

矩形基礎の Ground Compliance と その Simulation について

小堀 鐸二・南井良一郎・井上 豊

GROUND COMPLIANCE OF RECTANGULAR FOUNDATION AND ITS SIMULATION

by Dr. Eng. Takuji KOBORI,
Ryoichiro MINAI and
Yutaka INOUE

Synopsis

In considering the earthquake response of buildings and other above-ground structures, it is very important to know the ground compliance for the foundation configuration. Recently the study on the dynamical compliance of the rectangular foundations was presented by Prof. W. T. Thomson and T. Kobori, and also has been extended by authors and Mr. T. Suzuki. In this paper, the simulation method of this problem to analog computer is, in general, developed for arbitrary excitations. Based on the conditions both of physical realizability and mathematical stability, the transfer function of ground compliance is approximately expressed by the rational function and replaced with the equivalent electronic analog circuit. Finally the good approximation of this simulation method is shown as an example.

1. まえがき

構造物の地震応答を論ずるに当って、基礎地盤の影響を定性的にあるいは定量的に評価することは従来極めて難しい問題とされて来た。¹⁾ たまたま筆者等の一人が在米中に行った研究の一つ、Ground Compliance の研究^{2) 3)} を、その後さらに数値的に発展させることができたので、⁴⁾ これを構造物系の基礎地盤に接続し、その基礎地盤の弾塑性非線型性状をも併せ評価して、地震応答の解析に応用しようとの試みを行った。

このために、第1段階として数値的に得られた矩形基礎の Ground Compliance を基礎地盤の動特性として捉え、その伝達関数の近似的表現をアナログ計算機における等価演算回路に simulate することによって、基礎周辺地盤を含めた構造物系の地震応答の解析を現実的に可能としたのである。

因みに Ground Compliance の数値解は次に示すような一般解に含まれる improper な無限積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\beta, \gamma) - \beta^2 [\kappa^2 - 4\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)]}{F(\beta, \gamma)} \cdot \frac{\sin \beta b \sin \gamma c}{\beta \gamma} \tilde{Q}(\omega) e^{i\omega t} d\beta d\gamma d\omega$$

$$F(\beta, \gamma) = [2(\beta^2 + \gamma^2) - \kappa^2]^2 - 4\alpha_1\alpha_2(\beta^2 + \gamma^2)$$

を複素平面上で評価しなければ得られないので、直接的にこれを構造物系と接続して一般的な解析的表現を与え、任意の非定常な地震地動の外乱に対して応答量を数値的に解くことは、たとえデジタル計算機を利

用したとしても、ただ一つのパラメーターの case について莫大な演算時間を必要とするのである。

かくて本報告では現実的に処理し易いアナログ計算機の利用を建て前とした simulation に重点を置いて論じ、具体的には矩形基礎の辺長比が 2:1, すなわち $c/b=2$ の場合の translational な水平方向の Ground Compliance の動特性を扱った。

2. 線型地盤伝達関数の近似的表現

2・1 安定な物理系の伝達関数およびインパルス応答の性質

アナログ演算回路への simulation に当っては、弾性地盤の線型伝達関数の近似的表現を求めることが先決問題となるが、それには物理的実現可能 (physical realizability) の条件を基礎においた安定な系の伝達関数とインパルス応答の性質について調べておく必要がある。

安定な物理系の伝達関数 $\phi(s)$ または $\phi(j\omega)$ と、対応するインパルス応答 $k(\tau)$ とは通常つぎの性質をもつ。

$\phi(s)$ は実係数をもつ複素関数で、可附番個の特異点を除いて全平面で解析的で、かつ

$$\lim_{s \rightarrow \infty} |\phi(s)| = 0$$

であり、右半平面 $\text{Re}(s) \geq 0$ において正則であることである。したがって $\phi(j\omega)$ は下半平面 $\text{Im}(\omega) \leq 0$ において正則である。対応する $k(\tau)$ は実関数であり、絶対積分可能すなわち

$$\int_0^{\infty} |k(\tau)| d\tau < \infty$$

かつ $\tau < 0$ にて $k(\tau) = 0$ である。⁵⁾ さらに通常 $|s| \rightarrow \infty$ のとき

$$O(|\phi(s)|) = O(|s|^{-1-k}), \quad k > 0$$

かつ

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} k(\tau) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\phi(s) = 0$$

が成立つ。これらの条件下で伝達関数とインパルス応答の間には次の諸式が成立する。

$$\phi(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} k(\tau) d\tau, \quad k(\tau) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \phi(s) e^{s\tau} ds \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\phi(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-j\omega\tau} k(\tau) d\tau, \quad k(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$|k(\tau)| < \infty, \quad \tau > 0$$

$$k(0) = \frac{1}{2} - \lim_{\tau \rightarrow 0} k(\tau) = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$k(\tau) = 0, \quad \tau < 0$$

また

$$\phi(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$P(\omega) = \text{Re}\{\phi(j\omega)\}, \quad Q(\omega) = \text{Im}\{\phi(j\omega)\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

とかけば、 $P(\omega)$ と $Q(\omega)$ の間には次式が成立する。

$$P(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(u)}{u-\omega} du$$

$$Q(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(u)}{u-\omega} du \quad \dots\dots\dots (4)$$

数学的な安定条件 (Stability) は $k(\tau) \in L_1(-\infty, \infty)$ すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} |k(\tau)| d\tau < \infty$$

であり、物理的な実現可能の条件は $k(\tau) = 0, \tau < 0$ で示されるが、後者は $\phi(s)$ が $\text{Re}(s) > 0$ での正則性が

ら、前者と加えれば、さらに $\mathbf{R}(s) \geq 0$ での正則性により満足される。(4)式は $\mathbf{R}(s) \geq 0$ での正則性から成立するが、 $\mathbf{R}(s) > 0$ での正則性では必ずしも成立しない。

さらに $\phi(s)$ が $\mathbf{R}(s) \geq 0$ において正則かつ零でないならば、次式が成立つ。

$$\log A(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(u)}{u-\omega} du \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log A(u)}{u-\omega} du$$

$$A(\omega) = |\phi(j\omega)| = \{P^2(\omega) + Q^2(\omega)\}^{1/2} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\varphi(\omega) = \arg \phi(j\omega) = \tan^{-1} \{Q(\omega)/P(\omega)\}, \quad -\pi < \varphi(\omega) \leq \pi$$

このような物理的実現可能な条件と、数学的安定条件を兼ね備えたものは一般には減衰振動系に該当するが、その場合の $\phi(s)$ と対応する $k(\tau)$ についてはすでに精しく論じたところである。^{1)~4) 6)~8)}

2・2 伝達関数の有理関数による近似的表現

理論的あるいは実験的に得られる部分的な伝達関数の形を、取扱い上便利な有理関数として近似し、これらを用いて総合的な物理系を抽象して、その解析ならびに設計を行うのはよくとられる手段である。普通一般に伝達関数の近似的表現を求めるのに、つぎのような方法がとられる。⁵⁾

$$|\phi(j\omega)|^2 = A^2(\omega) \doteq A^2(0) \prod_{i=1}^n \left[B_{2K_i} \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right) \right]^{\text{sgn } K_i}$$

$$= A^2(0) \prod_{i=1}^n \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right)^2 \right]^{\text{sgn } K_i} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\phi(j\omega) = A(0) \prod_{i=1}^n C_{K_i} \left(\frac{j\omega}{\omega_i} \right)^{\text{sgn } K_i} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\phi(s) = A(0) \prod_{i=1}^n C_{K_i} \left(\frac{s}{\omega_i} \right)^{\text{sgn } K_i}$$

$$B_{2K}(\omega) = C_K(j\omega) C_K^*(j\omega)$$

$$C_K(j\omega) = \prod_{\nu=0}^K (j\omega - j\lambda_{\nu}) \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\lambda_{\nu} = \cos \frac{\pi(1+2\nu)}{2K} + j \sin \frac{\pi(1+2\nu)}{2K}$$

