

# Numerical and mathematical approach to repeated support splitting and merging phenomena for some nonlinear diffusion equations

## 解の台の併合分離を任意多数回生じる非線形問題とその数値解法

大阪工業大学・工学部 友枝 謙二 (Kenji Tomoeda)  
Osaka Institute of Technology

**Abstract.** Numerical experiments to the interaction between diffusion and absorption suggest several interesting phenomena. Among these there is a remarkable manifestation in the dynamical behaviour of the support; that is, the appearance of support splitting and merging phenomena. From mathematical points of view, we show the sufficient conditions under which such phenomena appear. Moreover, repeated support splitting and merging phenomena are also investigated.

### 1. はじめに

拡散と吸収という相反する相互作用によって引き起こされる現象のモデル化とそれに対する数値計算は非常に興味深い問題である。中でも興味深い性質の一つとして、吸収によってサポートが分離し拡散によってそれが拡がり融合するという現象が期待される。これに対する数理モデルとしては、1次元空間での吸収性をもった多孔性媒体中の流れを記述する次の方程式がある (Aronson([1]) 及び Rousenau と Kamin([17]) を参照)。

$$(1) \quad v_t = (v^m)_{xx} - cv^p, \quad x \in \mathbf{R}^1, \quad t > 0,$$

$$(2) \quad v(0, x) = v^0(x). \quad x \in \mathbf{R}^1,$$

ここで  $v = v(t, x)$  は流体の密度を, サポート  $\text{supp } v(t, \cdot) = \overline{\{x \in \mathbf{R}^1 \mid v(t, x) > 0\}}$  は流体の浸透領域を意味する。  $-cv^p$  ( $c > 0$ ) は, 蒸発または流体の流れる媒質による吸収効果を表す。

本講究録では, 初期値問題 (1)-(2) に対する数値計算から得られた「繰り返されるサポートの分離・融合」に関するこれまでの研究成果 (友枝・中木 [18], [19]) のレジュメを述べる。更に初期境界値問題におけるサポートの分離・融合については新しい計算結果を提示し, 数値解析及び数学解析の両面からの問題を提起する。尚, 図 8 の計算シミュレーションには, 数値解の収束性が数学的保証された中木・友枝の差分法を用いている ([15] 参照)。

以下の条件をおく。

- 条件 1. i)  $m (> 1)$ ,  $p (> 0)$  と  $c (\geq 0)$  は定数とする;  
ii)  $v^0(x) \in C^0(\mathbf{R}^1)$  は非負で有界なサポートを持つ。

条件 1-i)のもとでは, (1) の解は, 拡散係数が  $v = 0$  で退化していることからその正則性が失われ, 弱解として扱われる ([3],[8],[11],[13],[16]).

解析的な観点から, 条件 1-i)のもとでは初期値問題 (1)-(2) の弱解  $v(t, x)$  の存在と一意性が確立されている ([3],[8, 9],[11],[16]). 同時にこの弱解は  $P(v) \equiv \{(t, x) \mid v(t, x) > 0\}$  では通常の意味で (1) を満たす. 更に (1) に対する  $Q_T \equiv (0, T) \times (L_1, L_2)$  ( $0 < T < \infty, -\infty < L_1 < L_2 < \infty$ ) 上での初期境界値問題においては 初期境界条件に関する比較定理が成り立つ ([2], [10]). 解のサポートについては, 条件 1-ii)のもとで以下のことが示されている ([7], [8], [9], [10], [12], [13]):

- (P-1)  $c = 0$ , または  $c > 0$  且つ  $p \geq 1$  の時は  $\text{supp } v(t, \cdot)$  は時間発展と共に単調に拡がる.  
(P-2)  $c > 0$  且つ  $0 < p < 1$  の時は 吸収効果が拡散効果よりも優勢であり, 解はある有限時刻以後恒等的にゼロになる (解の消滅). このような時刻の下限を消滅時刻といい  $T^* (> 0)$  で表す.

(P-1) の場合, 連結な初期サポートから出発した解のサポートは決して分離しない (Knerr [13] の Lemma 3.4 と Remark 3.5 を参照).

(P-2) の場合, 2つの極大値を持つ初期関数から出発した解のサポートは 分離する可能性があり ([3],[15]), サポートが分離するための十分条件が知られている ([18]). その十分条件は, 2つの極大値を持つ初期関数に課するものである (後述の分離定理参照). 一方, 図 1 にあるように, サポートの分離後, 融合する数値例も得られている. 融合現象は分離後のサポートの拡張性によって得られるが, 分離のための十分条件はむしろサポートの拡張性を弱める方向に働く. そのため, この相反する方向性にある性質の下で分離と融合現象をもたらす初期関数を如何に構成するかが問題となる.

