

複素ホワイトノイズとコヒーレント状態表示

名古屋大学大学院
多元数理科学研究科
尾 畑 伸 明

obata@math.nagoya-u.ac.jp

1 はじめに

コヒーレント状態とは、消滅作用素 a に対して

$$a|z\rangle = z|z\rangle, \quad z \in \mathbf{C},$$

をみたす固有状態 $|z\rangle$ として定義され、電磁場の量子状態の一つとして重要である。コヒーレント状態の全体 $\{|z\rangle; z \in \mathbf{C}\}$ は直交性をみたさないが、過剰完全性 (overcompleteness) をもち、任意の状態をコヒーレント状態の重ね合わせで表示することができる。さらに、コヒーレント状態による単位分解公式：

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{C}} |z\rangle \langle z| d^2z$$

に基づいて、一般の作用素 (演算子) は、コヒーレント状態への1次元射影の重ね合わせで表示される。これらの事情は有限自由度でも同様であり、量子光学などにおいて多くの応用をもつ [8], [9]。本論文では、以上の事実をホワイトノイズ理論、特に、複素ガウス積分と複素ホワイトノイズを用いて、厳密に無限次元の場合に拡張し、コヒーレント状態の過剰完全性とそれに派生するコヒーレント状態表示の一意性の問題を扱う。

本来、ホワイトノイズ理論¹⁾は、「ゆらぎ」をともなう現象の数理解析のための道具として枠組みが作られてきた。ゆらぎの数理解析というと、伊藤解析が一つの金字塔であるが、最近では、ゆらぎを無限変数の関数 (ブラウン運動あるいはホワイトノイズの汎関数) として取り扱う「無限次元解析」としての観点から著しく発展しており、ホワイトノイズ理論もその流れにある。他に、マリアヴァン解析などが著名である [12]。ホワイトノイズ理論の特徴は、ホワイトノイズ $\{W_t; t \in \mathbf{R}\}$ を無限次元ベクトル空間の座標系として定式化することで、Lévy [11] などに見られる変分法のアイデアを無限変数微積分として再構成したことにある。これによって、ブラウン運動とホワイトノイズに対して、微積分の基本定理

$$B_t = \int_0^t W_s ds \iff \frac{d}{dt} B_t = W_t$$

が成り立つ。この有用性は、例えば、伊藤型確率微分方程式

$$dV = -kVdt + dB_t$$

¹⁾従来、ホワイトノイズ解析 (あるいは [5] に因んで飛田解析) と呼ばれてきたが、2000 年版 Mathematics Subject Classification の項目に 60H40 white noise theory として取り上げられたのを機に、この呼び名を採用する。

として定式化されるランジュヴァン方程式が、無限次元ベクトル空間に値をとる常微分方程式

$$\frac{dV}{dt} = -kV + W_t$$

として再定式化され、物理的直感を取り戻すことにも見て取れる。ホワイトノイズ理論の直接の動機は、(古典)確率解析にあったが、今日では、無限次元調和解析・量子確率・非線形ノイズ・量子場の理論など多くの分野と連携しながら発展している。特に、量子確率解析とその非線形拡張において、その役割が大いに期待される(関連するいくつかの課題については[15]に解説したので参照されたい)。一方、複素関数の微積分(関数論)が、実関数の微積分に大きな影響を与えているように、無限次元解析においても同様な興味がある。本論文では、最新のホワイトノイズ理論に沿って、複素ホワイトノイズを導入し、コヒーレント状態に関する上記の問題を議論する。複素化は、ホワイトノイズ理論における古くて新しい課題といえる。

2 ホワイトノイズ理論概要

2.1 ガウス空間 ホワイトノイズ理論では、無限次元ベクトル空間で定義された関数(無限変数関数)やそのような関数に対する作用素を研究対象とする。そのような関数に対して、微分は座標軸に沿った変化率として定義されるが、積分を考えるためには測度を必要とする。ところが、無限次元空間上には、 $\mathbf{R}^n$ 上のルベーグ測度のような平行移動不変性で特徴づけられるような測度は存在しない。しかし、いくつかの順当な理由から、ガウス測度を考えるのが適切であり、様々な有用な結果が導かれる。ガウス測度の無限次元ベクトル空間への導入についての一般論は[18]に譲り、ここでは、ブラウン運動の実現を念頭に一つの典型例を述べる。

まず、ゲルファントの三組：

$$E = S(\mathbf{R}) \subset H = L^2(\mathbf{R}) \subset E^* = S'(\mathbf{R}) \quad (1)$$

を考える。ここで、 E が核型空間(nuclear space)であって、 $E \hookrightarrow H$ が連続かつ稠密な埋め込みになっていることが重要である。 $E^* \times E$ 上の標準的な双線形形式を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表し、Hilbert空間 $H = L^2(\mathbf{R})$ のノルムを、あとの都合によって、 $\|\xi\|_0$ のように添字 0 をつけて表す。このとき、 $\xi \mapsto \exp(-\|\xi\|_0^2/2)$ は E 上の連続な正定値関数となる。そのような関数は、ミンロス・山崎の定理[18]によって、 E^* 上の確率測度 μ のフーリエ変換である：

$$e^{-\|\xi\|_0^2/2} = \int_{E^*} e^{i\langle x, \xi \rangle} \mu(dx), \quad \xi \in E.$$

この確率測度 μ を E^* 上の(標準)ガウス測度といい、確率空間 (E^*, μ) をガウス空間という。これをユークリッド空間 $(\mathbf{R}^n, dx)$ の無限次元版とみなす。

2.2 ブラウン運動とホワイトノイズ 一般に、 $\xi \in E$ に対して

$$X_\xi(x) = \langle x, \xi \rangle, \quad x \in E^*,$$

は E^* 上の連続線形関数であるが、確率空間 (E^*, μ) 上で定義されているので確率変数と呼ばれる。そのような確率変数の平均と共分散は、簡単な計算によって、

$$\mathbf{E}(X_\xi) = 0, \quad \mathbf{E}(X_\xi X_\eta) = \int_{E^*} X_\xi(x) X_\eta(x) \mu(dx) = \int_{\mathbf{R}} \xi(t) \eta(t) dt = \langle \xi, \eta \rangle, \quad (2)$$

で与えられる. このことから, $\xi \mapsto X_\xi$ は $L^2(\mathbf{R})$ から $L^2(E^*, \mu)$ の中への等距離写像であることがわかる. したがって, 時間区間 $[0, t]$ の特性関数 $1_{[0, t]}$ に対して, それに ($L^2(\mathbf{R})$ の意味で) 収束する近似列 $\xi_n \in E$ をとって,

$$B_t \equiv \langle x, 1_{[0, t]} \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{\xi_n}(x) \quad (3)$$

が定義される. このとき, (2) から,

$$B_0 = 0, \quad \mathbf{E}(B_t) = 0, \quad \mathbf{E}(B_s B_t) = \min\{s, t\}, \quad (4)$$

が確かめられ, $\{B_t; t \geq 0\}$ はブラウン運動であることがわかる.