K : positive integer; $\nu=0, 1, 2, \dots, K-1$

ここで ω_i と対応する整数 K_i は次式から近似的に求められる。

$$L(\omega) = 10 \log_{10} A^2(\omega)$$

$$\doteq 20 \log_{10} A(0) + 10 \sum_{i=1}^n \text{sgn } K_i \log_{10} B_{2K_i} \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right)$$

$$\doteq 20 \left[\log_{10} A(0) + \sum_{i=1}^n K_i (\log_{10} \omega - \log_{10} \omega_i) \text{sgn } K_i \right] \quad \dots\dots\dots (10)$$

すなわち $L(\omega)/20$ と $\log_{10} \omega$ を選んで整数勾配の制限で折線近似すれば、接合点と勾配差によって順次 ω_i と K_i が定まる。この方法は K_i が整数に限られるので精度の向上には困難がある。本報告ではこれによらず、つぎのような最小自乗法を用いた近似法を考慮した。

$\phi(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ が与えられるとき、安定かつ物理的実現可能な条件(4)式の制約の下で、近似的な伝達関数

$$\phi_a(j\omega) = \hat{p}(\omega) + j\hat{q}(\omega) \quad \dots\dots\dots (11)$$

を最小自乗法で定めるには一般的につぎの手順をとる。

$$\hat{p}(\omega) \equiv \hat{p}(\omega; \hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_m)$$

$$\hat{q}(\omega) \equiv \hat{q}(\omega; \hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_n) \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\hat{q}(\omega; \hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{p}(u; \hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_m)}{u - \omega} du \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$I(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m; \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n) = \int_0^{\infty} [P(\omega) - \hat{p}(\omega)]^2 d\omega + \int_0^{\infty} [Q(\omega) - \hat{q}(\omega)]^2 d\omega \quad \dots\dots\dots (14)$$

上記(13)式の条件付きで(14)式を最小にするパラメーターの組 $\{\hat{p}\}$, $\{\hat{q}\}$ を定めるのであるが, (13)式の積分が解析的に行われるならば, 例えば contour integral で求めうるのであれば, (13)式はつぎの形で表現できる。

$$g_i(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m; \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n) = f_{\hat{p}_i}(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m) - f_{\hat{q}_i}(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n) = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$i = 1, 2, \dots, l$$

従って

$$F(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m; \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n)$$

$$= I(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m; \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n) - \sum_{i=1}^l \lambda_i g_i(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m; \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n) \quad \dots\dots\dots (16)$$

を導入して

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{p}_\mu} = 0, \quad -\frac{\partial F}{\partial \hat{q}_\nu} = 0$$

$$g_i(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m; \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n) = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\mu = 1, 2, \dots, m; \nu = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots, l$$

によって, 未知ベクトル $\{\hat{p}\}$, $\{\hat{q}\}$, $\{\lambda\}$ が求められる。(11)式で $\omega = -js$ とおけば $\phi_a(s)$ が次式で定まる。

$$\phi_a(s) = \hat{p}(-js) + j\hat{q}(-js) \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで (12), (13) 両式の代りに, まず $\phi(s)$ の近似伝達関数 $\phi_a(s)$ を想定し, その安定かつ物理的実現可能な条件, すなわち $\mathbf{R}(s) \geq 0$ における正則性を, 例えば Routh-Hurwitz の安定条件の形で考慮すれば (15)式と同等の次式がえられる。

$$\phi_a(s) = \phi_a(s; r_1, r_2, \dots, r_l)$$

ここで

$$\phi_a(j\omega) = \phi_a(j\omega; r_1, \dots, r_l) \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$= \hat{p}_a(\omega; r_1, \dots, r_l) + j\hat{q}_a(\omega; r_1, \dots, r_l)$$

とし, (12)式と比較すれば

$$\hat{p}_\mu = \hat{p}_\mu(r_1, r_2, \dots, r_l)$$

$$\hat{q}_\nu = \hat{q}_\nu(r_1, r_2, \dots, r_l) \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\mu = 1, 2, \dots, m, \quad \nu = 1, 2, \dots, n$$

この方式は有理関数形に近似伝達関数を選ぶときに有利である。

$$\phi_a(s) = \sum_{i=0}^{N-1} d_i s^i / \sum_{i=0}^N c_i s^i, \quad c_N = 1$$

$$\{r\} = \{r_1, r_2, \dots, r_{2N}\}, \quad \{r\} = [\{c\}, \{d\}] \quad \dots\dots\dots (21)$$

とすれば

$$\phi_a(j\omega) = \sum_{i=0}^{N-1} d_i (j\omega)^i / \sum_{i=0}^N c_i (-j\omega)^i / \left| \sum_{i=0}^N c_i (j\omega)^i \right|^2$$

$$= \hat{p}_a(\omega; r_1, r_2, \dots, r_{2N}) + j\hat{q}_a(\omega; r_1, r_2, \dots, r_{2N}) \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$= \hat{p}(\omega; p_1, \dots, p_{2N}) + j\hat{q}(\omega; q_1, \dots, q_{2N})$$

ここに

$$\begin{aligned} \hat{p}(\omega) &= \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_{2i} \omega^{2i}}{\sum_{i=0}^N a_{2i} \omega^{2i}}, & \hat{q}(\omega) &= \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b'_{2i+1} \omega^{2i+1}}{\sum_{i=0}^N a'_{2i} \omega^{2i}} \\ a_{2N} &= 1, & a'_{2N} &= 1 \\ \{\hat{p}\} &= \{\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_{2N}\} \equiv [\{a\}, \{b\}] \\ \{\hat{q}\} &= \{\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_{2N}\} \equiv [\{a'\}, \{b'\}] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (23)$$

(22)式の第2, 第3式を比較するとき(20)に相当する式をうるが, このとき $m=n=l=2N$ が成立つ。そして

$$\begin{aligned} \{a\} &= \{a'\} = \{a(r_1, \dots, r_{2N})\} \\ \{b\} &= \{b(r_1, \dots, r_{2N})\}, \quad \{b'\} = \{b'(r_1, \dots, r_{2N})\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (24)$$

をうる。上式から $\{r\}$ における Routh-Harwitz の安定条件を考慮すれば, $\{r\}$ が $\{\hat{p}\}$ または $\{\hat{q}\}$ のみで表わされ, $\{\hat{p}\}, \{\hat{q}\}$ も互いに他で表現できる。

$$\{r\} = \{r(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_{2N})\}, \quad \{\hat{q}\} = \{\hat{q}(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_{2N})\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

あるいは

$$\{r\} = \{r(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_{2N})\}, \quad \{\hat{p}\} = \{\hat{p}(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_{2N})\}$$

(14)式を

$$\begin{aligned} I(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_{2N}; \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_{2N}) \\ = \int_0^\infty \left[\sum_{i=0}^N a_{2i} \omega^{2i} P(\omega) - \sum_{i=0}^{N-1} b_{2i} \omega^{2i} \right]^2 d\omega \\ + \int_0^\infty \left[\sum_{i=0}^N a'_{2i} \omega^{2i} Q(\omega) - \sum_{i=0}^{N-1} b'_{2i+1} \omega^{2i+1} \right]^2 d\omega \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (26)$$

