

Symbolic Rees algebra について。

日大文理 後藤四郎

(Shiro GOTO)

1. 序

この報告の目的は, Symbolic Rees algebra の Noether 性をイデアルの analytic spread の言葉で判定しようとする P. Schenzel [10, 11, 12] の結果を, 伊藤 [5] の手法により, 証明することにある。

P を正則局所環 A 内の素イデアルとし

$$R_S(P) = \sum_{n \geq 0} P^{(n)} t^n \quad (t \text{ は } A \text{ 上の不定元})$$

とすると, $R_S(P)$ の Noether 性を問う問題は, R. Cowsik [1] により提起された。Cowsik 自身は, もし $R_S(P)$ が Noether であるかつ $\dim A/P = 1$ であれば, P が set-theoretic complete intersection であることを示しているが, 全一般には $R_S(P)$ は Noether ではない (cf. P. Roberts [9])。それにもかかわらず, この問いは, D. Rees [8] の Zariski problem への反例の背景をなすものでもあり, また, P が monomial space curve の定義イデアルの場合でさえ, 今も, Symbolic Rees algebra $R_S(P)$ の Noether 性が保証されてい

ないことからみて、現在でも通用する十分に魅力的な問題であると思う。

この報告は上に述べた様に、 $R_S(P)$ の Noether 性を symbolic power $P^{(k)}$ の analytic spread $\ell(P^{(k)})$ の言葉で判定することを主目的とする。formulation は C. Huneke [4] によ、え与えられ、その後 D. Katz - L. Ratliff [6] によ、え改良が加えられ、P. Schenzel [11, 12] によ、え以下に述べる形になったと考えられるが、ここでは、伊藤の定理 [5] を使、え、簡単な証明を工夫したい。

以下 A は可換な Noether 環とし I は A 内のイデアルとする。

2. 一般論からの準備

$F = \{F_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が A の filtration であるとは、① F_n は A のイデアルである、② $F_0 = A$ 、③ $F_n \supset F_{n+1}$ 、④ $F_n F_m \subset F_{n+m}$ が成立することをいう。

A の filtration $F = \{F_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ に対し、 $R(F) = \sum_{n \geq 0} F_n t^n$ 、 $R'(F) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_n t^n$ (但し t は A 上の不定元) とおき、それぞれ、 F の Rees 代数という。とくに $F_n = I^n$ のときは、 $R(F)$ 、 $R'(F)$ と

$R(I)$, $R'(I)$ と書くことにする。

Lemma (2.1) (西田) 次の条件は同値である。

- ① $R(F)$ は Noether である。
- ② $\exists k > 0$; $R(F)^{(k)} := \sum_{n \geq 0} F_{nk} t^{nk}$ は Noether である。

証明。 $R(F)^{(k)}$ は $R(F)$ の直和因子であるので、 $R(F)$ が Noether ならば $R(F)^{(k)}$ も Noether である。② $\Rightarrow$ ① を示すため、
 $S = R(F)^{(k)}$ とし $L_i = \sum_{n \geq 0} F_{nk+i} t^{nk} \quad (0 \leq i < k)$ とおく。
 すると L_i は S の ideal であり、 $R(F) = \sum_{i=0}^{k-1} L_i t^i$ となる。
 よう、 S が Noether ならば、 $R(F)$ は S 上 module-finite になり、従って必ず Noether である。

次の補題はよく知られている。

Lemma (2.2). F を A の filtration で $F_1 \supset I$ なるものとするならば、次の条件は同値である。

- ① $I^{n-r} F_r = F_n, \quad \forall n \gg 0.$
- ② $R'(F)$ は $R'(I)$ 上 module-finite である。
- ③ $R(F)$ は $R(I)$ 上 module-finite である。
- ④ $I^{n-r} \supset F_n, \quad \forall n \gg 0.$