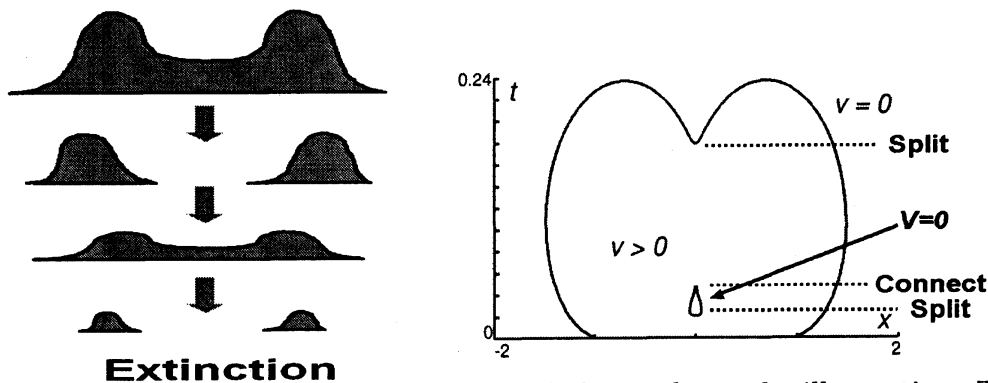


図 1: Support re-splitting phenomena. The left figure shows the illustration. The right one shows numerical interfaces for  $v_t = (v^{1.5})_{xx} - 5v^{0.5}$ .

以下, 分離・融合現象及びその反復性を調べるために (1) の特殊解が得られている  $m + p = 2$  ( $0 < p < 1$ ) の場合について述べる. そのための準備として方程式 (1)-(2) を  $u \equiv v^{m-1}$  と置き換えて次の形に書き換える.

$$(3) \quad u_t = muu_{xx} + \frac{m}{m-1}(u_x)^2 - (m-1)c\chi_{\{u>0\}},$$

$$(4) \quad u(0, x) = u^0(x) \equiv (v^0(x))^{m-1}.$$

ここで,

$$(5) \quad \chi_{\{u>0\}}(t, x) = \begin{cases} 1 & (u(t, x) > 0 \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

であり,  $u$  のサポートの特性関数を示す.

以下の議論では  $m, p, c$  は次の条件 2 を, 初期関数  $v^0(x)$  は条件 1-ii) をそれぞれ満たしているものとする.

**条件 2.**  $m + p = 2, \quad m > 1, \quad p > 0, \quad c > 0.$

## 2 特殊解の構成と既知の結果

Kersner([10]) と Martinson([14]) は サポートが時間発展に伴って広がるがその後吸収効果によって収縮し有限時間内に消滅する様な特殊解を構成している. Galaktionov と Vazquez([4, 5]) は解が消滅する直前にサポートが分離する可能性について特殊解を用いて示唆している. しかし, どのような初期値から出発すれば分離するか, または分離後融合するかについては述べていない. 以後扱う次の 2 つの特殊解を紹介する. 解の形を次のように置く.

$$(6) \quad u(t, x) = f(t) + g(t)h(x).$$

$h(x) = -x^2$  の場合 (Kersner の解 ([10])). 解はパラメータ  $\sigma (> 0)$  と  $\rho (> 0)$  に対して

$$(7) \quad u(t, x) = \{A + (2m + 4a)t\}^{-1} \left[ B \{A + (2m + 4a)t\}^{\frac{2}{m+1}} - D \{A + (2m + 4a)t\}^2 - x^2 \right]_+$$

と表される. ただし,  $[g]_+ = \max\{g, 0\}$ ,

$$(8) \quad \begin{cases} A \equiv A(\rho, \sigma) = \frac{\rho^2}{\sigma}, & B \equiv B(m, c, \rho, \sigma) = (\sigma + DA)A^{\frac{m-1}{m+1}}, \\ D \equiv D(m, c) = \frac{(m-1)c}{4(m+a)}, & a = \frac{m}{m-1} \end{cases}$$

であり, 初期関数は区間  $[-\rho, \rho]$  をそのサポートとし,  $x = 0$  で最大値  $\sigma (> 0)$  をとる 2 次関数  $u(0, x) = \sigma(1 - (x/\rho)^2)$  である. 消滅時刻  $T^*(m, c, \rho, \sigma)$  とサポート  $[x_-(t), x_+(t)]$  ( $0 \leq t \leq T^*$ ) はそれぞれで次式で与えられる.

$$(9) \quad T^*(m, c, \rho, \sigma) = \frac{1}{2m + 4a} \left\{ \left( \frac{B}{D} \right)^{\frac{m+1}{2m}} - A \right\},$$

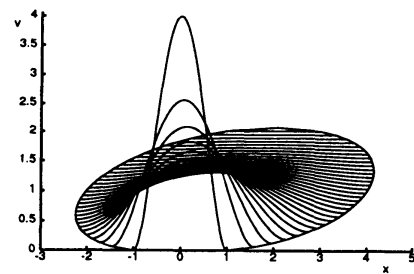


図 2: Kersner's solution.

$$(10) \quad x_{\pm}(t) = \pm \left\{ \left[ B \{A + (2m + 4a)t\}^{\frac{2}{m+1}} - D \{A + (2m + 4a)t\}^2 \right]_+ \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

$h(x) = x^2$  の場合 (Galaktionov and Vazquez([4, 5])). 解はパラメータ  $\varepsilon (> 0)$  と  $\hat{\sigma} (> 0)$  に対して

$$u(t, x) = \{E - (2m + 4a)t\}^{-1} \left[ D\{E - (2m + 4a)t\}^2 + G\{E - (2m + 4a)t\}^{\frac{2}{m+1}} + x^2 \right]_+ \quad (11)$$