の形で表わし, (25)式のいづれか一方の第2式を代入すれば, (26)式の I は $\{\hat{p}\}$ または $\{\hat{q}\}$ のいづれかのみを含むことになる。そこで $\{\hat{p}\}$ あるいは $\{\hat{q}\}$ は次式で定まる。

$$\frac{\partial I}{\partial \hat{p}_\mu} = 0; \quad \mu = 1, 2, \dots, 2N \quad \dots\dots\dots (27)$$

あるいは

$$\frac{\partial I}{\partial \hat{q}_\nu} = 0; \quad \nu = 1, 2, \dots, 2N$$

故に(25), (27)の両式から $\{r\}, \{\hat{p}\}, \{\hat{q}\}$ が定まり, (20), (21)両式より求める $\phi_a(s)$ あるいは $\phi_a(j\omega)$ が確定する。ここに(21)式~(25)式によってえられる関係は(12), (13), (18)式により求まる関係と全く同等なものである。

例えばつぎに(21)式に示された有理関数で $N=1, 2, 3, 4$ における $\{r\}, \{\hat{p}\}, \{\hat{q}\}$ の関係を下に示す。

$N=1$;

$$\begin{aligned} \phi_a(s) &= \frac{d_0}{s+c_0}, & \hat{p}(\omega) &= \frac{b_0}{\omega^2+a_0}, & \hat{q}(\omega) &= \frac{b'_1 \omega}{\omega^2+a'_0} \\ c_0 &= \sqrt{a_0}, & d_0 &= b_0/\sqrt{a_0}; & a'_0 &= a_0, & b'_1 &= -b_0/\sqrt{a_0} \end{aligned}$$

$N=2$;

$$\begin{aligned} \phi_a(s) &= \frac{d_1 s + d_0}{s^2 + c_1 s + c_0}, & \hat{p}(\omega) &= \frac{b_2 \omega^2 + b_0}{\omega^4 + a_2 \omega^2 + a_0} \\ \hat{q}(\omega) &= \frac{b'_3 \omega^3 + b'_1 \omega}{\omega^4 + a'_2 \omega^2 + a'_0}, & c_0 &= \sqrt{a_0}, & c_1 &= \sqrt{2\sqrt{a_0} + a_2} \\ d_3 &= b_0/\sqrt{a_0}, & d_1 &= (b_0 + \sqrt{a_0} b_2) / c_0 c_1, & a'_{2i} &= a_{2i} \\ b'_1 &= -[(\sqrt{a_0} + a_2) b_0 - a_0 b_2] / c_0 c_1, & b'_3 &= -[b_0 + \sqrt{a_0} b_2] / c_0 c_1 \end{aligned}$$

$N=3$;

$$\begin{aligned}\phi_a(s) &= \frac{d_2 s^2 + d_1 s + a_0}{s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0}, & \hat{p}(\omega) &= -\frac{b_4 \omega^4 + b_3 \omega^2 + b_0}{\omega^6 + a_4 \omega^4 + a_2 \omega^2 + a_0} - \\ \hat{q}(\omega) &= -\frac{b'_5 \omega^5 + b'_3 \omega^3 + b'_1 \omega}{\omega^6 + a'_4 \omega^4 + a'_2 \omega^2 + a'_0}, & c_0 &= \sqrt{a_0}, \\ c_1 &= \{4a_4^2 - z_1^2 + 16a_0^{1/2}(z_1 + 2a_4)^{1/2}\}^{1/2}/4 + 2a_0^{1/2}/(z_1 + 2a_4)^{1/2} \\ c_2 &= \{ (z_1 + 2a_4)^{1/2} + \{2a_4 - z_1 + 16a_0^{1/2}/(z_1 + 2a_4)^{1/2}\}^{1/2}/2 \\ d_0 &= b_0/a_0^{1/2}, & d_1 &= [a_0^{1/2}b_4 + c_2(b_2 + c_2b_0/a_0^{1/2})]/c_1c_2 - c_0 \\ d_2 &= [b_2 + c_1b_4 + c_2b_0/a_0^{1/2}]/c_1c_2 - c_0, & a'_{2i} &= a_{2i} \\ b'_1 &= c_0d_1 - c_1d_0, & b'_3 &= d_0 + c_1d_2 - c_2d_1, & b'_5 &= -d_2 \\ z_1 &= v_1 + v_2 - 2a_4/3 \\ v_1 &= \frac{4}{3} \left[-\frac{1}{2}(2a_4^3 + 27a_0 - 9a_2a_4) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(27)^{1/2}}{2}(4a_0a_4^3 - a_2^2a_4^2 + 4a_2^3 - 18a_0a_2a_4 + 27a_0^2)^{1/2} \right]^{1/3} \\ v_2 &= \frac{4}{3} \left[-\frac{1}{2}(2a_4^3 + 27a_0 - 9a_2a_4) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(27)^{1/2}}{2}(4a_0a_4^3 - a_2^2a_4^2 + 4a_2^3 - 18a_0a_2a_4 + 27a_0^2)^{1/2} \right]^{1/3}\end{aligned}$$

$N=4$;

$$\begin{aligned}\phi_a(s) &= \frac{d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0}{s^4 + c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0} \\ p(\omega) &= \frac{b_6 \omega^6 + b_4 \omega^4 + b_2 \omega^2 + b_0}{\omega^8 + a_6 \omega^6 + a_4 \omega^4 + a_2 \omega^2 + a_0}, & q(\omega) &= -\frac{b'_7 \omega^7 + b'_5 \omega^5 + b'_3 \omega^3 + b'_1 \omega}{\omega^8 + a'_6 \omega^6 + a'_4 \omega^4 + a'_2 \omega^2 + a'_0}, & c_0 &= a_0^{1/2} \\ c_1 &= \left[2a_2 + \{z_1 + 8a_0(a_4 + 6a_0^{1/2})\}^{1/2} + \{8a_0(a_4 + 6a_0^{1/2}) - z_1 + \frac{128a_0^{3/2}(a_2 + a_0^{1/2}a_6)}{\{z_1 + 8a_0(a_4 + 6a_0^{1/2})\}^{1/2}}\}^{1/2}/2 \right]^{1/2}/2 \\ c_2 &= \left[\{z_1 + 8a_0(a_4 + 6a_0^{1/2})\}^{1/2} + \{8a_0(a_4 + 6a_0^{1/2}) - z_1 + \frac{128a_0^{3/2}(a_2 + a_0^{1/2}a_6)}{\{z_1 + 8a_0(a_4 + 6a_0^{1/2})\}^{1/2}}\}^{1/2}/4a_0^{1/2} \right]^{1/2}/4a_0^{1/2} \\ c_3 &= \left[2a_0^{1/2}a_6 + \{z_1 + 8a_0(a_4 + 6a_0^{1/2})\}^{1/2} + \{8a_0(a_4 + 6a_0^{1/2}) - z_1 + \frac{128a_0^{3/2}(a_2 + a_0^{1/2}a_6)}{\{z_1 + 8a_0(a_4 + 6a_0^{1/2})\}^{1/2}}\}^{1/2}/2a_0^{1/2} \right]^{1/2}/2a_0^{1/2} \\ d_0 &= b_0/a_0^{1/2}, \\ d_1 &= [c_1(c_0b_6 - b_2 - c_2d_0) + c_3\{c_0(b_4 - d_0) + c_2(b_2 + c_2d_0)\}]/X \\ d_2 &= [c_1\{c_1b_6 - c_3(b_4 - d_0)\} + c_3^2(b_2 + c_2d_0)]/X \\ d_3 &= [c_1(b_4 - d_0 + c_2b_0) + c_3(b_2 - c_0b_6 + c_2d_0)]/X \\ a'_{2i} &= a_{2i}, & b'_1 &= c_0d_1 - c_1d_0, & b'_3 &= c_1d_2 + c_3d_0 - c_0d_3 - c_2d_1 \\ b'_5 &= c_2d_3 + d_1 - c_3d_2, & b'_7 &= -d_3 \\ X &= c_1(c_2c_3 - c_1) - c_0c_3^2 \\ z_1 &= v_1 + v_2 - 8a_0(a_4 + 6a_0^{1/2})/3 \\ v_1 &= [-f_0/2 + R^{1/2}]^{1/3}, & v_2 &= [-f_0/2 - R^{1/2}]^{1/3} \\ f_0 &= (16a_0/3)^3 \{a_4(72a_0 - 2a_4^2 + 9a_2a_6) - 27(a_2^2 + a_0a_6^2)\} \\ R &= (1/8)(16a_0/3)^6 [2\{a_4(72a_0 - 2a_4^2 + 9a_2a_6) \\ &\quad - 27(a_2^2 + a_0a_6^2)\}^2 - \{a_4(3a_0^{1/2} - 2a_4) + 6(a_2a_6 - 4a_3)\}^3]\end{aligned}$$