ブラウン運動の時間微分がホワイトノイズである. しかしながら, (3) から示唆されるように,

$$W_t(x) = \frac{d}{dt} B_t = \langle x, \delta_t \rangle, \quad t \geq 0, \quad x \in E^*,$$

は, うまく定義されていない. 実際, 超関数 x に対して, 特定の1点 t における値 $x(t)$ は意味をもたないからである. さらに, (4) を形式的に微分すれば,

$$\mathbf{E}(W_t) = 0, \quad \mathbf{E}(W_s W_t) = \delta(s - t), \quad (5)$$

というガウス型ホワイトノイズを特徴付ける周知の式が導かれる. 我々は, $\{W_t(x)\}$ に厳密な意味を与えるために, 「ホワイトノイズ超関数」という概念を導入する.

まず, 次の基本的事実が重要である. 本論文では, ヒルベルト空間 H 上の (ボゾン) フォック空間 $\Gamma(H)$ を, n 重対称テンソル積空間 $H^{\hat{\otimes} n}$ の直和空間にノルムを

$$\|\phi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |f_n|^2, \quad \phi = (f_n)_{n=0}^{\infty}, \quad f_n \in H^{\hat{\otimes} n},$$

によって定めたものとして定義する.²⁾

定理 2.1 (ウィナー・伊藤・シーガルの同型) ガウス空間 (E^*, μ) 上の $\mathbf{C}$ -値 L^2 -関数の全体 $L^2(E^*, \mu)$ は, フォック空間 $\Gamma(H_{\mathbf{C}})$ と同型である. その同型は, 対応

$$\phi_\xi(x) = e^{\langle x, \xi \rangle - \langle \xi, \xi \rangle / 2} \leftrightarrow \left(1, \xi, \frac{\xi^{\otimes 2}}{2!}, \dots, \frac{\xi^{\otimes n}}{n!}, \dots \right), \quad \xi \in E_{\mathbf{C}}, \quad (6)$$

によって一意的に定まる.

ブラウン運動に対しては,

$$B_t(x) \leftrightarrow (0, 1_{[0, t]}, 0, \dots)$$

が対応するから, ホワイトノイズに対しては

$$W_t(x) \leftrightarrow (0, \delta_t, 0, \dots).$$

明らかに, $W_t \notin L^2(E^*, \mu)$ であって, ホワイトノイズを取り込むためには空間を拡大しなければならない.

²⁾ 上記の和で $n!$ をつけない方が一般的のようだが, 本質的な差異は生じない.

なお, (6) の右辺も同じ記号 ϕ_ξ で表し, 指数ベクトルと呼ぶ. 内積の等式

$$\langle\langle \phi_\xi, \phi_\eta \rangle\rangle = e^{(\xi, \eta)}, \quad \xi, \eta \in E_C,$$

から, ϕ_ξ はノルムが 1 となるような正規化は施されていないことは明らかであるが, ϕ_ξ はコヒーレント「状態」とも呼ばれる. なお, $\phi_\xi \in L^2(E^*, \mu)$ は $\xi \in H_C$ に対しても定義される.

命題 2.2 $\{\phi_\xi; \xi \in H_C\} \subset L^2(E^*, \mu)$ は一次独立であり, 稠密部分空間を張る.

以上の事実によって, 指数ベクトル (コヒーレント状態) は過剰完全性をもつことがわかる.

2.3 荷重つきフォック空間 いよいよ, ホワイトノイズ $\{W_t\}$ を取り込むためにフォック空間 $\Gamma(H_C) \cong L^2(E^*, \mu)$ を拡大する. そのために, まず, フォック空間の定義を拡張しておく必要がある. 正数列 $\alpha = \{\alpha(n)\}_{n=0}^\infty$ が与えられたとして,

$$\Gamma_\alpha(H) = \left\{ \phi = (f_n)_{n=0}^\infty; f_n \in H^{\otimes n}, \|\phi\|^2 \equiv \sum_{n=0}^\infty n! \alpha(n) |f_n|^2 < \infty \right\},$$

とおくと, $\Gamma_\alpha(H)$ もまたヒルベルト空間になる. これを荷重つきフォック空間と呼ぶことにする. 通常のフォック空間は荷重を $\alpha(n) \equiv 1$ のようにとったものである.

本論文を通して, 荷重 $\alpha = \{\alpha(n)\}_{n=0}^\infty$ は以下の性質をみたしているものと仮定する:

$$(A1) \quad 1 = \alpha(0) \leq \alpha(1) \leq \alpha(2) \leq \cdots;$$

$$(A2) \quad G_\alpha(t) \equiv \sum_{n=0}^\infty \frac{\alpha(n)}{n!} t^n \text{ の収束半径は } \infty;$$

$$(A3) \quad \tilde{G}_\alpha(t) \equiv \sum_{n=0}^\infty t^n \frac{n^{2n}}{n! \alpha(n)} \left\{ \inf_{s>0} \frac{G_\alpha(s)}{s^n} \right\} \text{ は正の収束半径をもつ};$$

$$(A4) \quad \text{すべての } n, m \text{ に対して } \alpha(n)\alpha(m) \leq C_1^{n+m} \alpha(n+m) \text{ が成り立つような定数 } C_1 > 0 \text{ が存在する};$$

$$(A5) \quad \text{すべての } n, m \text{ に対して } \alpha(n+m) \leq C_2^{n+m} \alpha(n)\alpha(m) \text{ が成り立つような定数 } C_2 > 0 \text{ が存在する}.$$

上記の仮定は, ホワイトノイズ理論における重要な要素である S 変換の特徴付け・作用素シンボルの特徴付け・作用素のウィック積, などのために必要である. 例としては, $0 \leq \beta < 1$ を定数として, $\alpha(n) = (n!)^\beta$ や母関数

$$G_{\text{Bell}(k)}(t) = \frac{\overbrace{\exp(\exp(\cdots(\exp t)\cdots))}^{k\text{-times}}}{\exp(\exp(\cdots(\exp 0)\cdots))} = \sum_{n=0}^\infty \frac{B_k(n)}{n!} t^n,$$

で定義される k 階級ベル数列 $\{B_k(n)\}$ などが知られている [3].

なお, 数列 $\alpha = \{\alpha(n)\}$ に付随する母関数 $G_\alpha(t)$ に対する次の性質は, ノルム評価などに有用である: 任意の $s, t \geq 0$ に対して,

- (1) $G_\alpha(0) = 1, s \leq t \implies G_\alpha(s) \leq G_\alpha(t).$
- (2) $G_\alpha(s)G_\alpha(t) \leq G_\alpha(C_1(s+t)).$
- (3) $G_\alpha(s+t) \leq G_\alpha(C_2s)G_\alpha(C_2t).$
- (4) $e^s G_\alpha(t) \leq G_\alpha(s+t).$
- (5) $e^t \leq G_\alpha(t).$

2.4 ホワイトノイズ超関数 ゲルファントの三組 (1) を構成する $E = \mathcal{S}(\mathbf{R})$ は可算ヒルベルト空間という構造をもつ. 各 $p \geq 0$ に対して, E をノルム

$$|\xi|_{\pm p} = |A^{\pm p} \xi|_0, \quad A = 1 + t^2 - \frac{d^2}{dt^2},$$

で完備化してできるヒルベルト空間を $E_{\pm p}$ とする. このとき,

$$E \cong \text{proj} \lim_{p \rightarrow \infty} E_p = \bigcap_{p \geq 0} E_p, \quad E^* \cong \text{ind} \lim_{p \rightarrow \infty} E_{-p} = \bigcup_{p \geq 0} E_{-p}, \quad (7)$$

