

概周期系における

安定性について

東北大学 理 吉 沢 太郎

周期系において、周期解の存在を論ずるにあたり、有界な解の存在や解の終局有界性が十分条件であるが、概周期系の概周期解の存在をいうためには、有界な解の存在や終局有界性だけでは不十分である。そのため有界な解の安定性や分離条件が附加条件になる。

有界な解が *totally stable* ならば概周期解が存在することから、加藤、吉沢はどのような条件のもとで、有界な解が一樣漸近安定ならば、それは *totally stable* になるかを考えた。ここでは、加藤の条件は実際に *integrally asymptotic stability* とあたえることを述べ、これに関連して有界な解の一樣漸近安定との関係を考える。特に周期系においては、有界な解の一樣漸近安定が *Liapunov* 函数の存在により特徴づけられることを述べる。

概周期系を考えるまえに、一般な系の解の *total (integral)*

stability の定義とあたえる。微分方程式

$$(1) \quad x' = f(t, x), \quad f(t, 0) \equiv 0, \quad x, f \in R^n,$$

$$(2) \quad x' = f(t, x) + p(t)$$

と考える。ここで $S_c = \{x; |x| < c\}$ とし, $f(t, x)$ は $I \times S_c$, $I = [0, \infty)$, で連続, $p(t)$ は I で連続とする。

定義 1. 任意の $\varepsilon > 0$, 任意の $t_0 \geq 0$ そして任意の $p(t)$ に対して $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し, $|y_0| < \delta(\varepsilon)$, $|p(t)| < \delta(\varepsilon)$, $t \geq t_0$ ($\int_{t_0}^{\infty} |p(t)| dt < \delta(\varepsilon)$) ならば, すべての $t \geq t_0$ に対し, $|y(t, t_0, y_0)| < \varepsilon$ となるとき, (1) の零解は *totally (integrally) stable* である。
ここで $y(t, t_0, y_0)$ は (2) の (t_0, y_0) を通る解である。

定義 2. $\delta_0 > 0$ が存在し, 任意の $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$, $p(t)$ に対して $\eta(\varepsilon) > 0$ と $T(\varepsilon) > 0$ が存在して, $|y_0| < \delta_0$, $|p(t)| < \eta(\varepsilon)$, $t \geq t_0$, ($\int_{t_0}^{\infty} |p(t)| dt < \eta(\varepsilon)$) ならば, すべての $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$ に対し, $|y(t, t_0, y_0)| < \varepsilon$ となるとき, (1) の零解は *totally (integrally) attracting* である。ここで $y(t, t_0, y_0)$ は (2) の解である。

定義 3. (1) の零解は, それが *totally (integrally) stable* で, かつ *totally (integrally) attracting* であるとき, *totally (integrally) asymptotically stable* であるといわれる。

あきらかに, *totally (integrally) stable* であれば, 一樣安定で, *totally (integrally) asymptotically stable* であれば, 一樣漸近安定

である。

さて、概周期系

$$(3) \quad x' = f(t, x), \quad x, f \in R^n$$

を考える。ここで $f(t, x)$ は $R \times S_{B^*}$, $S_{B^*} = \{x; |x| < B^*\}$, において連続, $x \in S_{B^*}$ に対して一様に, t に関して概周期的とする。さらに (3) は I 上で定義され, $|f(t)| \leq B$, $B < B^*$, $t \geq 0$ であるような解 $\varphi(t)$ を持つと仮定する。 f の hull を $H(f)$ で表わす。

ある数列 $\{\tau_k\}$, $\tau_k > 0$, に対して $k \rightarrow \infty$ とき, S_{B^*} の任意のコンパクト集合 S に対し, $f(t + \tau_k, x)$ は $R \times S$ 上で一様にある函数 $g(t, x)$ に収束し, I 上の任意のコンパクト集合上で, $\varphi(t + \tau_k)$ はある函数 $\psi(t)$ に一様に収束するとき, この事実を $(\psi, g) \in H(\varphi, f)$ で表わす。このとき明らかに $g \in H(f)$ で $\psi(t)$ は

$$(4) \quad x' = g(t, x)$$

の解で, すべての $t \geq 0$ に対して $|\psi(t)| \leq B$ 。

周期系

$$(5) \quad x' = f(t, x), \quad f(t + \omega, x) = f(t, x)$$

においては, $\varphi(t)$ が一様安定であれば $\psi(t)$ もそうであり, $\varphi(t)$

が一樣漸近安定であれば、 $\psi(t)$ もそうである。概周期系 (3) においては、もしすべての $g \in H(f)$ に対して (4) の解が初期値問題に属して一意的であれば、 $\varphi(t)$ が一樣安定であれば、 $\psi(t)$ もそうであり、一樣漸近安定についても同じである。しかも、これらの場合、安定性の定義にあうられる量 $\delta, \delta(\cdot), T(\cdot)$ は共通なものがえらばれる。