ここで $\phi_a(s)$ の分母に対する Routh-Hurwitz の安定条件は $c_0, c_1, \dots, c_{N-1}, X_N > 0$ で示される。

$$X_1 = C_1 = 1, \quad X_2 = C_0C_1, \quad X_3 = C_1C_2 - C_0, \quad X_4 = C_1(C_2C_3 - C_1) - C_0C_3^2$$

であり，上に記した係数はこの条件を侵さないように定めてある。

つぎに (25)～(27) 式により最後に未定パラメーターとして残った，例えば

$$\{\hat{p}\} = [\{a\}, \{b\}]$$

を決定する方法を $N=2$ の場合を例として述べる。(27)式はつぎのように表わされる。

$$I(a_0, a_2, b_0, b_2) = I_1(a_0, a_2, b_0, b_2) + I_2(a_0, a_2, b_0, b_2) \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$I_1 = \int_0^a (\omega^4 + a_2 \omega^2 + a_0) P(\omega) - (b_2 \omega^2 + b_0) \omega^2 d\omega$$

$$I_2 = \int_0^a \{(\omega^4 + a_2 \omega^2 + a_0) Q(\omega) + \frac{b_0 + a_0^{1/2} b_2}{a_0^{1/2} (2a_0^{1/2} + a_2)^{1/2}} \omega^3 + \frac{(a_0^{1/2} + a_2) b_0 - a_0 b_2}{a_0^{1/2} (2a_0^{1/2} + a_2)^{1/2}} \omega\}^2 d\omega \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial b_0} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial b_2} = 0$$

ここで c は最小自乗法適用の独立変数の上限である。(29)式は

$$\frac{\partial I}{\partial \hat{p}_\mu} = \frac{\partial I_1}{\partial \hat{p}_\mu} + \frac{\partial I_2}{\partial \hat{p}_\mu}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4 \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$\{\hat{p}\} = \{\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3, \hat{p}_4\} = \{a_0, a_2, b_0, b_2\}$$

とかける。

(30)式の第1式第2項の存在はこれを $\{\hat{p}\}$ に関する連立無理代数方程式とするので、これを解くには、つぎの perturbation method が適当である。(13)式の関係から明かなように、第零次の近似値 $\{\hat{p}^{(0)}\}$ は下式から求められ、しかも充分な精度をもつものである。

$$\frac{\partial I_1}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial I_1}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial I_1}{\partial b_0} = 0, \quad \frac{\partial I_1}{\partial b_2} = 0 \quad \dots\dots\dots (31)$$

この式はつぎの連立一次代数方程式となる。

$$\begin{aligned} \{\hat{p}\} [\alpha] &= \{\gamma\} \\ [\alpha] &= [\alpha]^T = \begin{pmatrix} \alpha_{11}, \dots, \alpha_{14} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{41}, \dots, \alpha_{44} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

$$\{\hat{p}\} = \{a_0, a_2, b_0, b_2\}, \quad \{\gamma\} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_4\}$$

ここで $[\alpha]$, $\{\gamma\}$ は $\hat{p}(\omega)^{\mu_1} \cdot \omega^{\mu_2}$ (μ_1, μ_2 は零または正整数) の形の関数の $[0, c]$ における定積分として数値的に得られる。したがって

$$\{\hat{p}^{(0)}\} = \{\gamma\} [\alpha]^{-1} \quad \dots\dots\dots (33)$$

を得る。つぎにこれを(30)式によってさらに精度を上げる。(30)式はまたつぎのように表現される。

$$\{\hat{p}\} ([\alpha] + [\beta]) + \{n\} = \{\gamma\} + \{\nu\} \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$[\beta] = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\nu] = \{\nu_1, \nu_2, 0, 0\}$$

$$\{n\} = \{f_1, f_2\} \begin{bmatrix} \beta_3 & \beta_5 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \left\{ \beta_7 + \beta_3 \hat{p}_1 + \beta_5 \hat{p}_2 + \delta_6 f_1 + \delta_4 f_2 \right\} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \hat{p}_1}, \frac{\partial f_1}{\partial \hat{p}_2}, \frac{\partial f_1}{\partial \hat{p}_3}, \frac{\partial f_1}{\partial \hat{p}_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \hat{p}_1}, \frac{\partial f_2}{\partial \hat{p}_2}, \frac{\partial f_2}{\partial \hat{p}_3}, \frac{\partial f_2}{\partial \hat{p}_4} \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \frac{b_0 + a_0^{1/2} b_2}{a_0^{1/2} (2a_0^{1/2} + a_2)^{1/2}}$$

$$f_2 = \frac{(a_0^{1/2} + a_2) b_0 - a_0 b_2}{a_0^{1/2} (2a_0^{1/2} + a_2)^{1/2}} \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_1}{\partial \hat{p}_1} &= \frac{\partial f_1}{\partial a_0} = -\frac{[(3a_0^{1/2} + a_2)b_0 + a_0 b_2]}{2a_0^{3/2}(2a_0^{1/2} + a_2)^{3/2}} \\
 \frac{\partial f_1}{\partial \hat{p}_2} &= \frac{\partial f_1}{\partial a_2} = -\frac{b_0 + a_0^{1/2}b_2}{2a_0^{1/2}(2a_0^{1/2} + a_2)^{3/2}} \\
 \frac{\partial f_1}{\partial \hat{p}_3} &= \frac{\partial f_1}{\partial b_0} = \frac{1}{a_0^{1/2}(2a_0^{1/2} + a_2)^{1/2}}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \hat{p}_4} = \frac{\partial f_1}{\partial b_2} = \frac{1}{(2a_0^{1/2} + a_2)^{1/2}} \\
 \frac{\partial f_2}{\partial \hat{p}_1} &= \frac{\partial f_2}{\partial a_0} = -\frac{[a_0 b_0 + (3a_0^{1/2} + a_2)a_2 b_0 + (a_0^{1/2} + a_2)a_0 b_2]}{2a_0^{3/2}(2a_0^{1/2} + a_2)^{3/2}} \\
 \frac{\partial f_2}{\partial \hat{p}_2} &= \frac{\partial f_2}{\partial a_2} = \frac{(3a_0^{1/2} + a_2)b_0 + a_0 b_2}{2a_0^{1/2}(2a_0^{1/2} + a_2)^{3/2}} \\
 \frac{\partial f_2}{\partial \hat{p}_3} &= \frac{\partial f_2}{\partial b_0} = \frac{a_0^{1/2} + a_2}{a_0^{1/2}(2a_0^{1/2} + a_2)^{1/2}}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \hat{p}_4} = \frac{\partial f_2}{\partial b_2} = -\frac{a_0}{a_0^{1/2}(2a_0^{1/2} + a_2)^{1/2}}
 \end{aligned}$$