と表される. ただし,

$$E \equiv E(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}, \quad G \equiv G(m, c, \hat{\sigma}, \varepsilon) = (\hat{\sigma} - DE)E^{\frac{m-1}{m+1}} \quad (12)$$

であり, 初期関数は  $x = 0$  で最小値  $\hat{\sigma} (> 0)$  をとる 2 次関数  $u(0, x) = \varepsilon x^2 + \hat{\sigma}$  ( $\varepsilon > 0$ ) で非有界である. そのため解は時刻  $\hat{T} \equiv \hat{T}(m, \varepsilon) = \frac{E}{2m+4a}$  においてすべての点  $x \in \mathbf{R}^1 \setminus 0$  で爆発する. さらに  $G < 0$  の時には  $u(\hat{t}, 0) = 0$  となる時刻

$$\hat{t} \equiv \hat{t}(m, c, \hat{\sigma}, \varepsilon) = \frac{1}{2m + 4a} \left\{ E - \left( \frac{-G}{D} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \right\} \quad (13)$$

が存在し  $\hat{t} < \hat{T}$  である.

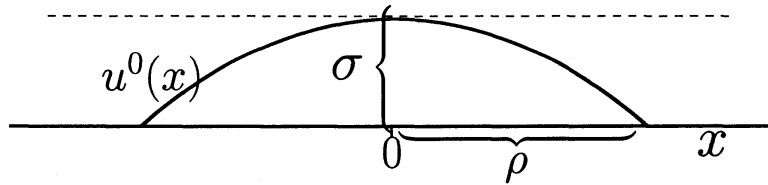


図 3: The initial functions of Kersner's solution(7).

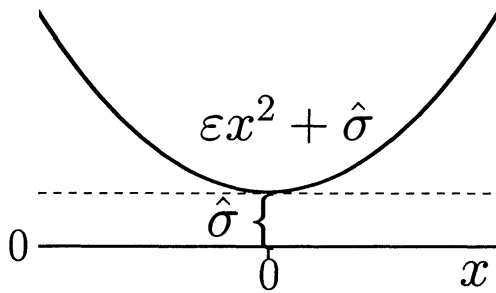


図 4: The initial function of Galaktionov and Vazquez's solution (11).

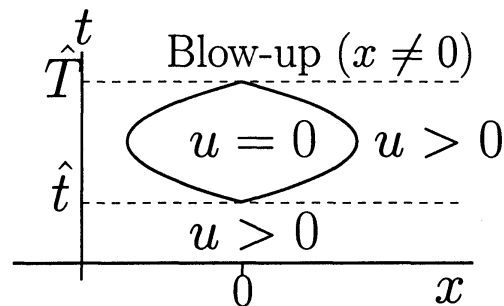


図 5: The support of Galaktionov and Vazquez's solution (11).

サポート分離を示すには, 特殊解 (7) を下からの評価に, 特殊解 (11) を上からの評価に用いる. 比較定理からサポートが分離するための十分条件が得られる.

**分離定理 ([19]).** 任意に与えられた正数  $\sigma$  と  $\hat{\sigma}$  ( $\hat{\sigma} < \sigma$ ) に対して,  $\rho$  と  $\varepsilon$  および 初期関数  $u^0(x)$  は

$$(14) \quad 0 < \hat{t}(m, c, \hat{\sigma}, \varepsilon) < T^*(m, c, \sigma, \rho).$$

$$(15) \quad \left[ \sigma \left\{ 1 - ((x \pm \xi)/\rho)^2 \right\} \right]_+ \leq u^0(x) \leq \varepsilon x^2 + \hat{\sigma} \text{ on } \mathbf{R}^1,$$

を満たすものとする (図 6 参照). ただし,  $\text{supp } v^0(\cdot) = [-\alpha, \alpha]$  ( $0 < \xi < \alpha$ ). この時,  $\text{supp } v(t, \cdot)$  が全ての  $t \in (\hat{t}(m, c, \hat{\sigma}, \varepsilon), \hat{t}(m, c, \hat{\sigma}, \varepsilon) + \delta)$  において少なくとも 2 つの相 交わらない集合に分離しているような正数  $\delta$  が存在する.

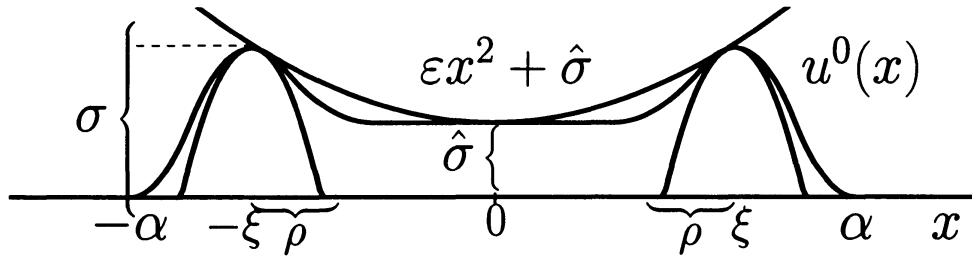


図 6: Initial function  $u^0(x)$ .