概周期系 (3) に対して、つきの定理は解 $\varphi(t)$ の一樣漸近安定と *integrally asymptotic stability* とが同値である場合を示している。

定理 1 概周期系 (3) に対して、すべての $(\psi, g) \in H(\varphi, f)$ に対し、 ψ は共通の $(\delta(\cdot), \delta_0, T(\cdot))$ ともち一樣漸近安定であると假定する。すると $\varphi(t)$ は *integrally asymptotically stable* である。このときはまた $\varphi(t)$ は *totally asymptotically stable* である。

この定理の証明はつきの補題をつかうことにより行われる。

補題 1 すべての $(\psi, g) \in H(\varphi, f)$ に対し、 ψ は共通の $\delta(\cdot)$ ともち一樣安定であると假定する。すると任意の $\varepsilon > 0, T > 0$ に対して、正の数 $\eta_1(\varepsilon), \eta_2(\varepsilon, T)$ が存在して、任意の $t_0 \geq 0$ に対し、 $|y(t_0) - \varphi(t_0)| < \eta_1(\varepsilon), \int_{t_0}^{t_0+T} |p(t)| dt < \eta_2(\varepsilon, T)$ ならば、 $[t_0, t_0+T]$ 上で $|y(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$ 。ここで $p(t)$ は I 上で *locally integrable* で、 $y(t)$ は

$$(6) \quad y' = f(t, y) + p(t)$$

の解である。

補題 2. すべての $(\varphi, g) \in H(\varphi, f)$ に対して, ψ は共通の (δ_0, T_0) ともち一樣漸近安定であると仮定する。すると η_0 が存在し, 任意の $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ に対し, $\eta_3(\varepsilon)$ が存在して, もし $|y(t_0) - \varphi(t_0)| < \eta_0$, $\int_{t_0}^{t_0 + T(\frac{\varepsilon}{2})} |p(t)| dt < \eta_3(\varepsilon)$ ならば, (6) の解 $y(t)$ は $[t_0, t_0 + T(\frac{\varepsilon}{2})]$ 上で存在し, かつ

$$|y(t_0 + T(\frac{\varepsilon}{2})) - \varphi(t_0 + T(\frac{\varepsilon}{2}))| < \varepsilon.$$

補題 1 は, $\eta_1(\varepsilon) = \frac{1}{2} \delta(\frac{\varepsilon}{2})$ とし, この $\eta_1(\varepsilon)$ に対して補題 1 における $\eta_2(\varepsilon, T)$ が無いと仮定して矛盾を導くことにより証明される。補題 2 も同様の論法により証明される。すなわち,

$$\eta_0 = \min(\delta_0, \eta_1(\frac{B^* - B}{2}))$$

とし, 任意の $t_0 \geq 0$ に対し, $|\varphi(t_0) - y(t_0)| < \eta_0$ で

$$\int_{t_0}^{t_0 + T(\frac{\varepsilon}{2})} |p(t)| dt < \eta_3(\varepsilon), \quad \eta_3(\varepsilon) \leq \eta_2(\frac{B^* - B}{2}, T(\frac{\varepsilon}{2}))$$

ならば, $|y(t_0 + T(\frac{\varepsilon}{2})) - \varphi(t_0 + T(\frac{\varepsilon}{2}))| < \varepsilon$ なるよう正の数 $\eta_3(\varepsilon)$ を見出すことが出来る。

定理 1 の証明の概略はつぎのようである。 $\eta_1, \eta_2, \eta_0, \eta_3$ と

補題 1, 2 であたえられた数とし,

$$\rho(\varepsilon) = \min \{ \rho_1(\varepsilon), \rho_0 \},$$

$$\gamma(\varepsilon) = \min \left\{ \rho_2\left(\frac{B^* - B}{2}, T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right)\right), \rho_2(\varepsilon, T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right)), \rho_3(\rho(\varepsilon)) \right\}$$

とおく。任意の $t_0 \geq 0$ に対し, (6) の解 $y(t)$ は, $|\varphi(t_0) - y(t_0)| < \rho_0$, $\int_{t_0}^{\infty} |\dot{p}(t)| dt < \gamma(\varepsilon)$ ならば, $t \geq t_0 + T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right)$ に対し $|\varphi(t) - y(t)| < \varepsilon$ をみたすことを示す。 $\rho_0 \leq \rho_1\left(\frac{B^* - B}{2}\right)$, $\gamma(\varepsilon) \leq \rho_2\left(\frac{B^* - B}{2}, T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right)\right)$ であるから, 補題 1 により

$$|\varphi(t) - y(t)| < \frac{B^* - B}{2}, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right).$$

