

氏 名	い 稲 ば 場 み 道 あ 明
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 2382 号
学位授与の日付	平 成 13 年 7 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 学 専 攻
学位論文題目	On the moduli of stable sheaves on some nonreduced projective schemes (重複構造を持つ射影スキーム上の安定層のモジュライについて)
論文調査委員	(主 査) 教 授 丸 山 正 樹 助教授 森 脇 淳 講 師 加 藤 文 元

論 文 内 容 の 要 旨

コンパクトリーマン面の基本群の既約ユニタリ表現から構成されるベクトル束が幾何学的不変式論における安定の概念と同等であることが発見され、安定ベクトル束の概念が導入された。これは非特異射影的多様体上の振れない接続層に拡張され、安定層と呼ばれている。不変量を共有する安定層の集合には普遍性を持った代数的スキームの構造が入り（安定層のモデュライと呼ばれる）その構造自身が豊かな代数幾何学の対象であるのみならず、基底多様体の研究に強力な道具を提供している。

C. Simpson は安定層の概念を純次元の接続層まで拡張して、そのモデュライの構成に成功した。C. Simpson の一般化は、基底多様体から非特異であるという仮定を取り去るのみならず、可約あるいは被約でない射影スキーム上で安定層のモデュライを扱うことを可能にした。

申請者は参考論文1で比較的扱いやすい構造を持った可約な射影スキーム上の安定層を詳しく調べ、安定層を取り扱いやすいデータで表現をして、放物安定層との関係を明らかにすることにより、もとの安定層のモデュライの詳しい構造を解析することに成功した。非特異な射影多様体の退化として現れる可約な射影スキームにこの結果を応用することによって、モデュライの退化の研究に足場を提供することになる。主論文において申請者はより一層退化した場合として、被約でない射影スキーム上で安定層のモデュライの構造を研究し、顕著な結果を得ている。

以下、詳しく申請者の主論文の結果を述べることにする。 X は射影スキームとして、 O_X の接続イデアル層 I_{X_0} で $I_{X_0}^{n+1}=0$ かつ各 $I_{X_0}^{n-m}$ が可逆 $O_X/I_{X_0}^{m+1}$ -加群となるものが存在すると仮定する。 $I_{X_0}^{m+1}$ で定義される X の閉部分スキームを X_m で表すことにすると、 X 上の接続層 E が $O_{X_{n-1}}$ -加群 E_1 と O_{X_0} -加群 E_0 の O_X -加群としての拡大

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E \longrightarrow E_0 \longrightarrow 0$$

の形に標準的に書ける。この拡大はある自然な条件を充たすが、この条件を充たす拡大類 $\alpha \in \text{Ext}_X^1(E_0, E_1)$ を使って、 E と (E_0, E_1, α) との間で一対一対応が出来る。 E_0, E_1 の Hilbert 多項式を P_0, P_1 として、これらの不変量を固定した拡大で E が安定なものの集合を $\text{ext-}\mathcal{M}_X^{P_0, P_1}$ とし Hilbert 多項式が $P=P_0+P_1$ となる安定層の集合を $\mathcal{M}_X^P$ とする。

定理 $\text{ext-}\mathcal{M}_X^{P_0, P_1}$ はモデュライスキーム $\text{ext-}\mathcal{M}_X^{P_0, P_1}$ を持ち、それは $\mathcal{M}_X^P$ のモデュライ $\mathcal{M}_X^P$ の部分スキームである。

申請者は $\text{ext-}\mathcal{M}_X^{P_0, P_1}$ を $\mathcal{M}_X^P$ の存在を使う間接的な方法で構成した後、層の拡大であるという性質を直接利用して再構成している。後の方法は O_{X_0} -加群 E_0 のパラメーター付け、 $O_{X_{n-1}}$ -加群 E_1 のパラメーター付け、 O_X -加群としての拡大

$$(\alpha) \quad 0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E(\alpha) \longrightarrow E_0 \longrightarrow 0$$

で適当な条件を充たすもののパラメーター付け、と段階を積み重ねて、これのある線型代数群の作用による商空間が求める

モデュライになる、というものである。一見複雑に見えるこの構成法は、具体的な場合に適用してみると意外なほど有効であることが分かる。申請者は主論文の後半で曲線と二重平面の場合に前半の結果を応用して、モデュライの構造について興味ある結果を出している。

非特異な代数曲線に2重構造を導入した場合には $\text{ext}-M_X^{P_0, P_1}$ は非特異であることを示した後、申請者はこの場合の安定層のモデュライは一般に被約でなく、従って M_X^P での被約化が $\text{ext}-M_X^{P_0, P_1}$ になることを証明している。