が成り立つ.³⁾ 次に, E_p 上の荷重付フォック空間 $\Gamma_\alpha(E_p)$ を考える. $\Gamma_\alpha(E_p)_{\mathbf{C}} \subset \Gamma(H_{\mathbf{C}})$ に注意しておこう.⁴⁾ 標準的な議論によって,

$$\mathcal{W} = \text{proj} \lim_{p \rightarrow \infty} \Gamma_\alpha(E_p)_{\mathbf{C}}$$

は核型空間となり, ゲルファントの三組:

$$\mathcal{W} \subset \Gamma(H_{\mathbf{C}}) \cong L^2(E^*, \mu) \subset \mathcal{W}^* \quad (8)$$

が得られる. これをコ克蘭・クオ・セングプタ空間, 略してCKS空間と呼ぶ [3]. $\mathcal{W}^*$ の元が**ホワイトノイズ超関数**である. 定義から $\mathcal{W}$ の位相はノルム族:

$$\|\phi\|_{p,+}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! \alpha(n) |f_n|_p^2, \quad \phi = (f_n), \quad p \geq 0.$$

で与えられる. (7) と同様に,

$$\mathcal{W}^* \cong \text{ind} \lim_{p \rightarrow \infty} \Gamma_{\alpha^{-1}}(E_{-p})_{\mathbf{C}} = \bigcup_{p \geq 0} \Gamma_{\alpha^{-1}}(E_{-p})_{\mathbf{C}}$$

が位相も込めて成り立つ. $\mathcal{W}^* \times \mathcal{W}$ 上の標準 $\mathbf{C}$ -双線形形式を $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ のように記すと,⁵⁾

$$\langle\langle \Phi, \phi \rangle\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n! \langle F_n, f_n \rangle, \quad \Phi = (F_n) \in \mathcal{W}^*, \quad \phi = (f_n) \in \mathcal{W}.$$

³⁾ 局所凸空間 $\mathfrak{X}$ の双対空間 $\mathfrak{X}^*$ には強双対位相 (strong dual topology) を考える.

⁴⁾ 一般に, 実ベクトル空間 $\mathfrak{X}$ に対してその複素化を $\mathfrak{X}_{\mathbf{C}}$ で記す.

⁵⁾ 記号の混乱を避けるために, 本論文では, 複素ヒルベルト空間に対してエルミート内積の記号を導入しない. したがって, $\|\phi\|_0^2 = \langle\langle \bar{\phi}, \phi \rangle\rangle$ が成り立つ.

さらに,

$$\|\Phi\|_{-p,-}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\alpha(n)} |F_n|_{-p}^2, \quad \Phi = (F_n) \in \mathcal{W}^*,$$

と定義すると, シュワルツ不等式の拡張

$$|\langle \Phi, \phi \rangle| \leq \|\Phi\|_{-p,-} \|\phi\|_{p,+}, \quad p \geq 0,$$

を得る. 以上のことから,

定理 2.3 $t \mapsto B_t \in \mathcal{W}^*$ は C^∞ 級写像であり,

$$\frac{d}{dt} B_t = W_t \iff B_t = \int_0^t W_s ds$$

が $\mathcal{W}^*$ で成り立つ. もちろん, $t \mapsto W_t \in \mathcal{W}^*$ も C^∞ 級写像である.

2.5 S 変換と特徴づけ定理 指数ベクトル ϕ_ξ に対して,

$$\|\phi_\xi\|_{p,+}^2 = G_\alpha(|\xi|_p^2), \quad \xi \in E_{\mathbf{C}}.$$

よって, $\xi \in E_{\mathbf{C}}$ であれば, $\phi_\xi \in \mathcal{W}$ がわかる. さらに, $\{\phi_\xi; \xi \in E_{\mathbf{C}}\} \subset \mathcal{W}$ は一次独立であり, 稠密部分空間を張ることが示される. したがって, ホワイトノイズ超関数 $\Phi \in \mathcal{W}^*$ は, 指数ベクトルに対する値で一意的に定まる. そこで,

$$S\Phi(\xi) = \langle \Phi, \phi_\xi \rangle, \quad \xi \in E_{\mathbf{C}},$$

とおいて, これを Φ の S 変換と呼ぶ. 実際, $\Phi = (F_n)$ に対して,

$$S\Phi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle F_n, \xi^{\otimes n} \rangle, \quad \xi \in E_{\mathbf{C}}. \quad (9)$$

さらに, S 変換そのものの解析的な特徴付けとして次の結果は重要である.

定理 2.4 [3] 関数 $F: E_{\mathbf{C}} \rightarrow \mathbf{C}$ が, あるホワイトノイズ超関数 $\Phi \in \mathcal{W}^*$ の S 変換であるための必要十分条件は

(F1) 任意の $\xi, \xi_1 \in E_{\mathbf{C}}$ に対して, $z \mapsto F(z\xi + \xi_1)$ が全複素平面 $\mathbf{C}$ 上の正則関数;

(F2) 適当な定数 $C \geq 0, p \geq 0$ によって

$$|F(\xi)|^2 \leq CG_\alpha(|\xi|_p^2), \quad \xi \in E_{\mathbf{C}}.$$

このとき,

$$\|\Phi\|_{-(p+q),-}^2 \leq C\tilde{G}_\alpha(\|A^{-q}\|_{\text{HS}}^2),$$

が任意の $q > 1/2$ で $\tilde{G}_\alpha(\|A^{-q}\|_{\text{HS}}^2) < \infty$ をみたすもの⁶⁾ に対して成り立つ.

⁶⁾ $\lim_{q \rightarrow \infty} \|A^{-q}\|_{\text{HS}} \rightarrow 0$ によって, このような q は必ず存在する.

2.6 ホワイトノイズ作用素論 ホワイトノイズ理論において、ゲルファントの三組 (8) が基礎にあるのだから、 $\mathcal{W}$ から $\mathcal{W}^*$ への連続作用素を研究することが重要である。そのような作用素を**ホワイトノイズ作用素**といい、その全体を $\mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{W}^*)$ で表す。ホワイトノイズ作用素は、可算ヒルベルト空間による量子力学の定式化 [1] における (一般化された) オブザーバブルと共通の観点にたつものである。

ホワイトノイズ作用素の中で、各点ごとの消滅作用素 a_t は最も基本的な作用素である。 $\phi \in \mathcal{W}$ に対しては、

$$a_t \phi(x) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\phi(x + \theta \delta_t) - \phi(x)}{\theta}, \quad x \in E^*, \quad t \in \mathbf{R},$$

が成り立つ。つまり、 a_t はガウス空間 E^* における δ_t 方向の座標軸に沿った偏微分に他ならないのである。消滅作用素 a_t をフォック空間上の作用素とみなしたければ、定義域を $\mathcal{W}$ などに制限することで、稠密な定義域をもつ非有界作用素となるが、その共役作用素である生成作用素 a_t^* は、同一のフォック空間上の作用素として定式化できない。⁷⁾ この困難を避けるため、多くの場合は、適当なテスト関数 $f(t)$ と積分して t をぼかすことである。我々は、このようなアプローチを採用しない。CKS 空間で考えれば、 t をぼかすことなく、 $a_t^* \in \mathcal{L}(\mathcal{W}^*, \mathcal{W}^*)$ として定式化されるのである。さらに、

定理 2.5 $t \mapsto a_t \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{W})$, $t \mapsto a_t^* \in \mathcal{L}(\mathcal{W}^*, \mathcal{W}^*)$ はともに C^∞ 級写像である。