$[\alpha]$, $\{\gamma\}$ は(32)式におけると同じものであるが、これで $[\beta]$, $\{\nu\}$, β_i , δ_i と共に一括して示すならば、つぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11} &= \int_0^c P^2(\omega) d\omega, & \alpha_{12} &= \alpha_{21} = \int_0^c \omega^2 P^2(\omega) d\omega, \\
 \alpha_{13} &= \alpha_{31} = -\int_0^c P(\omega) d\omega, & \alpha_{14} &= \alpha_{41} = -\int_0^c \omega^2 P(\omega) d\omega \\
 \alpha_{22} &= \int_0^c \omega^4 P^2(\omega) d\omega, & \alpha_{23} &= \alpha_{32} = -\int_0^c \omega^2 P(\omega) d\omega \\
 \alpha_{24} &= \alpha_{42} = -\int_0^c \omega^4 P(\omega) d\omega, & \alpha_{33} &= \int_0^c d\omega = c \\
 \alpha_{34} &= \alpha_{43} = \int_0^c \omega^2 d\omega, & \alpha_{44} &= \int_0^c \omega^4 d\omega, \\
 \gamma_1 &= -\int_0^c \omega^4 P^2(\omega) d\omega, & \gamma_2 &= -\int_0^c \omega^6 P^2(\omega) d\omega \\
 \gamma_3 &= \int_0^c \omega^4 P(\omega) d\omega, & \gamma_4 &= \int_0^c \omega^6 P(\omega) d\omega \\
 \beta_{11} &= \int_0^c Q^2(\omega) d\omega, & \beta_{12} &= \beta_{21} = \int_0^c \omega^2 Q^2(\omega) d\omega \\
 \beta_{22} &= \int_0^c \omega^4 Q^2(\omega) d\omega, & \nu_1 &= -\int_0^c \omega^4 Q^2(\omega) d\omega \\
 \nu_2 &= -\int_0^c \omega^6 P^2(\omega) d\omega, & \beta_i &= \int_0^c \omega^i Q(\omega) d\omega \\
 \delta_i &= \int_0^c \omega^i d\omega
 \end{aligned}$$

(34)式から、つぎの漸化式をうる。

$$\{\hat{p}^{(n)}\} = [\{\gamma\} + \{\nu\}] [\alpha]^{-1} - \{\hat{p}^{(n-1)}\} [\beta] [\alpha]^{-1} - \{\nu^{(n-1)}\} [\alpha]^{-1} \quad (36)$$

通常はじめに与えられる伝達関数 $\phi(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ が充分正確で、かつ数学的安定性と物理的実現可能性を兼ね備えたものであるならば、(33)式または $\{\hat{q}^{(0)}\} = \{\nu\} [\beta]^{-1}$ により求められる伝達関数の実数部または虚数部のみを対象にして、最小自乗法を適用した第零次近似値で充分な精度の近似的な伝達関数が得られる。このような場合には更に簡単化して単に $P(\omega)$, または $Q(\omega)$ を直接の対象とし、 $\{\hat{p}\}$ または $\{\hat{q}\}$ を連立一次代数方程式で定めるのに必要な点をサンプリングして、(32)式と同様な形の式がえられる。(33), (25)両式によって得た結果を Routh-Hurwitz の安定条件で検討するだけで充分である場合がある。

例えば $N=2$ の場合に

$$P(\omega_i) = \hat{p}(\omega_i), \quad i=1, \dots, 4$$

から

$$P(\omega_i)a_0 + \omega_i^4 P(\omega_i)a_2 - b_0 - \omega_i^2 b_2 = -\omega_i^4 P(\omega_i) \quad (37)$$

これより(32), (33)および(25)の諸式を経て

$$r_1 = c_0 > 0, \quad r_2 = c_1 > 0, \quad X_2 = r_1 r_2 = c_0 c_1 > 0$$

をもって検討を行えばよい。このとき $\phi_a(s)$ または $\phi_a(j\omega)$ が簡単に求められる。

2・3 Ground Compliance の近似的表現とアナログ計算機の等価演算回路

矩形基礎の Ground Compliance の理論解をデジタル計算機により、出来るだけ厳密に計算された一連の数値解がすでに用意されているので、^{2)~4), 9), 10)} ここでは半無限弾性地盤上の矩形断面をもつ剛体が、地震地動の水平成分によって並進ならびに回転の運動をする比較的簡単な場合について考察する。座標を Fig. 1 のようにとり、Fourier 変換された無次元基礎方程式を求める。と次のようになる。

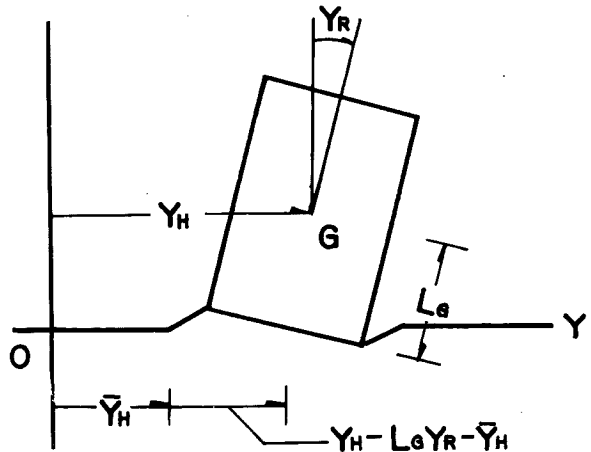


Fig. 1.

$$[D] \begin{bmatrix} G\phi_H \\ G\phi_R \end{bmatrix} = \kappa_H(\omega') \begin{bmatrix} 1 \\ -l_G \end{bmatrix} \dots (38)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} -m_H \omega'^2 + \kappa_H(\omega'), & -l_G \kappa_H(\omega') \\ -l_G \kappa_H(\omega'), & -m_R \omega'^2 + \kappa_R(\omega') + l_G^2 \kappa_H(\omega') - m_H l_G \gamma \end{bmatrix} \dots (39)$$

ここに

$$\tau' = \frac{V_s}{L} T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \frac{T}{L}, \quad \omega' = \mathcal{Q} \frac{\bar{L}}{V_s} = \mathcal{Q} \bar{L} \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \dots (40)$$

$$G\phi_H = U_H / F_H, \quad G\phi_R = \bar{L} U_R / F_H \\ U_H \subset Y_H, \quad U_R \subset Y_R, \quad F_H \subset \bar{Y}_H \dots (41)$$

$$m_H = \frac{M_H}{\rho \bar{L}^3}, \quad m_R = \frac{M_R}{\rho \bar{L}^5}, \quad l_G = \frac{L_G}{\bar{L}}, \quad \gamma = \frac{\bar{L}_g}{V_s^2} = \frac{\bar{L} g \rho}{\mu} \\ \kappa_H(\omega') = \frac{1}{\mu \bar{L} G_H(j\omega')} = \frac{1}{\mu \bar{L} c_H \{f_{1H}(\omega') + j f_{2H}(\omega')\}} \\ \kappa_R(\omega') = \frac{1}{\mu \bar{L}^3 G_R(j\omega')} = \frac{1}{\mu \bar{L}^3 c_R \{f_{1R}(\omega') + j f_{2R}(\omega')\}} \dots (42)$$

$$f_{1i}(\omega') = \mathbf{R} \{G_i(j\omega')\} / c_i$$

$$f_{2i}(\omega') = \mathbf{I} \{G_i(j\omega')\} / c_i$$

$$i = H, R, (V)$$

そして T : 時間, $\mathcal{Q}$: 円振動数, Y_H, Y_R : 剛体重心の水平および回転変位, $\bar{Y}_H$: 水平方向の地動変位, $\bar{L}$: 長さの規準量, g : 重力の加速度, $j: \sqrt{-1}$, M_H, M_R : 剛体質量および重心に関する回転慣性, L_G : 重心の地盤表面からの高さ, ρ : 弾性地盤密度, μ : Láme の定数, $c_i(j\omega') = c_i \{f_{1i}(\omega') + j f_{2i}(\omega')\}$: 弾性地盤上の基礎の水平方向, あるいは回転の方向に関する Ground Compliance, そしてここで c_i は $\bar{L}$ と関連して次の如く定める。