J は A のイデアルとし $I := \langle J \rangle = \bigcup_{i \geq 1} [I : J^i]$ とおく。
 filtration $F = \{I^n : \langle J \rangle\}_{n \in \mathbb{Z}}$ に対し, $R(F)$, $R'(F)$ を
 それぞれ, $R_J(I)$, $R'_J(I)$ と書くことにしよう。すると, イデアル
 $\mathcal{O} := JR'(I) + t^{-1}R'(I)$ による環 $R'(I)$ の ideal transform
 $T(\mathcal{O}, R'(I))$ は, 容易に確かめられるように, $R'_J(I)$ と一致する:

Lemma (2.3). $R'_J(I) = T(\mathcal{O}, R'(I))$.

一方, ideal transform の Noether 性 については 先行する研究
 があり, なかでも伊藤の結果 [5] が重要である。これを
 我々の場合 ^に 使い易い形で述べておくと,

Theorem (2.4). (伊藤 [5]). $R'(I)$ の全商環を $Q(R'(I))$
 とすると, 次の条件は同値である。

- ① $R'_J(I)$ は $R'(I)$ 上 module-finite である。
- ② $\Delta := \text{Ass}_{R'(I)} Q(R'(I))/R'(I) \cap V(\mathcal{O})$ とすると, すべての
 $P \in \Delta$ に対し, 局所環 $R'(I)_P$ の global transform $(R'(I)_P)^{\dagger}$
 は $R'_J(I)_P$ 上 module-finite である。

この (2.4) を, $(A, \mathfrak{m})$ が局所環で $J = \mathfrak{m}$ のときは適用

する=とにより, 次が得られる。

定理 (2.5). (P. Schenzel [11]). 次の条件は同値である。

- ① $R_m(I)$ は $R(I)$ 上 module-finite である。
- ② $\ell(I\hat{A} + \mathfrak{f}/\mathfrak{f}) < \dim \hat{A}/\mathfrak{f}$, $\forall \mathfrak{f} \in \text{Ass } \hat{A}$.

証明. 一般性を失うことなく, $A = \hat{A}$ (complete) と仮定しよ。

① $\Rightarrow$ ② $\mathfrak{f} \in \text{Ass } A$ に対し $\dim A/\mathfrak{f} \leq \ell(I + \mathfrak{f}/\mathfrak{f})$ である, とし矛盾を導く。 $\pm$, $\dim A/\mathfrak{f} = \ell(I + \mathfrak{f}/\mathfrak{f})$ であるから, $m/\mathfrak{f} \in \bar{A}^*(I + \mathfrak{f}/\mathfrak{f})$ (cf. [7]). 従って, $\exists Q \in \bar{A}^*(t^{-1} R'(I + \mathfrak{f}/\mathfrak{f}))$ s.t. $Q \cap A/\mathfrak{f} = m/\mathfrak{f}$. 故に $\varphi: R'(I) \rightarrow R'(I + \mathfrak{f}/\mathfrak{f})$ を自然な射とし $\mathfrak{f}^* = \text{Ker } \varphi$, $P = \varphi^{-1}(Q)$ とおくと, $\mathfrak{f}^* \in \text{Ass } R'(I)$ であるから $P \in \text{Min}_{R'(I)} R'(I)/(t^{-1}, \mathfrak{f}^*)$ となる。 t^{-1} は $R'(I)/\mathfrak{f}^* (= R'(I + \mathfrak{f}/\mathfrak{f}))$ 上非零因子であるから, $P \in \text{Ass}_{R'(I)} R'(I)/t^{-1} R'(I)$ となり, 従って $\text{depth } R'(I)_P = 1$ である。 よって, $P \in \Delta := \text{Ass}_{R'(I)} Q(R'(I))/R'(I) \cap V(\mathcal{O})$. ゆえに (2.4) により $[R'(I)_P]_{\mathfrak{f}}$ は $R'(I)_P$ 上 module-finite である。 従って $\dim R'(I)_P/\mathfrak{f} \equiv 2$, $\forall \mathfrak{f} \in \text{Ass } R'(I)_P$ である, とくに $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}^* R'(I)_P$ とすると, $\dim R'(I)_P/\mathfrak{f}^* R'(I)_P \equiv 2$ のはずであるが, しかしこれは $P \in \text{Min}_{R'(I)} R'(I)/(t^{-1}, \mathfrak{f}^*) =$