各点毎の生成・消滅作用素のペア $\{a_t, a_t^*\}$ を**量子ホワイトノイズ**という。量子ホワイトノイズは、フォック空間上の作用素を表示する上でも基本的であり、任意の $\Xi \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{W}^*)$ の標準的展開に応用される (概説は [13], [15] など)。古典ホワイトノイズとの関係は、

$$W_t = a_t + a_t^*$$

に集約される。左辺は、 $W_t \in \mathcal{W}^*$ によるかけ算作用素を意味する。実際、任意の $\Phi \in \mathcal{W}^*$ は、

$$\langle\langle \Phi \phi, \psi \rangle\rangle = \langle\langle \Phi, \phi \psi \rangle\rangle, \quad \phi, \psi \in \mathcal{W},$$

によって、 $\mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{W}^*)$ に属する作用素と同一視される。これが、ホワイトノイズ理論における「古典=量子対応」である。

さて、 $\Xi \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{W}^*)$ に対して

$$\hat{\Xi}(\xi, \eta) = \langle\langle \Xi \phi_\xi, \phi_\eta \rangle\rangle, \quad \xi, \eta \in E_{\mathbf{C}},$$

で定義される関数 $\hat{\Xi} : E_{\mathbf{C}} \times E_{\mathbf{C}} \rightarrow \mathbf{C}$ を Ξ の**シンボル**という。指数ベクトルは $\mathcal{W}$ の稠密部分空間を張るので、連続作用素は、シンボルによって一意的に定まることになる。シンボルは、ホワイトノイズ作用素の指数ベクトルに対する行列成分であり、作用素版 S 変換ともいえる。次の特徴付け定理は極めて基本的である。

定理 2.6 [2] 関数 $\Theta : E_{\mathbf{C}} \times E_{\mathbf{C}} \rightarrow \mathbf{C}$ がある作用素 $\Xi \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{W}^*)$ のシンボルであるための必要十分条件は、

(O1) 任意の $\xi, \xi_1, \eta, \eta_1 \in E_{\mathbf{C}}$ に対して $(z, w) \mapsto \Theta(z\xi + \xi_1, w\eta + \eta_1)$ が、2変数複素関数として、全平面で正則である；

⁷⁾ 非有界作用素に対する共役作用素の定義に従えば、 a_t^* の定義域は $\{0\}$ となる。

(O2) 適当な定数 $K \geq 0, p \geq 0$ をとって

$$|\Theta(\xi, \eta)|^2 \leq K G_\alpha(|\xi|_p^2) G_\alpha(|\eta|_p^2), \quad \xi, \eta \in E_C,$$

の形の評価をもつ.

ホワイトノイズ理論において基本的な項目は他にも多々あるが, ここには述べきれない (詳細は成書 [7], [10]などを参照されたい). ホワイトノイズ作用素論について, 最初に組織的に論じたものは [13] であり, CKS 空間に付随して理論を展開したものとしては [2] を参照されたい. 次の対応表は, 多変数微積分から無限次元における状況を類推する上で役に立つ. 実際, ホワイトノイズ理論におけるフーリエ変換の研究では, 形式的類似が効果的に作用した.

多変数微積分		ホワイトノイズ理論
$\mathbf{R}^n$	基礎空間	$E^* = S'(\mathbf{R})$
$x = (x_1, \dots, x_n)$ $x_k = \langle x, e_k \rangle$	座標系	$x = (x(t); t \in \mathbf{R})$ $x(t) = \langle x, \delta_t \rangle$
$\frac{\partial}{\partial x_k}$	座標微分	$a_t = \frac{\partial}{\partial x(t)}$
dx ルベーグ測度	測度	$\mu(dx)$ ガウス測度
$S(\mathbf{R}^n) \subset L^2(\mathbf{R}^n, dx) \subset S'(\mathbf{R}^n)$	超関数	$\mathcal{W} \subset L^2(E^*, \mu) \subset \mathcal{W}^*$
$\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^* = -\frac{\partial}{\partial x_k}$		a_t^*
$\Delta = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$	ラプラス作用素	$\Delta_G = \int a_t^2 dt$
$-\Delta = \sum \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^* \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)$		$N = \int a_t^* a_t dt$
$\sum x_k^2$	ノルム	$\int : x(t)^2 : dt = \langle : x \otimes x :, \tau \rangle$
$x_j \frac{\partial}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial}{\partial x_j}$	無限小回転	$x(s)a_t - x(t)a_s$
Fourier transform		Kuo's Fourier transform
$\vdots$		$\vdots$

3 複素ホワイトノイズ

3.1 複素ガウス空間 実ガウス空間は、無限次元実ベクトル空間 E^* にガウス測度 μ を備えたものであった。その複素化は $E_{\mathbb{C}}^* = E^* + iE^*$ で与えられるが、考え合わせる測度は μ の直積とはせず、スケール変換したものを用いる。その方が多くの公式が簡明になるからである。

一般に、特性関数

$$e^{-\sigma^2 \|\xi\|_0^2/2} = \int_{E^*} e^{i\langle x, \xi \rangle} \mu_{\sigma^2}(dx), \quad \xi \in E, \quad (10)$$

によって定義される E^* 上の確率測度 μ_{σ^2} を分散 σ^2 のガウス測度と呼ぶ。 E^* 上の分散 $\sigma^2 = 1/2$ のガウス測度を μ' とすれば、その直積測度:

$$\nu(dz) = \mu'(dx)\mu'(dy), \quad z = x + iy \in E_{\mathbb{C}}^*,$$

は、 $E_{\mathbb{C}}^*$ 上の確率測度となる。こうして得られた確率空間 $(E_{\mathbb{C}}^*, \nu)$ を**複素ガウス空間**と呼ぶ [6, Chapter 6]. $z = x + iy \in E^* + iE^*$ の複素共役は、いつも通り $\bar{z} = x - iy$ とする。次は基本的な積分公式であるが、単純な計算によって確かめられる:

$$\int_{E_{\mathbb{C}}^*} e^{\langle \bar{z}, \xi \rangle + \langle z, \eta \rangle} \nu(dz) = e^{\langle \xi, \eta \rangle}, \quad \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \int_{E_{\mathbb{C}}^*} \langle z^{\otimes m}, \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_m \rangle \langle \bar{z}^{\otimes n}, \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_n \rangle \nu(dz) \\ = \delta_{mn} m! \langle \xi_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \xi_m, \eta_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \eta_m \rangle, \quad \xi_i, \eta_j \in E_{\mathbb{C}}. \end{aligned} \quad (12)$$

3.2 複素ガウス空間上の CKS 空間 ウィナー・伊藤・シーガルの同型 (6) と同様に、対応

$$\psi_{\xi}(x) \equiv e^{\sqrt{2}\langle x, \xi \rangle - \langle \xi, \xi \rangle/2} \leftrightarrow \phi_{\xi} \equiv \left(1, \xi, \frac{\xi^{\otimes 2}}{2!}, \dots, \frac{\xi^{\otimes n}}{n!}, \dots\right), \quad \xi \in E_{\mathbb{C}}, \quad (13)$$

を拡張することで、ユニタリ同型 $L^2(E^*, \mu') \cong \Gamma(H_{\mathbb{C}})$ が得られる。ここで、 $E_{\mathbb{C}}^*$ 上の関数と $E^* \times E^*$ 上の関数は

$$\phi \otimes \psi(x + iy) = \phi(x)\psi(y), \quad x, y \in E^*, \quad \phi, \psi \in L^2(E^*, \mu'),$$