この分離定理の不等式 (14) は, 以下のことから達成される.

$$(16) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{t}(m, c, \hat{\sigma}, \varepsilon) = \frac{\hat{\sigma}}{(m-1)c}, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} T^*(m, c, \sigma, \rho) = \frac{\sigma}{(m-1)c}.$$

(16) の前半の不等式は 2 つの極大値を持つ初期関数  $u^0(x)$  の極大値間を十分離すこと であり, 後半のそれは  $u^0(x)$  の下からの評価に用いる Kersner の解の初期形状を十分な だらかにすることである. ところが, その初期形状の傾きの最大値ノルムは小さくな る. このことは, サポートを表す式 (10) によればそのサポートの拡張性を弱め, その 結果, その融合性が期待できない方向に作用する. サポートの分離・融合を再現する には, Kersner の解の初期形状を決定するパラメータ  $\sigma$  と  $\rho$  の取り方に更なる工夫が必 要となる. 以下, サポートの分離・融合を再現しうるこれらのパラメータの決定方法 について述べる.

### 3. サポートの融合性

サポートが一旦分離し, その後融合するための初期関数  $u^0(x)$  を構成しよう. そのため には,  $u^0(x)$  の形状を Galaktionov-Vazquez の解 (11) と Kersner の解 (7) のそれぞれの初 期関数を用いて次のように決める. 以下  $m, c$  を固定する. 任意の正数  $\hat{\sigma}$  を固定し, これ に対して  $G \equiv G(m, c, \hat{\sigma}, \varepsilon) < 0$  を満たす  $\varepsilon \equiv \varepsilon(m, c, \hat{\sigma}) > 0$  を任意に選び固定する. 更 に  $\sigma > \hat{\sigma}$  に対して  $x = \pm \xi$  に配置した Kersner の解の初期関数  $\left[ \sigma \left( 1 - ((x \pm \xi)/\rho)^2 \right) \right]_+$  と Galaktionov-Vazquez の解の初期関数  $\varepsilon x^2 + \hat{\sigma}$  とが接するようにする (図 6 参照).  $\xi \equiv \xi(m, c, \varepsilon, \hat{\sigma}, \sigma, \rho)$  と置くと簡単な計算から次の関係式が得られる.

$$(17) \quad \xi^2 = (\sigma - \hat{\sigma}) \left( \frac{1}{\varepsilon} + A \right),$$

$$(18) \quad \left[ \sigma \left\{ 1 - ((x \pm \xi)/\rho)^2 \right\} \right]_+ \leq \varepsilon x^2 + \hat{\sigma} \text{ on } \mathbf{R}^1,$$

一方, (10) から得られる Kersner の解 (7) のサポートは  $t = t^*$  の時に最も広がる. すなわち,

$$(19) \quad t^* \equiv t^*(m, c, \sigma, \rho) = \frac{1}{2m+4a} \left[ \left\{ \frac{aB}{D(m+2a)} \right\}^{\frac{m+1}{2m}} - A \right],$$

$$(20) \quad x_{\pm}^2(t^*) = \frac{(m+a)B}{m+2a} \left\{ \frac{aB}{D(m+2a)} \right\}^{\frac{1}{m}}.$$

以上のことから容易に次の定理が得られる.

**定理 1.** 次の 2 つの不等式が成り立つような正数  $\hat{\sigma}, \varepsilon, \sigma$  ( $> \hat{\sigma}$ ) と  $\rho$  が存在すると仮定する.

$$(21) \quad 0 < \hat{t}(m, c, \hat{\sigma}, \varepsilon) < t^*(m, c, \sigma, \rho),$$

$$(22) \quad \xi^2 < x_{\pm}^2(t^*(m, c, \sigma, \rho)).$$

更に初期値  $u^0(x)$  は

$$(23) \quad \left[ \sigma \left\{ 1 - ((x \pm \xi)/\rho)^2 \right\} \right]_+ \leq u^0(x) \leq \varepsilon x^2 + \hat{\sigma} \text{ on } \mathbf{R}^1$$

を満たすとする. この時,  $\text{supp } v(t', \cdot)$  が区間  $[-\xi, \xi]$  において少なくとも 2 つの相交わらない集合に分離しているような  $t'$  ( $\hat{t}(m, c, \hat{\sigma}, \varepsilon) < t' < t^*(m, c, \sigma, \rho)$ ) が存在し, 且つ  $t = t^*(m, c, \sigma, \rho)$  の時  $[-\xi, \xi] \subset \text{supp } v(t^*, \cdot)$ , すなわち  $[-\xi, \xi]$  においてサポートは融合している.

