: H^{n+1}(BC_p; \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^{n+1}(X/C_p; \mathbb{Z}/p)$ をみたすとき, $H^n(X; \mathbb{Z}/p) \neq 0$ であることを示せばよい.

以下では、3節の記号に従い、 $X, X/C_p$ の代わりに E, B を用い、分類写像を $\bar{f}$ の代わりに $\rho: B \rightarrow BC_p$ と書くことにする。

n が奇数のとき $n = 2m + 1$ と表すと、3節で考えた普遍被覆 $EC_p \rightarrow BC_p$ についてのスペクトル系列で

$$d_r^{p-1, 2m+1} uv^m = \begin{cases} 0 & r < p-1 \\ av^{m+1} & r = p-1 \end{cases}$$

が成り立つ ($a \neq 0$)。このとき、 $\rho^* = 0: H^{n+1}(BC_p; \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^{n+1}(X/C_p; \mathbb{Z}/p)$ の仮定に注意すると、スペクトル系列の自然性より

$$d_r^{p-1, 2m+1} \bar{u}\bar{v}^m = \rho^*(d_r^{p-1, 2m+1} uv^m) = \begin{cases} 0 & r < p-1, \\ \rho^*(av^{m+1}) = 0 & r = p-1. \end{cases}$$

したがって、 $\bar{u}\bar{v}^m \in E_1^{p-1, 2m+1}$ が permanent cycle になるので $H^{2m+1}(E; \mathbb{Z}/p) \neq 0$ 。

次に n が偶数のとき、 $n = 2m$ と書く。 $\bar{v}^m \in E_1^{s, 2m}$ が $0 \leq s \leq p-1$ をみたすすべての s に対して $E_k^{s, 2m}$ で生き残っているような k の最大値を考え、それを r で表す ($\bar{v}^m = \rho^*(v^m) \neq 0$ より $r \geq 1$)。

$d_r^{s, 2m} \bar{v}^m \neq 0$ となる s が存在するとき、 $d_r^{r, 2m} \bar{v}^m \neq 0$ である。 $r = 1$ であれば、 $d_1^{1, 2m} \bar{v}^m = \bar{u}\bar{v}^m = \rho^*(uv^m)$ で ρ^* の仮定に反するので、 $r \geq 2$ となる。

さて、 $\bar{v}^m \in E_1^{r-1, 2m}$ が $r \leq r'$ を満たすような $E_{r'}$ -項まで生き残り、 $d_{r'}^{r+r'-1, 2m-1} x = \bar{v}^m$ を満たすような x が存在すると仮定すると、3節で見たように

$$d_r^{r, 2m} \bar{v}^m \in \pm \langle \bar{u}, \dots, \bar{u}, \bar{v}^m \rangle_{r+1}, \quad \bar{v}^m \in \pm \langle \bar{u}, \dots, \bar{u}, x \rangle_{r'+1}$$

である。したがって、3節の最後で見たように、

$$d_r^{r, 2m} \bar{v}^m = \begin{cases} 0 & r + r' < p \\ \pm \bar{v}x & r + r' = p. \end{cases}$$

$d_r^{r, 2m} \bar{v}^m \neq 0$ なので $r + r' = p$ である。このとき、 E_r において、 $\bar{u}x = d_1^{r, 2m-1} x = 0$ 。 $\beta(\bar{u}x) = 0$ なので、 $0 = \beta(\bar{u}x) = (\beta\bar{u})x - \bar{u}(\beta x) = \bar{v}x - \bar{u}\beta x$ 。したがって、 $\bar{v}x = d_1(\beta x)$ で、これは E_r -項で自明であり、 $d_r^{r, 2m} \bar{v}^m \neq 0$ に矛盾する。したがって、 $\bar{v}^m \in E_1^{r-1, 2m}$ は permanent cycle であり、 $H^{2m}(E; \mathbb{Z}/p) \neq 0$ となる。

次に、ある s に対して $d_r^{s, 2m} x = \bar{v}^m$ となる s と x が存在する場合を考える。このとき、 $\bar{v}^m \in \pm \langle \bar{u}, \dots, \bar{u}, x \rangle_{r+1}$ であり、 $\bar{v}^m \in E_1^{p-r, 2m}$ に対して、ある $r' (r' \geq r)$ で $d_{r'}^{p-r, 2m} \bar{v}^m \neq 0$ と仮定する。上と同様に

$$d_{r'}^{p-r, 2m} \bar{v}^m = \begin{cases} 0 & r + r' < p \\ \pm \bar{v}x & r + r' = p \end{cases}$$

を用いて $d_{r'}^{p-r, 2m} \bar{v}^m = 0$ が証明できて、 $d_{r'}^{p-r, 2m} \bar{v}^m \neq 0$ に矛盾する。したがって、 $\bar{v}^m \in E_1^{p-r, 2m}$ は生き残り $H^{2m}(E; \mathbb{Z}/p) \neq 0$ が成り立つ。

以上で定理 1 の証明ができた。

References

- [1] E. Fadell and S. Husseini, An ideal-valued cohomological index theory with applications to Borsuk-Ulam and Bourgin-Yang theorems, *Ergodic Theory Dynamical Systems*, **8**(1988), 73–85.
- [2] Y. Hara, スミスコホモロジーとその応用, 京大数理解析研究所講究録 1816 変換群の幾何の展開 (2012), 103・112
- [3] Y. Hara and D. Kishimoto, Note on the cohomology of finite cyclic coverings, *Topology and its Applications*, **160**(2013), 1061–1065
- [4] J. Jaworowski, Maps of Stiefel manifolds and a Borsuk-Ulam theorem, *Proc. Edinb. Math. Soc.* **32**(1989), 271–279.
- [5] D. Kraines, Massey higher products, *Trans. Amer. Math. Soc.* **124**(1966) 431–49.
- [6] J.P. May, Matric Massey products, *J. Algebra***12**(1969) 533–68.
- [7] J. McCleary, *A User's Guide to Spectral Sequences* (Second edition), Cambridge University Press (2001)