円形基礎の場合には

$$c_H = (2\pi \mu r_0)^{-1}, \quad c_R = 4(\pi r_0^3 \mu)^{-1}, \quad \bar{L} = r_0$$

矩形基礎の場合には

$$c_H = (c\mu)^{-1}, \quad c_R = 3(b^3\mu)^{-1}, \quad \bar{L} = b \quad (43)$$

ここで r_0 は円形の半径, b と c はそれぞれ矩形の水平地動方向とそれに直角方向の辺長を示す。既往の文献 2)~4) および 9), 10) では ω' が a_0 として書かれ, $f_{ii}(\omega')$ または $f_{ii}(\omega')$ は実関数として数値計算されている。

さて(38), (39)両式の解はつぎのように求められる。

$$\begin{aligned} [G] &= \begin{bmatrix} G\phi_H \\ G\phi_R \end{bmatrix} = \kappa_H(\omega') [A]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -l_G \end{bmatrix} \\ &= \frac{\kappa_H(\omega') \begin{bmatrix} -m_H\omega'^2 + \kappa_H(\omega') - m_H l_G \gamma \\ m_H l_G \omega'^2 \end{bmatrix}}{\{-m_H\omega'^2 + \kappa_H(\omega')\} \{-m_H\omega'^2 + \kappa_H(\omega') - m_H l_G \gamma\} - m_H l_G^2 \omega'^2 \kappa_H(\omega')} \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

この解 $[G]$ は入力 $\bar{Y}_H$ に対する出力 Y_H, Y_R の伝達関数である。したがって非定常解はつぎのように表現できる。

$$[\eta] = \begin{bmatrix} \eta_H \\ \eta_R \end{bmatrix} = [g] * \tilde{f}_H \dots\dots\dots (45)$$

ここに

$$\begin{aligned} [\eta] &= [Y]/\bar{L}' = \begin{bmatrix} Y_H \\ Y_R \end{bmatrix} / \bar{L}', \dots\dots\dots (46) \\ \tilde{f}_H &= \frac{\bar{Y}_H}{\bar{L}'} + \sigma, \quad [g] \square [G] \\ \bar{L}' &= |\bar{Y}_H|_{\max}, \end{aligned}$$

$\bar{L}'$ は $\bar{L}$ とは独立な長さの規準量, σ は初期条件演算子を含む項である。

(43)式から判るように変形一力の伝達関数 $\kappa_i(\omega')$ は, 力一変形の伝達関数としての $G_i(j\omega')$ から求められる。Fourier 変換系での伝達関数 $\phi(j\omega)$ と Laplace 変換系での伝達関数 $\phi(s)$ は単に $s=j\omega$ の変換のみで互に対応付けられることを用いて, 次式により Laplace 変換系の変形一力の伝達関数をうる。

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_i(s) &= \kappa_i(-js), \quad i = H, R, (V) \dots\dots\dots (47) \\ s &= j\omega' \quad \text{あるいは} \quad \omega' = -js \end{aligned}$$

ここで(42), (43)両式から矩形基礎の場合の $\kappa_i(\omega')$ はつぎの形をとる。

$$\begin{aligned} \kappa_H(\omega') &= \frac{1}{\frac{b}{c} \{f_{1H}(\omega') + jf_{2H}(\omega')\}} \dots\dots\dots (48) \\ \kappa_R(\omega') &= \frac{1}{3 \{f_{1R}(\omega') + jf_{2R}(\omega')\}} \end{aligned}$$

(47)式を用いて Laplace 変換系の無次元基礎方程式はつぎのように書くことができる。

$$\begin{aligned} \hat{U}_H + \frac{\tilde{\kappa}_H(s')}{m_H s'^2} (\hat{U}_H - l_G \hat{U}_R - \hat{F}_H) &= 0 \dots\dots\dots (49) \\ \hat{U}_R + \frac{\tilde{\kappa}_R(s')}{m_R s'^2} \hat{U}_R + \frac{m_H}{m_R} l_R \hat{U}_H - \frac{m_H l_G \gamma}{m_R s'^2} \hat{U}_K &= 0 \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} \hat{U}_H &= U_H / |\bar{Y}_H|_{\max}, \quad \hat{U}_K = \bar{L} U_R / |\bar{Y}_H|_{\max} \dots\dots\dots (50) \\ \hat{F}_H &= F_H / |\bar{Y}_H|_{\max}, \end{aligned}$$

(49)式の非定常解をアナログ計算機で求めるためには, (49)式における伝達関数 $\tilde{\kappa}_H(s')/s'^2$ および $\tilde{\kappa}_R(s')/s'^2$ を定め, これをアナログ計算機の演算要素として構成すればよい。

ここでさらに(49)式に示される系に, 剛体と弾性地盤との間に, 直列にその厚さも慣性効果も無視できる, 非線型復元力特性のみをもつ, 理想化された剛体底面の周辺地盤の薄い層の存在を導入すれば, これは

剛体の運動に伴って、剛体底面に接する地盤が局部的に降伏し、弾塑性的な性質を示す周辺地盤の薄い層が形成されることを意味することとなり、強い地震によって剛体が運動させられる状態に近い、現実的な近似を与えることになるであろう。このとき Fig. 2 に示される座標をとれば、つぎのような Laplace 変換系の無次元方程式を得る。

$$\begin{aligned}\hat{U}_H + \frac{g_{bH}}{m_H s'^2} &= 0 \\ \hat{U}_R + \frac{g_{bR} - g_{bHR} - g_G}{m_R s'^2} &= 0 \\ g_{bH} &= g_{bH}(\hat{U}_H - l_G \hat{U}_R - \hat{U}_{bH}) \\ &= \tilde{\kappa}_H(s')(\hat{U}_{bH} - \hat{F}_H) \\ g_{bR} &= g_{bR}(\hat{U}_R - \hat{U}_{bR}) = \tilde{\kappa}_R(s')\hat{U}_{bR} \\ g_{bHR} &= l_G g_{bH}, \quad g_G = m_H l_G \gamma \hat{U}_R \\ &\dots\dots\dots (52)\end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}\hat{U}_{bH} &= U_{bH} / |\bar{Y}_H|_{\max}, & \hat{U}_{bR} &= \bar{L} U_{bR} / |\bar{Y}_H|_{\max} \\ U_{bH} &\subset Y_{bH}, & U_{bR} &\subset Y_{bR} \\ g_{bH}(\hat{U}_H - l_G \hat{U}_R - \hat{U}_{bH}) &= \frac{1}{\mu \bar{L} |\bar{Y}_H|_{\max}} G_{bH} \{ |\bar{Y}_H|_{\max} (U_H - l_G U_R - U_{bH}) \} \\ g_{bR}(\hat{U}_R - \hat{U}_{bR}) &= \frac{1}{\mu \bar{L}^3} G_{bR} \left\{ \frac{|\bar{Y}_H|_{\max}}{\bar{L}} (U_R - U_{bR}) \right\} \\ G_{bH} &\subset N_{bH}, & G_{bR} &\subset N_{bR}\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (53)$$