定理 1 の条件を満たすような  $\rho$  と  $\sigma$  の存在性について述べる.  $m = 1.5, c = 6, \hat{\sigma} = 10$  に対して  $\varepsilon = 0.01$  と取ると  $\hat{t} = 3.5600$  が数値計算によって得られる.  $\frac{\rho}{\sigma}$  を一定として, Galaktionov-Vazquez の解 (11) の初期関数が Kersner の解 (7) のそれより大となるようなパラメータ  $\rho$  と  $\sigma$  を求めると  $\rho = \sigma = 300$  と  $t^* = 27.1695 > 0$  が得られる. 即ちサポートは一旦分離しその後再び融合する. ところが,  $m$  と  $\hat{\sigma}$  はそのまま  $c = 36$  とすると  $\varepsilon = 0.05, \hat{t} = 0.5850, \rho = \sigma = 800, t^* = -0.90500 < 0$  となり矛盾が生じる. 試行錯誤の結果  $A \equiv \frac{\rho^2}{\sigma}$  は一定とすると  $\rho = 25, \sigma = 625$  と  $t^* = 6.5826 > \hat{t}$  が得られその矛盾は払拭される. 即ち,  $A \equiv \frac{\rho^2}{\sigma}$  を一定とする事によって以下の定理が得られる.

**定理 2.** 任意に与えた  $\hat{\sigma}(> 0)$  に対して, 不等式 (21) と (22) を成り立たせる正数  $\sigma \equiv \sigma(m, c, \hat{\sigma}, \varepsilon)$  が存在する.

**証明.** (21) の前半の不等式は  $\varepsilon \equiv \varepsilon(m, c, \hat{\sigma}) < \frac{D}{\hat{\sigma}}$  ( $G(m, c, \sigma, \varepsilon) < 0$ ) と取ることによって得られる.  $\sigma$  を次の不等式を満たす正数とする. この時, (21) の後半の不等式と (22) が満たされることを示そう.

$$(24) \quad \sigma > \max \left\{ \hat{\sigma}(1 + \varepsilon A), \left\{ \frac{m+1}{m} \left( A + \frac{1}{\varepsilon} \right) \right\}^m D(m+1)A^{1-m} - DA \right\}.$$

(19) から

$$(25) \quad t^* \equiv t^*(m, c, \sigma, \rho) = \frac{1}{2m+4a} \left[ \left\{ \frac{(\sigma + DA)}{D(m+1)} \right\}^{\frac{m+1}{2m}} A^{\frac{m-1}{2m}} - A \right]$$

$$\begin{aligned}
&> \frac{1}{2m+4a} \left[ \left\{ \frac{m+1}{m} \left( A + \frac{1}{\varepsilon} \right) \right\}^{\frac{m+1}{2}} A^{\frac{1-m}{2}} - A \right] \\
&= \frac{1}{2m+4a} \left[ \left( \frac{m+1}{m} \right)^{\frac{m+1}{2}} \left\{ A^{\frac{m+1}{2}} + \frac{m+1}{2\varepsilon} \left( A + \frac{\theta}{\varepsilon} \right)^{\frac{m-1}{2}} \right\} A^{\frac{1-m}{2}} - A \right] \\
&> \frac{1}{2m+4a} \left( \frac{m+1}{m} \right)^{\frac{m+1}{2}} \frac{m+1}{2\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon(2m+4a)} = \hat{T}(m, \varepsilon) > \hat{t}(m, c, \hat{\sigma}, \varepsilon),
\end{aligned}$$

ただし,  $\theta$  はある正定数である. (21) が成り立つ.

(20) と (24) から

$$\begin{aligned}
x_{\pm}^2(t^*) &= \frac{(m+a)(\sigma+DA)A^{\frac{m-1}{m+1}}}{m+2a} \left\{ \frac{a(\sigma+DA)}{D(m+2a)} \right\}^{\frac{1}{m}} A^{\frac{m-1}{m(m+1)}} \\
&> \frac{m\sigma}{m+1} \left\{ \frac{\sigma+DA}{D(m+1)} \right\}^{\frac{1}{m}} A^{\frac{m-1}{m}} \\
&> \left( A + \frac{1}{\varepsilon} \right) A^{\frac{1-m}{m}} \sigma A^{\frac{m-1}{m}} = \left( A + \frac{1}{\varepsilon} \right) \sigma > \xi^2.
\end{aligned}$$

よって (22) も成り立つ (証明終).

#### 4. 反復するサポートの分離・融合

任意に与えられた整数  $N (\geq 1)$  に対してサポートの分離・融合を少なくとも  $N$  回引き起こすような初期関数について考察しよう. そのためには任意に与えられた正数  $\sigma_0$  から正数の列  $\varepsilon_{k-1}$  と  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) を定理 1 と 2 の結果を用いて以下のように構成する.

$\varepsilon$ . と  $\sigma$ . の構成法.

$\sigma_0 (> 0)$  を任意に与え固定し, 手続き I) と II) を  $k = 1, 2, \dots, N$  まで繰り返す.

I)  $\varepsilon_{k-1} \equiv \varepsilon(m, c, \hat{\sigma}_{k-1}) < \frac{D}{\hat{\sigma}}$  と取る.

II) 不等式

$$\begin{aligned}
\hat{t}(m, c, \sigma_{k-1}, \varepsilon_{k-1}) &< t^*(m, c, \sigma_k, \rho_k), \\
\xi^2(m, c, \varepsilon_{k-1}, \sigma_{k-1}, \sigma_k, \rho_k) &< x_{\pm}^2(t^*(m, c, \sigma_k, \rho_k))
\end{aligned}$$

を満たす正数  $\sigma_k (> \sigma_{k-1})$  を取る. ただし,  $\rho_k = \sqrt{A\sigma_k}$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) で  $A$  は一定とする.