さらに補題 2 により,

$$|\varphi(t_0 + T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right)) - y(t_0 + T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right))| < \rho(\varepsilon).$$

区間 $t_0 + T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right) \leq t \leq t_0 + 2T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right)$ 上で補題 1 を適用して,

$$|\varphi(t) - y(t)| < \varepsilon, \quad t_0 + T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right) \leq t \leq t_0 + 2T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right)$$

また補題 2 により,

$$|\varphi(t_0 + 2T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right)) - y(t_0 + 2T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right))| < \rho(\varepsilon).$$

これをくり返すことにより, $t \geq t_0 + T\left(\frac{\rho(\varepsilon)}{2}\right)$ に対し, $|\varphi(t) - y(t)| < \varepsilon$ なることがわかる。

系 1 概周期系 (3) において, すべての $g \in H(f)$ に対し, (4) の解は初期値に對し一意的であると仮定する。このとき, $\varphi(t)$ が一様漸近安定なうば, $\varphi(t)$ は *totally (integrally) asymptotically stable* である。すなわちこれらの安定性は同値である。

周期系 (5) においては, $\varphi(t)$ が一様漸近安定なうば, 附加条件なしで, $\psi(t)$ が共通の $(\delta(\cdot), \delta_0, T(\cdot))$ ともち一様漸近安定であるから, つぎの定理がえられる。

定理 2. 周期系 (5) は $|\varphi(t)| \leq B, B < B^*, t \geq 0$ である解をもつとする。もし $\varphi(t)$ が一様漸近安定なうば, $\varphi(t)$ は *totally (integrally) asymptotically stable* である。すなわちこれらの安定性は同値である。

一般の系に對して, *integrally asymptotic stability* はある性質をもつ Liapunov function の存在により特性づけられるから, 周期系 (5) に對して, つぎの定理が成り立つ。

定理 3. 周期系 (5) において, $\varphi(t)$ が一様漸近安定であるための必要十分条件は, ある $\alpha > 0$ に對し, $0 \leq t < \infty, |\varphi(t) - x| < \alpha$ で定義され, つぎの性質をもつ Liapunov function $V(t, x)$ が存在することである。すなわち

(i) $\alpha(|\varphi(t) - x|) \leq V(t, x) \leq |\varphi(t) - x|$, ここで $\alpha(\alpha)$ は連続, 正定値,

(ii) $|V(t, x) - V(t, y)| \leq |x - y|$,

$$(iii) \quad \dot{V}_{(s)}(t, x) \leq -V(t, x).$$

そこで、一般の系 (1) を考える。 $0 < a < c$, $S_a = \{x; |x| < a\}$ として、各 $t \in (0, \infty)$, $x \in S_a$ に対し、 $A_a(t, x)$ につきの条件をみたす絶対連続な函数 $\varphi: I \rightarrow R^n$ の集合を表わす。すなわち

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(t) = x, \quad \sup_{s \in [0, t]} |\varphi(s)| \leq a.$$

Liapunov function $V(t, x)$ をつきのように定義する。

$$V(t, x) = \begin{cases} \inf_{\varphi \in A_a(t, x)} \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} |\varphi'(u) - f(u, \varphi(u))| du, & t > 0 \\ |x|, & t = 0 \end{cases},$$

ここで $\lambda \geq 0$ は定数。この函数 $V(t, x)$ はつぎの性質をもっている。

(I) $\tau > 0$, $\xi \in S_a$ に対し, $x(0) = 0$, $x(\tau) = \xi$, $0 \leq t \leq \tau$ で $|x(t)| \leq a$ である (1) の解が存在するための必要十分条件は $V(\tau, \xi) = 0$ 。

(II) 任意の $t \geq s > 0$, $x, y \in S_a$ に対し

$$|V(s, x) - V(t, y)| \leq |x - y| + |s - t| M(t) + (1 - e^{-\lambda(t-s)}) a,$$

ここで, $M(\tau) = \max \{ |f(t, x)|; 0 \leq t \leq \tau, |x| \leq a \}$ 。

$$(III) \quad V(t, x) \geq e^{-\lambda t} |x| - t M(t),$$

$$(IV) \quad 0 \leq t < \infty, |x| < a \text{ に対し,}$$

$$\dot{V}_{(1)}(t, x) \leq -\lambda V(t, x).$$

定理 4. もし (1) の零解が integrally stable ならば, ある a , $0 < a < c$ に対し, $I \times S_a$ で定義されてつぎの条件をみたすような Liapunov function $V(t, x)$ が存在する。すなわち,