によって同一視することにすれば、

$$L^2(E_{\mathbb{C}}^*, \nu) \cong L^2(E^*, \mu') \otimes L^2(E^*, \mu') \cong \Gamma(H_{\mathbb{C}}) \otimes \Gamma(H_{\mathbb{C}}). \quad (14)$$

さらに、 $\mathcal{D} \cong \mathcal{W} \otimes \mathcal{W}$ を導入すれば、ゲルファントの三組 (8) と (14) によって、複素ガウス空間上の CKS 空間:

$$\mathcal{D} \subset L^2(E_{\mathbb{C}}^*, \nu) \subset \mathcal{D}^* \quad (15)$$

が構成された。

補題 3.1 各 $\phi = (f_m) \in \Gamma(H_{\mathbb{C}})$ に対して

$$\omega_{\phi}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle z^{\otimes m}, f_m \rangle$$

が L^2 の意味で定義され、 $\phi \mapsto \omega_{\phi}$ は $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ から $L^2(E_{\mathbb{C}}^*, \nu)$ への等距離写像になる。

証明 (12) に注意して, まず, $f_m \in H_{\mathbf{C}}^{\otimes m}$ に対して $\omega_m(z) = \langle z^{\otimes m}, f_m \rangle$ が L^2 の意味で定義される. もう一度, 同じ理由で $\omega(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \omega_m(z)$ も定義される. ■

$L^2(E_{\mathbf{C}}^*, \nu)$ の部分空間を

$$L^2(E_{\mathbf{C}}^*, \nu)_{\text{HOL}} = \{\omega_{\phi}; \phi \in \Gamma(H_{\mathbf{C}})\}$$

によって定義する. 補題 3.1 とウィナー・伊藤・シーガルの同型 $L^2(E^*, \mu) \cong \Gamma(H_{\mathbf{C}})$ を合わせると, ユニタリ同型

$$L^2(E^*, \mu) \cong L^2(E_{\mathbf{C}}^*, \nu)_{\text{HOL}}$$

が得られる. これが有名なシーガル・バークマン同型 [4] であり, ブラウン運動の汎関数を無限変数の複素関数によって研究する道を拓くものである.

4 ホワイトノイズ超関数のコヒーレント状態表示

4.1 コヒーレント状態表示 当初, 指数ベクトル ϕ_{ξ} の添字 ξ は $E_{\mathbf{C}}$ (または $H_{\mathbf{C}}$) を走るものとしたが, もっと一般化して, $E_{\mathbf{C}}^*$ を走らせる. すなわち, $z \in E_{\mathbf{C}}^*$ に対して,

$$\phi_z = \left(1, z, \frac{z^{\otimes 2}}{2!}, \dots, \frac{z^{\otimes n}}{n!}, \dots\right)$$

のように定義する. 明らかに $\phi_z \in \mathcal{W}^*$ である. このような指数ベクトルの 1 次結合として, 任意のホワイトノイズ超関数 Φ を

$$\Phi = \int_{E_{\mathbf{C}}^*} \rho(z) \phi_z \nu(dz) \quad (16)$$

のように表示することを考えよう. これをコヒーレント状態表示という.

補題 4.1 $\xi \in E_{\mathbf{C}}$ に対して

$$\epsilon_{\xi}(z) = e^{\langle z, \xi \rangle}, \quad z = x + iy \in E_{\mathbf{C}}^*,$$

とおくと $\epsilon_{\xi} \in \mathcal{D}$. さらに, 任意の $\rho \in \mathcal{D}^*$ に対して

$$S\Phi(\xi) = \langle \rho, \epsilon_{\xi} \rangle, \quad \xi \in E_{\mathbf{C}}, \quad (17)$$

をみたす $\Phi \in \mathcal{W}^*$ が一意的に存在する.

証明 まず, $z = x + iy \in E_{\mathbf{C}}^*$ に対して, $\epsilon_{\xi}(z) = e^{\langle z, \xi \rangle} = \psi_{\xi/\sqrt{2}}(x) \psi_{i\xi/\sqrt{2}}(y)$ であるから, $\epsilon_{\xi} = \psi_{\xi/\sqrt{2}} \otimes \psi_{i\xi/\sqrt{2}}$. したがって, 定義によって $\epsilon_{\xi} \in \mathcal{D} \cong \mathcal{W} \otimes \mathcal{W}$. 次に, (17) の右辺を $F(\xi)$ とする. 定理 2.4 の条件 (F1) は明らかにみたされるので, (F2) を示そう. まず, $p \geq 0$ を $\|\rho\|_{-p,-} < \infty$ のように選んでおく.

$$\begin{aligned} |F(\xi)|^2 &\leq \|\rho\|_{-p,-}^2 \|\epsilon_{\xi}\|_{p,+}^2 = \|\rho\|_{-p,-}^2 \|\psi_{\xi/\sqrt{2}}\|_{p,+}^2 \|\psi_{i\xi/\sqrt{2}}\|_{p,+}^2 \\ &= \|\rho\|_{-p,-}^2 G_{\alpha} \left(\left| \xi/\sqrt{2} \right|_p^2 \right) G_{\alpha} \left(\left| i\xi/\sqrt{2} \right|_p^2 \right). \end{aligned}$$

§2.3 で述べた G_α の性質によって,

$$G_\alpha \left(|\xi/\sqrt{2}|_p^2 \right) G_\alpha \left(|i\xi/\sqrt{2}|_p^2 \right) \leq G_\alpha(C_1 |\xi|_p^2) \leq G_\alpha(C_1 \rho^{2q} |\xi|_{p+q}^2),$$

ここで $\rho = \|A^{-1}\|_{\text{OP}} = 1/2$. 次に, $q \geq 0$ を $C_1 \rho^{2q} \leq 1$ のように選べば,

$$|F(\xi)|^2 \leq \|\rho\|_{-p,-}^2 G_\alpha(|\xi|_{p+q}^2),$$

を得るから, (F2) が示された. こうして, 定理 2.4 によって, F はあるホワイトノイズ超関数 $\Phi \in \mathcal{W}^*$ の S 変換である. ■

$\epsilon_\xi(z) = \langle\langle \phi_z, \phi_\xi \rangle\rangle$ に注意して, (17) を形式的に積分で書けば,

$$\langle\langle \Phi, \phi_\xi \rangle\rangle = \int_{E_{\mathbb{C}}^*} \rho(z) \langle\langle \phi_z, \phi_\xi \rangle\rangle \nu(dz)$$

となるから, Φ を (16) のように表示するのは合理的である.

4.2 逆 S 変換 はじめに述べたように, コヒーレント状態は過剰完全系である. この事情は無限次元でも同様であり, コヒーレント状態表示 (16) において密度関数 $\rho(z)$ は一意的に定まらない. 例えば, 任意の $\gamma \in \mathbb{C}$ に対して

$$\phi_\xi = \int_{E_{\mathbb{C}}^*} e^{\langle \bar{z}, \xi \rangle + \gamma \langle z, \xi \rangle - \gamma \langle \xi, \xi \rangle} \phi_z \nu(dz), \quad \xi \in E_{\mathbb{C}},$$

が容易に示される.