**定理 3.**  $\varepsilon$ . と  $\sigma$ . の構成法によって得られた正数  $\sigma_0$  と列  $\varepsilon_{k-1}$  と  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) に対して, 初期関数  $u^0(x)$  は次の不等式を満たすとする.

$$(26) \left[ \sigma_k \left\{ 1 - ((x \pm \xi_k)/\rho_k)^2 \right\} \right]_+ \leq u^0(x) \leq \varepsilon_{k-1} x^2 + \sigma_{k-1} \text{ on } \mathbf{R}^1 \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

ただし,  $\xi_k = \xi(m, c, \varepsilon_{k-1}, \sigma_{k-1}, \sigma_k, \rho_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) である. この時,  $\text{supp } v(t'_k, \cdot)$  が区間  $[-\xi_1, \xi_1]$  において少なくとも 2 つの相交わらない集合に分離しているような  $t'_k$  ( $\hat{t}(m, c, \sigma_{k-1}, \varepsilon_{k-1}) < t'_k < t^*(m, c, \sigma_k, \rho_k)$ ) ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) が存在する. 更に  $t =$

$t_k^* \equiv t^*(m, c, \sigma_k, \rho_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) の時 サポートは  $[-\xi_1, \xi_1]$  上で融合する, すなわち  $[-\xi_1, \xi_1] \subset \text{supp } v(t_k^*, \cdot)$  が成り立つ.

証明は定理 1 と 2 から容易に示せるので省略する.

例.

定理 3 の不等式 (26) において  $u^0(x)$  を上からと下から評価する例を  $N = 3$  の場合について次の表に示す. ただし,  $\hat{t}_k = \hat{t}(m, c, \sigma_k, \varepsilon_k)$  ( $k = 0, 1, 2$ ),  $\xi_k = \xi(m, c, \varepsilon_{k-1}, \sigma_{k-1}, \sigma_k, \rho_k)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) である.

表 1: Numerical examples related to Theorem 3.

| $m = 1.0625, \quad c = 36.0, \quad A = 1$ |                 |                      |                 |                  |                           |                       |  |
|-------------------------------------------|-----------------|----------------------|-----------------|------------------|---------------------------|-----------------------|--|
| $\sigma_0 = 0.0625$                       |                 |                      |                 |                  | $\varepsilon_0 = 0.49826$ | $\hat{t}_0 = 0.02862$ |  |
| $\sigma_1 = 0.4187$                       | $t_1^* = 0.080$ | $x_+(t_1^*) = 1.203$ | $\xi_1 = 1.035$ | $\rho_1 = 0.647$ | $\varepsilon_1 = 0.07437$ | $\hat{t}_1 = 0.19172$ |  |
| $\sigma_2 = 2.2185$                       | $t_2^* = 0.436$ | $x_+(t_2^*) = 5.738$ | $\xi_2 = 5.099$ | $\rho_2 = 1.489$ | $\varepsilon_2 = 0.01400$ | $\hat{t}_2 = 1.01536$ |  |
| $\sigma_3 = 12.310$                       | $t_3^* = 2.333$ | $x_+(t_3^*) = 29.94$ | $\xi_3 = 27.04$ | $\rho_3 = 3.509$ |                           |                       |  |

Table 1 にある  $m = 1.0625, c = 36.0, A = 1$  の場合を簡単に説明しよう.  $\sigma_0 = 0.0625$  と与えた時, 構成法 I) から  $\varepsilon_0 = 0.49826$  となる. この時 Galaktionov-Vazquez の解の零点発生時刻は  $\hat{t}_0 = 0.02862$  であり, この時刻において, 解  $v$  のサポートは分離している. 更に融合するために用いる Kersner の解の初期関数の  $\sigma$  は不等式 (24) から  $\sigma_1 = 0.4187$  で与えられ, サポートの幅は  $t_1^* = 0.080 > \hat{t}_0$  で最大に広がる. すなわち  $x > 0$  側にある Kersner の解のサポートは区間  $[\xi_1 - x_+(0.080), \xi_1 + x_+(0.080)] = [-0.168, 2.238]$  となり,  $x = 0$  での対称性から  $\text{supp } v(0.080, \cdot) \supset [-\xi_1 - x_+(0.080), \xi_1 + x_+(0.080)]$  が得られる. したがって, 時刻 0.080 において, 少なくともサポートは区間  $[-\xi_1, \xi_1]$  で融合している.  $\sigma_2, \sigma_3$  についても同様である. このことはサポートが区間  $[-\xi_1, \xi_1]$  上で少なくとも 3 回分離・融合を繰り返すことを意味する. この場合の初期関数のグラフを図 7 に, 時間発展の様子を図 8 にそれぞれ示す.

同様に  $m = 1.50, 1.95, c = 36, A = 1$  の時にも  $\sigma_0 = 0.0625$  として  $\varepsilon_{k-1}$  と  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) を数値的に決定することが出来る.  $m = 1.0625, 1.50, 1.95$  に対して  $p = 0.9375, 0.50, 0.05$  と変化するにつれて, 吸収効果が拡散に比べて強くなりサポートを分離後融合させるための各  $m$  に応じた  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) の値がそれぞれ大きくなること が得られた.