であり、そしてまた

$$\begin{aligned}N_{bH} &= N_{bH}(Y_H - L_G Y_R - Y_{bH}) \\ N_{bR} &= N_{bR}(Y_R - Y_{bR})\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (54)$$

は剛体底面の周辺地盤の水平および回転の非線型復元力特性を表わすものであり、 Y_{bH} , Y_{bR} はこの周辺地盤の水平および回転変位(静止座標)である。したがってこの場合もアナログ計算のためには、(51), (52) 両式における伝達関数 $\tilde{\kappa}_H(s')^{-1}$ および $\tilde{\kappa}_R(s')^{-1}$ を定め、その等価演算回路を求めればよい。

ところでデジタル計算機によって理論解から数値的に Dynamical Compliance

$$f_i(\omega') + j f_{zi}(\omega')$$

がある程度求められているので、^{4), 8)} 既述の 2・2 の方法によって有理関数による近似的伝達関数が求められる。すなわち (21) 式より

$$\begin{aligned}\phi_{ai}(s') &= \sum_{k=0}^{N-1} d_{ki} s'^k / \sum_{k=0}^N c_{ki} s'^k \\ c_{Ni} &= 1, & i &= H, R\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (55)$$

よって(42), (47)の両式から

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_i(s') &= \sum_{k=0}^N c_{ki} s'^k / \sum_{k=0}^{N-1} d'_{ki} s'^k \\ c_{Ni} &= 1\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (56)$$

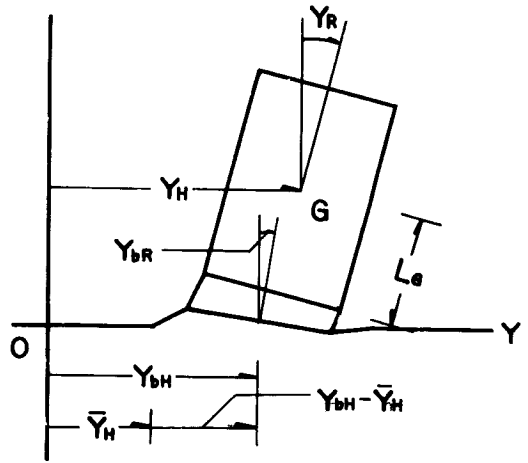


Fig. 2.

$$d'_{kH} = \mu \bar{L} c_H d_{kH}, \quad d'_{kR} = \mu \bar{L}^3 c_R d_{kR}$$

$$i = H, R$$

がえられる。したがって必要な伝達関数はつぎのように求められる。

$$\frac{\tilde{\kappa}_i(s')}{s'^2} = \sum_{k=0}^N c_{ki} s'^k / \sum_{k=2}^{N+1} d'_{k-2,i} s'^k$$

$$\frac{1}{\tilde{\kappa}_i(s')} = \sum_{k=0}^{N-1} d'_{ki} s'^k / \sum_{k=0}^N c_{ki} s'^k \quad \dots\dots\dots (57)$$

$$i = H, R$$

アナログ演算に移すために、time scale pq を導入して、独立変換を変換すれば、Laplace 変換パラメータはつぎのように変換すればよい。

$$t = pq\tau' \quad \sim \quad s' = pqS \quad \dots\dots\dots (58)$$

ここに t は演算回路の独立変数（時間）、 S は t に対応する Laplace 変換の複素パラメータである。

よって演算回路での伝達関数はつぎのように表わせる。

$$\frac{O_{UT}}{I_N} = \frac{\tilde{\kappa}_i(pqS)}{(pq)^2 S^2} = \frac{\sum_{k=0}^N c_{ki}(pq)^k S^k}{\sum_{k=2}^{N+1} d'_{k-2,i}(pq)^k S^k} \quad \dots\dots\dots (59)$$

$$\frac{O_{UT}}{I_N} = \frac{1}{\tilde{\kappa}_i(pqS)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} d'_{ki}(pq)^k S^k}{\sum_{k=0}^N c_{ki}(pq)^k S^k}$$

$$i =, HR$$

(57), (59) 両式はいづれにしても、つぎの形をもつ。

$$\frac{O_{UT}}{I_N} = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k s^k / \sum_{k=0}^N \alpha_k s^k \quad \dots\dots\dots (60)$$

これよりつぎの表現をうる。

$$\frac{O_{UT}}{I_N} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\beta_k}{\alpha_N} s^{k-N} I_N - \frac{\alpha_k}{\alpha_N} s^{k-N} O_{UT} \right)$$

$$= \frac{1}{s} \left[-\frac{\alpha_{N-1}}{\alpha_N} O_{UT} + \frac{\beta_{N-1}}{\alpha_N} I_N + \frac{1}{s} \left[-\frac{\alpha_{N-2}}{\alpha_N} O_{UT} + \frac{\beta_{N-2}}{\alpha_N} I_N + \frac{1}{s} \left[\dots + \frac{1}{s} \left[-\frac{\alpha_0}{\alpha_N} O_{UT} \right. \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left. + \frac{\beta_0}{\alpha_N} I_N \right] \dots \right] \right] \right] \quad \dots\dots\dots (61)$$

したがって近似すべき等価伝達関数の演算回路は上式にもとづいて、加算積分器、加算器、符号変換器、係数器の伝達特性、

$$O_{UT} = -s^{-1} \Sigma I_N$$

$$O_{UT} = -\Sigma I_N$$

$$O_{UT} = -1 \cdot I_N$$

$$O_{UT} = c I_N$$

を考慮すれば容易に求められる。

以上を例証するために、 $i = H$, $N = 2$, $c/b = 2$ の場合の、すでに数値的に求められている矩形基礎の Dynamical Compliance に対応する近似的伝達関数を(37)式の方法によって求めるならば、

$$f_{1H}(-js') + j f_{2H}(-js')$$

$$\simeq \hat{p}_H(-js') + j \hat{q}_H(-js)' = \phi_H(s')$$

$$= \frac{d_1 s' + d_0}{s'^2 + c_1 s' + c_0} \quad \dots\dots\dots (62)$$

$$c_0 = 3.132, \quad c_1 = 3.007 \\ d_0 = 1.015, \quad d_1 = 0.165$$

となる。これを図示すれば **Fig. 3** のようになる。図において○および◎は数値的にデジタル計算機によって求められている値であり、これ等の○および◎の点を結ぶ曲線

(**Fig. 3** では引かれていない) は $f_{1H}(\omega')$ および $f_{2H}(\omega')$ に当る。図の曲線はこれ等の点の中の◎印の点をもとにしてまず $\hat{p}_H(\omega')$ を近似し、 $\hat{p}_H(\omega')$ なり $\hat{q}_H(\omega')$ を求めたもので、両曲線は simulate された f_{1H} および $-f_{2H}$ の近似曲線である。三点をもとにして $N=2$ としても、可成り良好な近似曲線が求められることがこれより分るであろう。

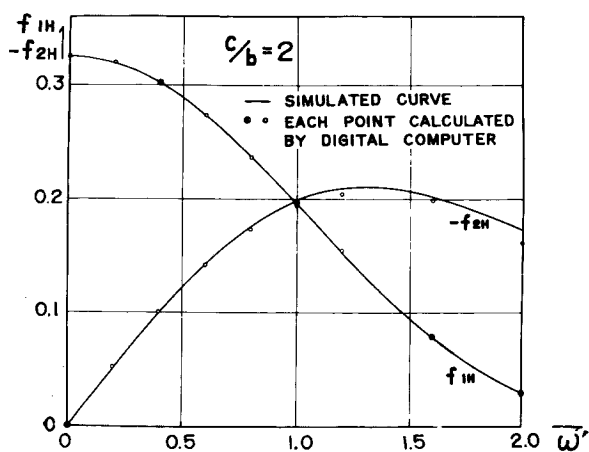
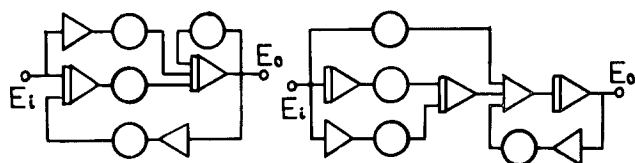


Fig. 3.