反する。よって $\ell(I+P/P) < \dim A/P$ とななければならない。

② $\Rightarrow$ ① 上の議論を逆にたどる二により、証明される。

Corollary (2.6). $R_J(I)$ が $R(I)$ 上 module-finite であるためには、次が成立する二が必要かつ十分である：

もし $P \in V(I) \cap V(J)$ であれば、いかなる $Q \in \text{Ass } \widehat{A}_P$ に対しても $\ell(\widehat{I\widehat{A}_P + Q}/Q) < \dim \widehat{A}_P/Q$ である。

証明。 $R_J(I)$ は $R(I)$ 上 module-finite であると仮定せよ。すると (2.2) より $t \gg 0$ を $I^{n-t} \supset I^n : \langle J \rangle$ ($\forall n \geq t$) ととれる。 $t=3$ とし、 $P \in V(I) \cap V(J)$ に対しても、

$$\begin{aligned} (IA_P)^n : \langle PA_P \rangle &\subset (IA_P)^n : \langle JA_P \rangle \\ &\subset (IA_P)^{n-t} \end{aligned}$$

であるから、再び (2.2) により、 $R_{PA_P}(IA_P)$ は $R(IA_P)$ 上 module-finite になる。よって (2.5) に従う。

逆に (2.6) 内の条件が満たされているとせよ。 $R' = R'(I)$, $\mathcal{O} = JR' + t^{-1}R'$ とおき $P \in \Delta := \text{Ass}_{R'} Q(R')/R' \cap V(\mathcal{O})$ とし $P := P \cap A$ とすると、 $P \supset I + J$ であるから、(2.5) より $R'_{PA_P}(IA_P)$ は $R'(IA_P)$ 上 module-finite である。すなわち、ideal transform $T((P, t^{-1})R'(IA_P), R'(IA_P))$ は $R'(IA_P)$ 上 module-finite である (cf. (2.3)) ので、 $P \supset (P, t^{-1})R'$ であり、

$R'_f(IA_f) = R'_f$ であることは注意すれば, $T(PR'_f, R'_f)$ が R'_f 上 module-finite であることがわかる。したがって $(R'_p)^{\#} = T(PR'_p, R'_p)$ は R'_p 上 module-finite になり (2.4) より $R'_J(I)$ が $R'(I)$ 上 module-finite であることが得られる。

3. 主結果.

以下 $S \subset A$ と $I \cap S = \emptyset$ であるような A 内の乗法系 S と, $I^{(n)} = I^n \cdot (S^{-1}A) \cap A$ とおく。filtration $F = \{I^{(n)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ に対し, Rees 代数 $R(F)$ と $R'(F)$ をそれぞれ単に R, R' と書く。

Theorem (3.1). 次は同値である。

- ① R は Noether である。
 ② $\exists k > 0$; 任意の $P \in V(I^{(k)})$ such that $P \cap S \neq \emptyset$ と

任意の $Q \in \text{Ass } \widehat{A}_P$ に対し不等式

$$\ell(I^{(k)}\widehat{A}_P + Q/Q) < \dim \widehat{A}_P/Q$$

が成立する。

- ③ $\exists k > 0$; 任意の $n \geq 1$ に対し, $[I^{(k)}]^n = I^{(kn)}$

証明。自然数 $k \geq 1$ に対し, $\mathcal{O}_k = I^{(k)}$ と $\mathcal{F}_k := A^*(\mathcal{O}_k)$