もう一つの具体例として、申請者は二重平面上のモデュライ空間を詳しく調べている。二重平面は P^3 の2次超曲面の最も極端な退化である。2次超曲面の安定層のモデュライは（自然な偏極構造を採れば）非特異であり、次元も期待されたものになるという、大変素直な形をしており、ある意味ではよくわかる世界であることが知られている。しかし、主論文の結果は2次超曲面を退化させた場合には様相が一変して、とんでもない高い次元成分があることを示しており、非常に複雑になることを示している。研究対象として興味深い豊かな世界であることを示唆している。

論文審査の結果の要旨

射影スキーム上の安定層のモデュライは、それ自身が興味深い研究対象であるのみならず、基底多様体の性質を強く反映していることから、基底多様体の研究の強力な道具を提供するなど、代数幾何学の重要な研究課題になっている。

安定層のモデュライの構造の研究の方法として、基底多様体の偏極構造を取り替えてお互いの関係を調べる、不変量を変えてモデュライの変化を見る、特定の不変量を持つ安定層を全て同定して具体的にモデュライを書き下す、などが考えられ、それぞれがそれなりの成果を挙げてきた。しかし、モデュライを動的に把握する方法がより有効であると考えられる。すなわち、基底多様体がパラメーターに沿って変形するとき、安定層のモデュライもそれに沿って変化することが知られており、基底多様体をより分かりやすい多様体の組み合わせに退化させて、退化した多様体上のモデュライからもとの多様体上のモデュライの持つべき性質を確定していくという方法である。

申請者はこの視点から比較的扱いやすい可約な代数多様体、 $X=X_1 \cup X_2$ で $X_1 \cap X_2$ が各 X_i で Cartier 因子になり、 O_{X_i} が純次元 d である場合に、安定層のモデュライ考察した（参考論文1）。得た結果は X 上の層を X_1 , X_2 上の層とそれらの貼り合わせのデータに分解することにより、モデュライの中に自然な分割が導入されること、各分割が X_i 上のデータと貼り合わせのデータから構成されることである。これを P^3 の可約な2次曲面に应用することにより、2次曲面の退化に沿ってのモデュライの変化が一般には平坦ではなく、次元の jumping が起こることが分かり、退化した多様体上のモデュライの構造はむしろより複雑になることが判明した。しかし、可約な2次曲面は多くの非特異2次曲面の退化になっており、退化した曲面上のモデュライは退化のパラメーターの情報まで忠実に反映していることを意味すると考えられる。言い換えればモデュライが充分沢山の情報を持っているのだから、退化のパラメーターが一次元の場合の平坦な変化を同定することが重要であると理解すべきであろう。

申請者は、上記の場合よりも強い退化について安定層のモデュライがどれだけの情報を持っているか考察し、主論文においてそれが驚くほど豊かな世界であることを示した。被約ではない射影スキーム上の安定層を、主論文の要旨に述べたように O_{X_0} -加群 E_0 の $O_{X_{n-1}}$ -加群 E_1 による拡大で表し、この拡大から自然に定義される準同型

$$\varphi: I_{X_0}'' \otimes E_0 \longrightarrow E_1$$

が単射であることを見いだした。しかもこの条件を付けた拡大と X 上の連接層が一对一であることを発見した。従って、参考論文1でのデータに替わるものが O_{X_0} -加群 E_0 , $O_{X_{n-1}}$ -加群 E_1 とそれらの拡大類 α の組 (E_0, E_1, α) で上記の条件を充たすものになる。主論文の要旨にある定理は、参考論文1と同様にこの場合にもモデュライに自然な分割が入ることを意味している。

主論文においても代数曲線の場合と2重平面の場合に具体的な考察がなされている。曲線においてすでに安定層のモデュライが充分豊かな情報を持ち、曲線の代数幾何学的性質を強く反映していることを明らかにしている。2重平面においては、特別な成分の一般点についての研究がなされたのみであるが、参考論文の結果から想像されるように、2次曲面の退化の様子を非常に強く反映していることが窺われる。

最初に述べたように安定層のモジュライは、代数幾何学における興味ある研究対象を提供するのみならず、代数多様体そのものの構造の研究に大きな役割を果たすことは、既に多くの例が示している。この意味でモジュライの構造についての組織的な研究は緊急の課題である。よい結果は直ちに広く応用されるといえよう。

申請者の論文は、退化した射影的スキーム上の安定層を扱いやすい概念で捉え直し、モジュライの複雑さを解析する独創的な手法を提供するものである。上に述べたようにこの結果は安定層のモジュライの研究に新しい道を切り開くものであり、代数多様体の構造の研究への応用も期待される。以上のことがら、本申請論文は博士（理学）の学位論文として価値のあるものと認める。