ここでは, 一般に, S 変換が密度関数の一つを与えることを注意しておこう. まず, 任意の $\phi \in \mathcal{W}$ に対して, その S 変換 $S\phi$ は自然に, $E_{\mathbb{C}}^*$ 上の関数に

$$S\phi(z) = \langle\langle \phi_z, \phi \rangle\rangle, \quad z \in E_{\mathbb{C}}^*,$$

として拡張される. 級数表示では, $\phi = (f_n)$ に対して

$$S\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle z^{\otimes n}, f_n \rangle, \quad z \in E_{\mathbb{C}}^*.$$

これを拡張して, 任意の $\Phi = (F_n) \in \mathcal{W}^*$ に対しても $S\Phi(z)$ を $\mathcal{D}^*$ の意味で定義することができ, 複素ガウス空間上の正則超関数となる.

定理 4.2 (逆 S 変換) 任意の $\Phi \in \mathcal{W}^*$ に対して,

$$\Phi = \int_{E_{\mathbb{C}}^*} S\Phi(\bar{z}) \phi_z \nu(dz).$$

特に, 任意のホワイトノイズ超関数 Φ はコヒーレント状態表示される.

証明 まず, $\rho(z) = S\Phi(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \bar{z}^{\otimes n}, F_n \rangle$ は $\mathcal{D}^*$ に属することに注意する. その $\rho(z)$ に補題 4.1 を適用すれば,

$$S\Psi(\xi) = \langle \rho, \epsilon_\xi \rangle, \quad \xi \in E_{\mathbf{C}},$$

によって特徴づけられる $\Psi \in \mathcal{W}^*$ が一意的に存在する. 一方,

$$\begin{aligned} S\Psi(\xi) &= \langle \rho, \epsilon_\xi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_{\mathbf{C}}^*} \langle \bar{z}^{\otimes n}, F_n \rangle \left\langle z^{\otimes n}, \frac{\xi^{\otimes n}}{n!} \right\rangle \nu(dz) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle F_n, \xi^{\otimes n} \rangle = S\Phi(\xi), \end{aligned}$$

であるから $\Phi = \Psi$. ■

5 ホワイトノイズ作用素のコヒーレント状態表示

5.1 対角型コヒーレント状態表示 各 $z \in E_{\mathbf{C}}^*$ に対して $Q_z \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{W}^*)$ を

$$Q_z \phi = \langle \phi_z, \phi \rangle \phi_z, \quad \phi \in \mathcal{W}.$$

によって定める. ϕ_z は正規化されていないが,⁸⁾ 作用素 Q_z を ϕ_z の張る 1 次元空間への射影作用素の代わりに使うのである. このような「射影作用素」の 1 次結合としてホワイトノイズ作用素 Ξ を表示したい:

$$\Xi = \int_{E_{\mathbf{C}}^*} \rho(z) Q_z \nu(dz). \quad (18)$$

これを対角型コヒーレント状態表示という.

まず, Q_z のシンボルは,

$$\hat{Q}_z(\xi, \eta) = q_{\xi, \eta}(z) = e^{\langle \bar{z}, \xi \rangle + \langle z, \eta \rangle}, \quad z \in E_{\mathbf{C}}^*, \quad \xi, \eta \in E_{\mathbf{C}}. \quad (19)$$

すると, $z = x + iy$ に対して

$$q_{\xi, \eta}(x + iy) = e^{\langle x, \xi + \eta \rangle} e^{\langle y, i(-\xi + \eta) \rangle} = e^{\langle \xi, \eta \rangle} \psi_{(\xi + \eta)/\sqrt{2}}(x) \psi_{i(-\xi + \eta)/\sqrt{2}}(y). \quad (20)$$

言い替えれば, $q_{\xi, \eta} = e^{\langle \xi, \eta \rangle} \psi_{(\xi + \eta)/\sqrt{2}} \otimes \psi_{i(-\xi + \eta)/\sqrt{2}} \in \mathcal{W} \otimes \mathcal{W} \cong \mathcal{D}$.

補題 5.1 任意の $\rho \in \mathcal{D}^*$ に対して, ホワイトノイズ作用素 $\Xi \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{W}^*)$ で

$$\langle \Xi \phi_\xi, \phi_\eta \rangle = \langle \rho, q_{\xi, \eta} \rangle, \quad \xi, \eta \in E_{\mathbf{C}}. \quad (21)$$

をみたすものが一意的に存在する.

証明は定理 2.6 の簡単な応用であり, 補題 4.1 の証明と類似である. (21) で定義されたホワイトノイズ作用素 Ξ を (18) のように書く.

定理 5.2 [16] すべてのホワイトノイズ作用素 $\Xi \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{W}^*)$ は対角型コヒーレント状態表示可能であり, しかも表示は一意的である.

⁸⁾ 正規化しようにも, 可算ヒルベルト空間で考えているので, ノルムを選ぶ基準もないが.

証明 アウトラインのみ記す. 詳しくは[16]を参照. ホワイトノイズ作用素 $\Xi \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{W}^*)$ が与えられたとしよう. このとき, 定理 2.6 によってホワイトノイズ作用素 $W \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{W}^*)$ で

$$\langle\langle \Xi \phi_\xi, \phi_\eta \rangle\rangle = \langle\langle W \phi_{(\xi+\eta)/\sqrt{2}}, \phi_{i(-\xi+\eta)/\sqrt{2}} \rangle\rangle e^{\langle\xi, \eta\rangle}, \quad \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}}, \quad (22)$$

をみたすものが一意的に存在する. 標準的な同型 $(\mathcal{W} \otimes \mathcal{W})^* \cong \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{W}^*)$ を用いて, $W \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{W}^*)$ に対応する $\rho \in (\mathcal{W} \otimes \mathcal{W})^*$ をとる. このとき, (22) は

$$\langle\langle \Xi \phi_\xi, \phi_\eta \rangle\rangle = \langle\langle \rho, \phi_{(\xi+\eta)/\sqrt{2}} \otimes \phi_{i(-\xi+\eta)/\sqrt{2}} \rangle\rangle e^{\langle\xi, \eta\rangle}. \quad (23)$$

(13), (19), (20) によって, $\phi_{(\xi+\eta)/\sqrt{2}} \otimes \phi_{i(-\xi+\eta)/\sqrt{2}} e^{\langle\xi, \eta\rangle}$ の関数表示は

$$\psi_{(\xi+\eta)/\sqrt{2}}(x) \psi_{i(-\xi+\eta)/\sqrt{2}}(y) e^{\langle\xi, \eta\rangle} = q_{\xi, \eta}(x + iy) = \langle\langle Q_z \phi_\xi, \phi_\eta \rangle\rangle, \quad z = x + iy.$$

すると, (23) は形式的積分

$$\langle\langle \Xi \phi_\xi, \phi_\eta \rangle\rangle = \int_{E_{\mathbb{C}}^*} \rho(z) \langle\langle Q_z \phi_\xi, \phi_\eta \rangle\rangle \nu(dz),$$

に表され, Ξ の対角型コヒーレント状態表示 (18) が得られた. 一意性は ρ が Ξ のシンボルによって一意的に表されていることから従う. ■

定理 5.3 (単位の分解) 恒等作用素の対角型コヒーレント状態表示は,

$$I = \int_{E_{\mathbb{C}}^*} Q_z \nu(dz)$$

のように与えられる.

証明は, 両辺のシンボルを計算すればよい.