とおく。すると $t \geq 1$ と, 等式 $\text{Ass}_A A/\mathcal{O}^n = \mathcal{F}$ がすべての $n \geq t$ に対して成立する様にとれるので (cf. [7]),
 $J = \bigcap_{\mathcal{F} \ni \mathfrak{f} \text{ such that } \mathfrak{f} \cap S \neq \emptyset} \mathfrak{f}$ とおくと, $\mathcal{O}^n : \langle J \rangle = \mathcal{O}^{(n)} (= I^{(kn)})$, $\forall n \geq t$ である。よって $S := \sum_{n \geq 0} (\mathcal{O}^n : \langle J \rangle) t^{kn}$,
 $R^{(k)} := \sum_{n \geq 0} I^{(kn)} t^{kn}$ とおくと, $S \subset R^{(k)}$ であり, S と $R^{(k)}$ の差異 $R^{(k)}/S$ は高々 A 上有限生成加群であることがわかる。

① $\Rightarrow$ ③ $R^{(k)} = A[R_k]$ となるように $k > 0$ ととればよい。

③ $\Rightarrow$ ② $\Rightarrow$ 得られた k に対して上で準備した議論を適用すると, $P \in V(I^{(k)})$ で $P \cap S \neq \emptyset$ なるものについては, $\mathcal{O}^n : \langle P \rangle = \mathcal{O}^n$ であるから, $R_P(\mathcal{O}) = R(\mathcal{O})$. したがって (2.6) により ② を得る。

② $\Rightarrow$ ① $\Rightarrow$ の $k > 0$ に対して上の議論を適用すると, $S := R_J(\mathcal{O})$ は ② の仮定より Noether である (cf. (2.6)) ので, $R^{(k)}$ は Noether であり, 従って (2.1) より R 自身が Noether となる。

Corollary (3.2). A は local で quasi-unmixed と仮定せよ。
 このとき, もし R が Noether ならば, $\exists k > 0$, 任意の $P \in V(I^{(k)})$ で $P \cap S \neq \emptyset$ なるものについて不等式 $\ell(I^{(k)} A_P) < \dim A_P$ が成立する。(A が unmixed であれば逆も正しい。)

証明。 $\mathcal{O} \subseteq A$ のイデール ($\mathcal{O} \neq A$) とすると, $\ell(\mathcal{O}) \geq \ell(I + \mathfrak{f}/\mathfrak{f})$ ($\forall \mathfrak{f} \in \text{Spec } A$) であり, 適当な $\mathfrak{f} \in \text{Min } A$ に対しては $\ell(\mathcal{O}) = \ell(\mathcal{O} + \mathfrak{f}/\mathfrak{f})$ となることに従う。

Corollary (3.3). A は unmixed な局所環 とする。このときもし $\exists k > 0$; $\ell(I^{(k)}) = \text{ht}_A I^{(k)}$ ならば, R は必ず Noether である。

Lemma (3.4). A は quasi-unmixed な局所環 とせよ。もし $A/I^{(n)}$ が Cohen-Macaulay, $\forall n \gg 0$ でありかつ R が Noether ならば,

$$\ell(I^{(k)}) = \text{ht}_A I^{(k)}, \quad \exists k > 0$$

である。

証明。 $k > 0$ と $[I^{(k)}]^n = I^{(kn)}$ でありかつ $A/I^{(kn)}$ が Cohen-Macaulay ($\forall n \geq 1$) となるようにとる。 $\mathcal{O} = I^{(k)}$ とおき $m = \dim A/\mathcal{O}$ とし, $f_1, f_2, \dots, f_m \in A$ と $A/\mathcal{O}$ の sop でありかつ A の ssop となるようにとり $Q = (f_1, f_2, \dots, f_m)A$ とせよ。すると, $f_1, f_2, \dots, f_m$ は $A/\mathcal{O}^n$ に対しても sop であるから, すべての $n \geq 1$ に対して

$$Q \cap \mathcal{O}^n = Q \mathcal{O}^n$$

となる。したがって, associated graded rings の同型

$$G_{\mathcal{O}}(A)/\mathcal{Q} G_{\mathcal{O}}(A) \cong G_{\mathcal{O}+\mathcal{Q}/\mathcal{Q}}(A/\mathcal{Q})$$