$$(i) \quad b(|x|) \leq V(t, x) \leq |x|, \quad \text{ここで } b(r) \text{ は連続で正定値,}$$

$$(ii) \quad |V(t, x) - V(t, y)| \leq |x - y|,$$

$$(iii) \quad \dot{V}_{(1)}(t, x) \leq 0.$$

この場合は $\lambda = 0$ として上述の Liapunov function $V(t, x)$ を定義すれば, つぎの定理の証明におけると同様にして, この $V(t, x)$ が条件をみたすことが示される。

定理 5. もし (1) の零解が右に一意的で, integrally attracting ならば, ある a , $0 < a < c$, に対し, $I \times S_a$ で定義されてつぎの条件をみたす Liapunov function $V(t, x)$ が存在する。すなわち,

$$(i) \quad b(|x|) \leq V(t, x) \leq |x|, \quad \text{ここで } b(r) \text{ は連続で正定値,}$$

$$(ii) \quad |V(t, x) - V(t, y)| \leq |x - y|,$$

$$(iii) \quad \dot{V}_{(1)}(t, x) \leq -V(t, x).$$

証明. 定義 2 における δ_0 に対し, $\delta_0^* < \delta_0$, $a = \delta_0^*$ とする。

$\lambda = 1$ として上述の Liapunov function $V(t, x)$ を定義すれば, この函数の性質として, 条件 (ii), (iii) および $V(t, x) \leq |x|$ をみたすことは明らかで, 零解の一意的性により $V(t, 0) = 0$ で

あるから, $V(t, x)$ の正定値性を示せばよい。もしそうでない
とすれば, ある ε , $0 < \varepsilon < \delta_0^*$, と $\varepsilon \leq |x_k| < \delta_0^*$, $t_k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$),
 $V(t_k, x_k) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) となるような数列 $\{t_k\}$, $\{x_k\}$ が存在する。

$T(\varepsilon)$, $\gamma(\varepsilon)$ を定義 2 における数とする。 $t_k > T(\varepsilon) + 1$, $V(t_k, x_k) < \gamma(\varepsilon)e^{-(T(\varepsilon)+1)}$
となる十分大きい k を考え,

$$\int_0^{t_k} e^{-(t_k-u)} |\varphi'_k(u) - f(u, \varphi_k(u))| du < \gamma(\varepsilon) e^{-(T(\varepsilon)+1)}$$

である $\varphi_k \in A_a(t_k, x_k)$ をえらふ。 $t_0 = t_k - (T(\varepsilon) + 1)$ とおくと,

$$\int_{t_0}^{t_k} e^{-(t_k-u)} |\varphi'_k(u) - f(u, \varphi_k(u))| du < \gamma(\varepsilon) e^{-(T(\varepsilon)+1)},$$

$$e^{-(T(\varepsilon)+1)} \int_{t_0}^{t_k} |\varphi'_k(u) - f(u, \varphi_k(u))| du \leq \int_{t_0}^{t_k} e^{-(t_k-u)} |\varphi'_k(u) - f(u, \varphi_k(u))| du$$

であるから,

$$\int_{t_0}^{t_k} |\varphi'_k(u) - f(u, \varphi_k(u))| du < \gamma(\varepsilon).$$

== $p(t)$ を

$$p(t) = \begin{cases} \varphi'_k(t) - f(t, \varphi_k(t)), & t \in [t_0, t_k] \\ 0, & t \in (t_k, \infty) \end{cases}$$

で定義すれば, $\int_{t_0}^{\infty} |p(t)| dt < \gamma(\varepsilon)$ で $\varphi_k(t)$ は $x' = f(t, x) + p(t)$ の $t_0 \leq$
 $t \leq t_k$ 上の解で, $|\varphi_k(t_0)| < \delta_0$. しかるに $|\varphi_k(t_k)| = |x_k| > \varepsilon$ で,

$t_R > t_0 + T(\varepsilon)$ であるから integral attraction の定義に矛盾する。したがって、ある正定値函数 $b(r)$ が存在し、 $b(|x|) \leq V(t, x)$ となる。

$p: I \rightarrow R^n$ と可測で、

$$\sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} |p(s)| ds < \infty$$

なる函数と、ノルム $|p| = \sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} |p(s)| ds$ とし、このような函数の空間を B とする。すると (1) の零解が integrally asymptotically stable ならば、系 (1) は空間 B の下でも perturbation 可能である。これは定理 5 における Liapunov function を用いることにより示される。