6 ウィック積と指数ベクトルの過剰完全性

6.1 積分核作用素 各 $\kappa_{l,m} \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*$ に対してホワイトノイズ作用素を

$$\Xi_{l,m}(\kappa_{l,m}) = \int_{\mathbb{R}^{l+m}} \kappa_{l,m}(s_1, \dots, s_l, t_1, \dots, t_m) a_{s_1}^* \cdots a_{s_l}^* a_{t_1} \cdots a_{t_m} ds_1 \cdots ds_l dt_1 \cdots dt_m$$

で与える. これを積分核作用素と称する. 積分は, 一般には形式的なものであつて, 正確な定義や詳しい性質は [2], [13, Chapter 4].

補題 6.1 $F \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes m})^*$ に対して

$$\Xi_{0,m}(F) = \int_{E_{\mathbb{C}}^*} \langle z^{\otimes m}, F \rangle Q_z \nu(dz), \quad \Xi_{m,0}(F) = \int_{E_{\mathbb{C}}^*} \langle \bar{z}^{\otimes m}, F \rangle Q_z \nu(dz). \quad (24)$$

証明 $\rho(z) = \langle z^{\otimes m}, F \rangle$ とおく. 定義から容易に判るように, $\rho \in \mathcal{D}^*$ であり, ホワイトノイズ作用素

$$\Xi = \int_{E_{\mathbb{C}}^*} \langle z^{\otimes m}, F \rangle Q_z \nu(dz)$$

が定義される. したがって, (24) のためには両辺のシンボルの一致をみればよい.

$$\hat{\Xi}(\xi, \eta) = \langle \rho, q_{\xi, \eta} \rangle = \int_{E_{\mathbb{C}}^*} \langle z^{\otimes m}, F \rangle e^{(\bar{z}, \xi) + (z, \eta)} \nu(dz)$$

であるが, ガウス積分における直交関係式 (12) によって,

$$\hat{\Xi}(\xi, \eta) = \langle F, \xi^{\otimes m} \rangle e^{(\xi, \eta)} = \Xi_{0, m}(F)^\wedge(\xi, \eta).$$

よって示された. (24) の第 2 式は, 第 1 式の双対である. ■

デルタ関数 $\delta_t \in E^*$ に対しては $z(t) = \langle z, \delta_t \rangle$ と書くのが自然であろう. このとき $\{z(t)\}$ は複素ホワイトノイズと呼ばれる [6]. 補題 6.1 の特別な場合として, 量子ホワイトノイズの対角型コヒーレント状態表示が

$$a_t = \int_{E_{\mathbb{C}}^*} z(t) Q_z \nu(dz), \quad a_t^* = \int_{E_{\mathbb{C}}^*} \overline{z(t)} Q_z \nu(dz),$$

のように得られる.

6.2 ホワイトノイズ超関数のウィック積 2つのホワイトノイズ超関数 $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{W}^*$ に対して, 新しい超関数 $\Psi \in \mathcal{W}^*$ を

$$S\Psi(\xi) = S\Phi_1(\xi) \cdot S\Phi_2(\xi), \quad \xi \in E_{\mathbb{C}},$$

をみたすものとして定義する. この定義の正当性は定理 2.4 による. この場合, $\Psi = \Phi_1 \diamond \Phi_2$ のように記しウィック積と呼ぶ.

補題 6.2 ホワイトノイズ超関数 $\Phi \in \mathcal{W}^*$ を一つ固定する. このとき, 写像 $W_\Phi: \phi \mapsto \Phi \diamond \phi$ は $\mathcal{W}$ から $\mathcal{W}^*$ への連続線形写像である.

証明 シンボルを計算する:

$$\begin{aligned} \langle W_\Phi \phi_\xi, \phi_\eta \rangle &= \langle \Phi \diamond \phi_\xi, \phi_\eta \rangle = S(\Phi \diamond \phi_\xi)(\eta) \\ &= S\Phi(\eta) \cdot S\phi_\xi(\eta) = \langle \Phi, \phi_\eta \rangle e^{(\xi, \eta)}. \end{aligned} \quad (25)$$

$p \geq 0$ を $\|\Phi\|_{-p, -} < \infty$ のように選ぶと,

$$\begin{aligned} |\langle W_\Phi \phi_\xi, \phi_\eta \rangle|^2 &\leq \|\Phi\|_{-p, -}^2 \|\phi_\eta\|_{p, +}^2 e^{2|\langle \xi, \eta \rangle|} \\ &\leq \|\Phi\|_{-p, -}^2 G_\alpha(|\eta|_p^2) e^{|\xi|_p^2 + |\eta|_p^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

ここで簡単な不等式 $2|\langle \xi, \eta \rangle| \leq |\xi|_0^2 + |\eta|_0^2 \leq |\xi|_p^2 + |\eta|_p^2$ を用いた. さて, G_α の性質を用いて, (26) は

$$|\langle W_\Phi \phi_\xi, \phi_\eta \rangle|^2 \leq \|\Phi\|_{-p, -}^2 G_\alpha(2|\eta|_p^2) G_\alpha(|\xi|_p^2) \leq \|\Phi\|_{-p, -}^2 G_\alpha(|\eta|_{p+q}^2) G_\alpha(|\xi|_{p+q}^2)$$

となる. ただし, $q \geq 0$ は

$$2|\eta|_p^2 \leq 2\rho^{2q}|\eta|_{p+q}^2 \leq |\eta|_{p+q}^2$$

をみたすように選ぶ. あとは, シンボルの特徴付け定理 (定理 2.6) を応用すればよい. ■

補題 6.2 で定義した作用素 $W_\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{W}^*)$ をウィックかけ算作用素と呼ぶ.

定理 6.3 ウィックかけ算作用素の対角型コヒーレント状態表示は

$$W_\Phi = \int_{E_C^*} S\Phi(\bar{z}) Q_z \nu(dz), \quad \Phi \in \mathcal{W}^*, \quad (27)$$

で与えられる.

証明 $\Phi = (F_m)$ とおくと,

$$S\Phi(\bar{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle \bar{z}^{\otimes m}, F_m \rangle$$

であり, $\mathcal{D}^*$ の元とみなせる. そこで, 対角型コヒーレント状態表示

$$\Xi = \int_{E_C^*} S\Phi(\bar{z}) Q_z \nu(dz)$$

を考える. 補題 6.1 から

$$\Xi = \sum_{m=0}^{\infty} \Xi_{m,0}(F_m),$$

であるから,

$$\hat{\Xi}(\xi, \eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle F_m, \eta^{\otimes m} \rangle e^{\langle \xi, \eta \rangle} = S\Phi(\eta) e^{\langle \xi, \eta \rangle} = \langle\langle \Phi, \phi_\eta \rangle\rangle e^{\langle \xi, \eta \rangle}.$$

これは (25) と一致し, $\Xi = W_\Phi$ が従う. ■

なお, 逆 S 変換 (定理 4.2) は, $W_\Phi \phi_0 = \Phi$ に注意して, (27) の両辺を真空 ϕ_0 に作用させれば得られる.

6.3 指数ベクトルの過剰完全性 $\mathcal{D}_{\text{AH}}$ 上で 0 になる $\rho \in \mathcal{D}^*$ の全体を $\mathcal{D}_{\text{AH}}^\perp$ と記す. 言い替えば, $\rho \in \mathcal{D}^*$ であって, 任意の $\phi \in \mathcal{D}_{\text{HOL}} \equiv \mathcal{D} \cap L^2(E_C^*, \nu)_{\text{HOL}}$ に対して $\langle\langle \rho, \phi \rangle\rangle = 0$ となる⁹⁾ ような ρ の全体である.