が得られ, 同様より, $m \in A$ の極大イデアルとすると,

$$\begin{aligned} \dim A/m \otimes_A G_{\mathcal{O}}(A) &= \dim A/\mathcal{Q} \\ &= \dim A - m \\ &= \dim A - \dim A/\mathcal{O} \\ &= \text{ht } \mathcal{O}, \end{aligned}$$

すなわち, $\ell(\mathcal{O}) = \text{ht}_A \mathcal{O}$ が導かれる。

(3.3) と (3.4) とより 直ちに次が得られる:

Theorem (3.5). ([2]) A が unmixed 局所環で,
 $n \gg 0$ ならば $A/I^{(n)}$ は Cohen-Macaulay であると仮定せよ。
 このとき,

$$\mathcal{Q} \text{ が Noether である。} \Leftrightarrow \exists k > 0; \ell(I^{(k)}) = \text{ht}_A I^{(k)}$$

次の主張は (3.5) の special case である。

Corollary (3.6). (P. Schenzel [10]). 正則局所環 A 内の素イデアル P が $\dim A/P = 1$ をもつとき, Symbolic Rees algebra $\mathcal{R}_s(P) := \sum_{n \geq 0} P^{(n)} t^n$ が A 上有限生成代数

であるための必要かつ十分条件は, $\exists k > 0; \ell(P^{(k)}) = \dim A - 1$ となることである。

この (3.6) に到達することは, 私の報告の目的であった。しかしこの判定法は, 理論的には確かに優美なものではあるけれども, これを実際に使おうとすることは, analytic spread $\ell(P^{(k)})$ の計算が (普通は) 容易でないために, あまり得策でないと思う。一方で, (3.5) にはいくつか重要な応用があって, 私と西田氏の報告 [3] に述べられているので, 興味をお持ちの方はそちらも参照された。

References

- [1] Cowsik, R., Symbolic powers and the number of defining equations. Algebra and its applications (New Delhi, 1981), 13-14, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 91, Dekker, New York, 1984.
- [2] Goto, S., Herrmann, M., Nishida, K. and Villamayor, O., On the structure of Noetherian symbolic Rees algebras, Preprint

- [3] Goto, S. and Nishida, K., On the structure of Noetherian symbolic Rees algebras, 第11回可換環論シンポジウム報告集.
- [4] Huneke, C., On the finite generation of symbolic blow-ups, Math. Z. 179 (1982), 465 - 472.
- [5] Ito, S., $\mathbb{Z}$ -transforms and overrings of noetherian ring, Hiroshima Math. J. 10 (1980), 635 - 657
- [6] Katz, D. and Ratliff, L., On the symbolic Rees ring of a primary ideal, Comm. in Alg. 14 (1986), 959 - 970
- [7] McAdam, S., Asymptotic prime divisors, LNM 1023, Springer (1983)
- [8] Rees, D., On a problem of Zariski, Illinois J. Math. 2, 145 - 149 (1958)
- [9] Roberts, P., A prime ideal in a polynomial ring whose symbolic blow-up is not noetherian, Proc. Amer. Math. Soc. 94 (1985), 589 - 592
- [10] Schenzel, P., Filtrations and Noetherian symbolic blow-up rings, Proc. Amer. Math. Soc. 102 (1988), 4, 817 - 822

- [11] Schenzel, P., Finiteness of relative Rees rings and asymptotic prime divisors, Math. Nachr. 129 (1986), 123 - 148
- [12] Schenzel, P., Examples of noetherian symbolic blow-up rings, Rev. Roumaine math. Pures Appl. 33 (1988), 4, 375 - 383