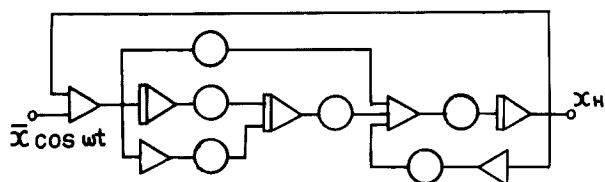
Fig. 4 (a), (b)には(43) (56), (61), (62)の諸式にもとづいて定められた(57)式に対応する伝達関数の演算回路構成のブロック・ダイアグラムが示され、(c)には(49)式にて $m_R = \infty$

すなわち $\hat{U}_R = 0$ の場合の単に水平振動のみの演算回路のブロック・ダイアグラムが示してある。

さらに **Fig. 5** には(44)式における $g\phi_H$ の絶対値、すなわち振幅特性を(62)式により計算し、これに対応するもとの値および **Fig. 4** の(c)に示したアナログ演算回路によって求めた結果を $m_H = 1.6, 3.2, 6.4$ の場合に比較して示してある。



$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{1}{\tilde{\kappa}_H(s)} = \frac{d_1 s' + d_0}{s^2 + c_1 s' + c_0} \quad \frac{E_o}{E_i} = \frac{\tilde{\kappa}_H(s)}{s^2} = \frac{s^2 + c_1 s' + c_0}{s^2 (d_1 s' + d_0)} \quad (a) \quad (b)$$



(C)

Fig. 4.

$$|g\phi_H| = \left| \frac{U_H}{F_H} \right| = \left| -\frac{\kappa_H(\omega')}{\kappa_H(\omega') - m_H \omega'^2} \right| \quad \dots\dots\dots (63)$$

$$\kappa_H(\omega') = \frac{2}{\hat{p}_H(\omega') + j\hat{q}_H(\omega')} \approx \frac{2}{f_{1H}(\omega') + jf_{2H}(\omega')}$$

図の縦軸は上式の $|g\phi_H| = |U_H/F_H|$ であり、応答の曲線は **Fig. 3** の simulate された曲線を用いて、こ

れをアナログ計算機によらずに、デジタル計算機で求めたもの、○印の点は同じく simulate された曲線を用いて Fig. 4 (c) のアナログ演算回路より計算された値であり、●印の点は Fig. 3 の○印および◎印の点の値を用いてデジタル計算機で求めた値を示している。 ω' が余り大きくなければ、相当よい近似がえられるものであることを示すものと考えてよいであろう。

3. あとがき

まともに計算すると相当に厄介な問題点を含む矩形基礎の Ground Compliance の問題を、アナログ演算回路に simulate することによって上部構造物との接続を容易にし、非定常・非線型の地震応答を求める手段を現実的に可能としたことに本論文の意味があるものと思う。simulation に当っては安定な物理系の伝達関数の知見にもとづき、地盤伝達関数を有理関数形として表現し、アナログ計算機の等価演算回路との対応を求めて、その有用性を例証するとともに、計算値の精度を明かにした。当然の結果としての構造物の地震応答への拡張は別の報告で試みられている。¹²⁾

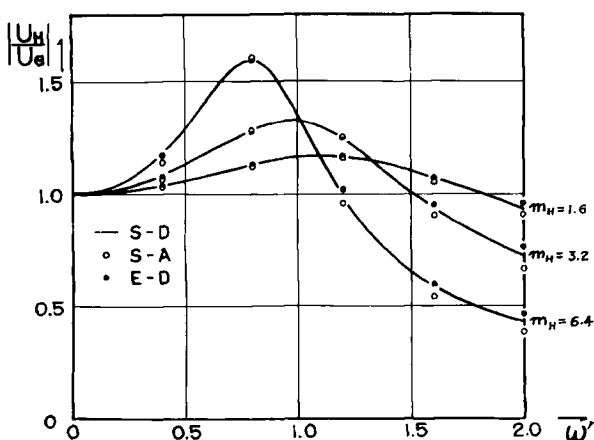


Fig. 5.

参 考 文 献

- 1) 棚橋諒, 小堀鐸二, 南井良一郎: 構造物の動的耐震設計法と地震レスポンス, 京都大学防災研究所年報, 第5号 B, 昭37.3 pp.1-32.
- 2) Thomson, W. T. and Kobori, T.: Dynamical Compliance of Rectangular Foundations on an Infinite Half-space, Dept. of Eng., UCLA, Report No.62-9, 1962. pp. 1-33.
Kobori, T.: Dynamical Response of Rectangular Foundation on an Elastic-space, Proc. of Japan National Symposium on Earthquake Engineering, 1962, pp. 81-86.
- 3) Thomson, W. T. and Kobori, T.: Dynamical Compliance of Rectangular Foundation on an Elastic Half-space, ASME Paper No.63-APMW-17 Submitted to Journal of Applied Mechanics, 1962.
- 4) 小堀鐸二, 井上豊, 鈴木有: 弾性地盤上の矩形基礎の Ground Compliance, 日本建築学会論文報告集, 第89号, 昭38.9, p. 194.
- 5) Solodovnikov, V. V.: Introduction to the Statistical Dynamics of Automatic Control Systems, Dover.
- 6) 小堀鐸二, 南井良一郎: 制震系の解析 (制震構造に関する研究 1, 2) 日本建築学会論文報告集, 第66号, 昭35.10, pp. 254-264.
- 7) 小堀鐸二, 南井良一郎: 制震系の解析 (制震構造に関する研究 3, 4) 日本建築学会論文報告集, 第69号, 昭36.10, pp. 405-412.
- 8) 小堀鐸二, 南井良一郎, 鈴木有: 弾性地盤上の架構の動的応答, 日本建築学会論文報告集, 第89号, 昭38.9, p. 193.
- 9) Toriumi, I.: Vibrations in Foundations of machines, Technology Report of the Osaka University, Japan Vol. 5, No. 146, 1955.
- 10) Toriumi, I., Sato, Y. and Yamaguchi, R.: Vibrations in Foundation, Structure and in its Vicinity on Ground, Proc. of the 2nd W.C.E.E., 1960, pp. 1413-1429.

- 11) 小堀鐸二, 南井良一郎: スカイスクレーパーの弾塑性応答と耐震設計法, 京都大学防災研究所年報第6号, 昭38.7, pp.44-62.
- 12) 小堀鐸二, 南井良一郎, 井上豊: Ground Compliance を考慮した構造物の地震応答, 京都大学防災研究所年報第7号, 昭.39.3.