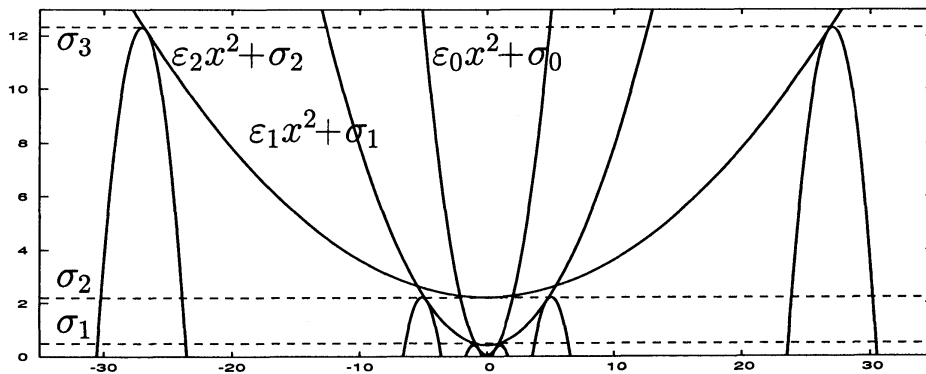
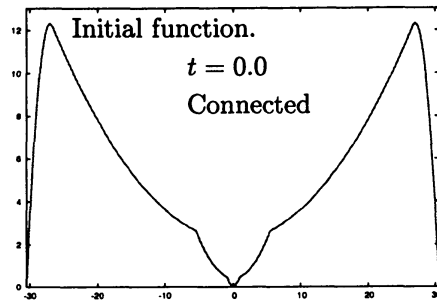
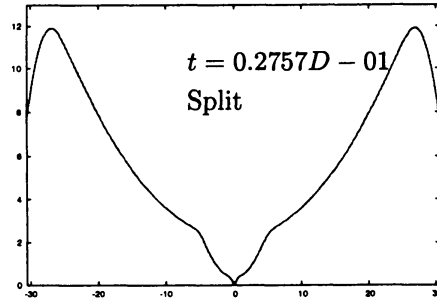
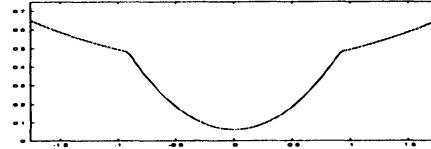


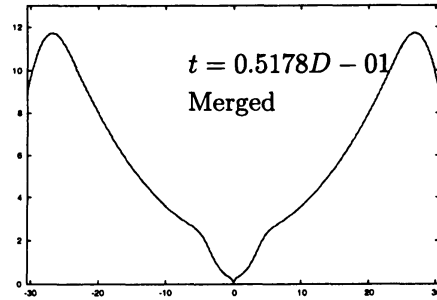
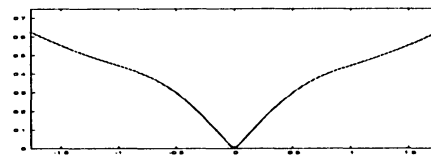
図 7: The initial functions of Galaktionov-Vazquez's solution and Kersner's solution, where  $m = 1.0625$  and  $c = 36$ .



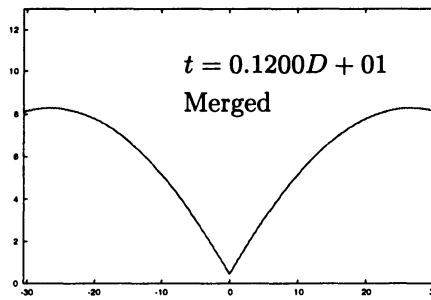
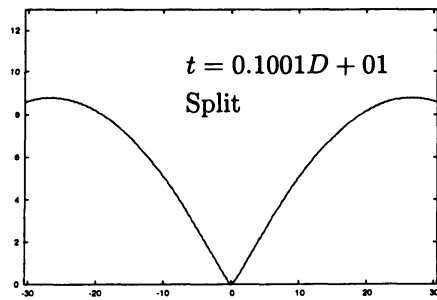
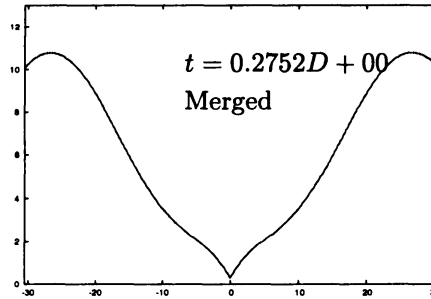
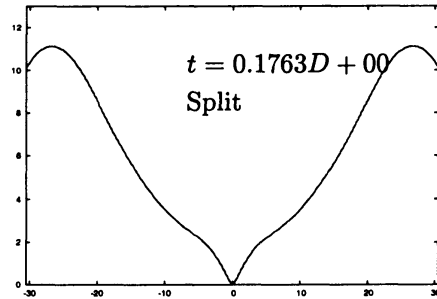
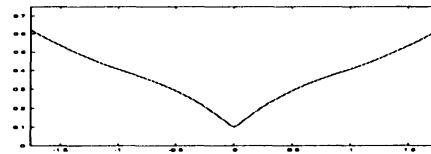
A close up of the left figure