定理 6.4 [17] $\rho \in \mathcal{D}^*$ に対して, コヒーレント状態表示によるホワイトノイズ超関数と対角型コヒーレント状態表示によるホワイトノイズ作用素

$$\Phi = \int_{E_C^*} \rho(z) \phi_z \nu(dz), \quad \Xi = \int_{E_C^*} \rho(z) Q_z \nu(dz),$$

を考えると, 次の 4 条件は同値である:

⁹⁾ $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ はエルミート内積ではなく, $\mathbf{C}$ -双線形形式であることに注意せよ.

- (i) $\rho \in \mathcal{D}_{\text{AH}}^\perp$;
- (ii) $\Phi = 0$;
- (iii) Ξ は真空ベクトルを消す: $\Xi\phi_0 = 0$;
- (iv) Ξ は消滅過程による量子確率積分である, すなわち, $L \in E_{\mathbb{C}}^* \otimes \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{W}^*)$ によって

$$\Xi = \int_{\mathbb{R}} L(t) a_t dt$$

のように表示される.

証明 (i) $\implies$ (ii). 補題 4.1 によって,

$$S\Phi(\xi) = \langle\langle \rho, \epsilon_\xi \rangle\rangle, \quad \xi \in E_{\mathbb{C}}.$$

$\epsilon_\xi \in \mathcal{D}_{\text{HOL}}$ を思い出せば, 主張は明らかである.

(ii) $\implies$ (i). 容易にわかるように, $t \mapsto \langle\langle \rho, \epsilon_{t\xi} \rangle\rangle$ は全複素平面で正則である. したがって, すべての $t \in \mathbb{C}$ に対して $0 = S\Phi(t\xi) = \langle\langle \rho, \epsilon_{t\xi} \rangle\rangle$ が成り立つので

$$\langle\langle \rho, \omega_m \rangle\rangle = 0, \quad \omega_m(z) = \langle z^{\otimes m}, \xi^{\otimes m} \rangle.$$

これがすべての $\xi \in E_{\mathbb{C}}$ で成り立つので, $\rho \in \mathcal{D}_{\text{AH}}^\perp$.

(ii) $\iff$ (iii). $Q_z\phi_0 = \phi_z$ から明らかである.

(iii) $\iff$ (iv). Ξ を積分核作用素で展開して $\Xi = \sum_{l,m=0}^{\infty} \Xi_{l,m}(\kappa_{l,m})$ とおく. そうすれば, 条件 (iii) は, すべての $\eta \in E_{\mathbb{C}}$ に対して $\langle\langle \Xi\phi_0, \phi_\eta \rangle\rangle = \hat{\Xi}(0, \eta) = 0$ が成り立つこと, すなわち,

$$\hat{\Xi}(0, \eta) = \sum_{l=0}^{\infty} \langle\langle \kappa_{l,0}, \eta^{\otimes l} \rangle\rangle = 0, \quad \eta \in E_{\mathbb{C}},$$

と言い替えて良い. これは, さらに, すべての $l \geq 0$ に対して $\kappa_{l,0} = 0$ と同値である. したがって, Ξ は 1 個以上の消滅作用素を含んでいる積分核作用素の和となる. そのような作用素は, 消滅作用素を 1 個くくる形の因数分解によって, 消滅過程による量子確率積分である. なお, ノルム収束などを含む厳密な取り扱いについては [14, Section 6] を参照されたい. ■

定理 6.5 $\Phi \in \mathcal{W}^*$ とする. $\rho \in \mathcal{D}^*$ が

$$\Phi = \int_{E_{\mathbb{C}}^*} \rho(z) \phi_z \nu(dz)$$

をみたすための必要十分条件は

$$\rho = \rho_1 + \rho_2, \quad \rho_1 \in \mathcal{D}_{\text{AH}}^*, \quad \rho_2 \in \mathcal{D}_{\text{AH}}^\perp,$$

と分解したとき, $\rho_1(z) = S\Phi(\bar{z})$ となることである.

これによって, ホワイトノイズ超関数のコヒーレント状態表示の多様性が完全に記述された. 多様な密度関数の中で $\rho(z) = S\Phi(\bar{z})$ は, 反正則関数として一意的である. また, ホワイトノイズ超関数をウィックかけ算作用素とみたとき, その対角型コヒーレント状態表示は一意的であるが, そこに現れる密度関数が $\rho(z) = S\Phi(\bar{z})$ という意味でも特別な意味がある.

参考文献

- [1] A. Bohm and M. Gadella: “Dirac Kets, Gamow Vectors and Gel’fand Triples,” Lect. Notes in Phys. **348**, Springer-Verlag, 1989.
- [2] D. M. Chung, U. C. Ji and N. Obata: *Higher powers of quantum white noises in terms of integral kernel operators*, Infinite Dimen. Anal. Quantum Prob. **1** (1998), 533–559.
- [3] W. G. Cochran, H.-H. Kuo and A. Sengupta: *A new class of white noise generalized functions*, Infinite Dimen. Anal. Quantum Prob. **1** (1998), 43–67.
- [4] L. Gross and P. Malliavin: *Hall’s transform and the Segal-Bargmann map*, in “Itô’s Stochastic Calculus and Probability Theory (N. Ikeda, S. Watanabe, M. Fukushima and H. Kunita (Eds.),” pp. 73–116, Springer-Verlag, 1996.
- [5] T. Hida: “Analysis of Brownian Functionals,” Carleton Math. Lect. Notes, no. 13, Carleton University, Ottawa, 1975.
- [6] T. Hida: “Brownian Motion,” Springer-Verlag, 1980.
- [7] T. Hida, H.-H. Kuo, J. Potthoff and L. Streit: “White Noise,” Kluwer Academic, 1993.
- [8] J. R. Klauder and B.-S. Skagerstam: “Coherent States,” World Scientific, 1985.
- [9] J. R. Klauder and E. C. G. Sudarshan: “Fundamentals of Quantum Optics,” Benjamin, 1968.
- [10] H.-H. Kuo: “White Noise Distribution Theory,” CRC Press, 1996.
- [11] P. Lévy: “Problèmes Concrets d’Analyse Fonctionnelle,” Gauthier-Villars, Paris, 1951.
- [12] D. Nualart: “The Malliavin Calculus and Related Topics,” Springer-Verlag, 1995.
- [13] N. Obata: “White Noise Calculus and Fock Space,” Lect. Notes in Math. Vol. 1577, Springer-Verlag, 1994.
- [14] N. Obata: *Integral kernel operators on Fock space – Generalizations and applications to quantum dynamics*, Acta Appl. Math. **47** (1997), 49–77.
- [15] 尾畑伸明: ホワイトノイズによる量子確率解析, 物性研究 **62** (1994), 62–85; 量子ホワイトノイズの数学的基礎, 物性研究 **66** (1996), 76–94; ホワイトノイズ超関数と量子確率微分方程式, 物性研究 **69** (1997), 19–38; ホワイトノイズと量子確率解析の非線形拡張, 物性研究 **72** (1999), 345–360.
- [16] N. Obata: *Coherent state representations in white noise calculus*, to appear in Can. Math. Proceedings Series, 2000.
- [17] N. Obata: *Inverse S-transform, Wick product and overcompleteness of exponential vectors*, preprint, 2000.
- [18] 山崎泰郎: 『無限次元空間上の測度 (上)』 紀伊國屋, 1978.