A close up of the left figure



A close up of the left figure



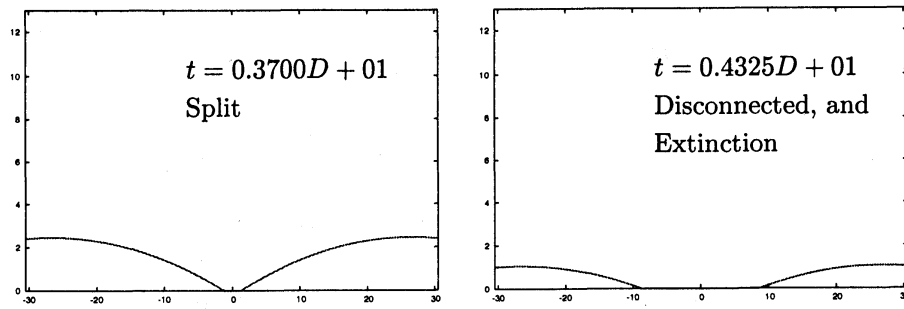


図 8: Numerical support splitting and merging phenomena for (3), where  $m = 1.0625$  and  $c = 36$ .

## 5. 初期境界値問題におけるサポート分離・融合

この節では次の (3) に対する初期境界値問題での数値サポートを紹介する.

$$(27) \quad u(0, x) = u^0(x), \quad x \in (-1.5, 1.5),$$

$$(28) \quad u(t, \pm 1.5) = \varphi(t), \quad t > 0.$$

数値計算には初期値問題の時に使用した差分法 ([15]) を境界条件のところで修正したものを用いている. したがって, 厳密な意味での差分解の収束性は証明されていない.  $m = 1.5$ ,  $c = 6$  とし, 以下の 3 つの場合を考察し数値例を報告する.

I)  $u^0(x) = 1.5$ ,  $\varphi(t) = 1.5$ ;

II)  $u^0(x) = 2.0$ ,  $\varphi(t) = 1.5 + 0.5 \cos(2\pi t)$ ;

III)  $u^0(x) = 2.0$ ,  $\varphi(t) = 1.5 + 0.5 \cos(12\pi t)$ .

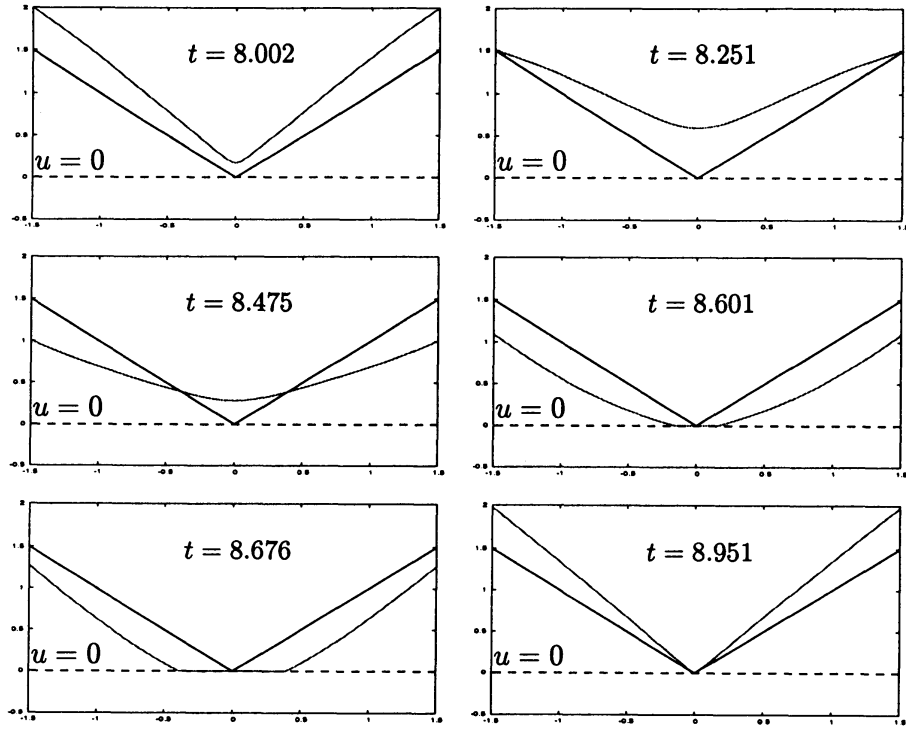
場合 I) では, 数値解が  $t \rightarrow \infty$  の時, 定常解  $\bar{u}(x) = |x| (|x| \leq 1.5)$  に収束していくのが観察される. この定常解は (3) の右辺において  $\frac{m}{m-1}(u_x)^2 - (m-1)c = 0$  とすることによって得られる.

$u^0(x) < 1.5 - \delta$  且つ  $\varphi(t) < 1.5 - \delta$  ( $0 < \delta \ll 1$ ) の時は, 比較定理によってサポート分離が生じる.

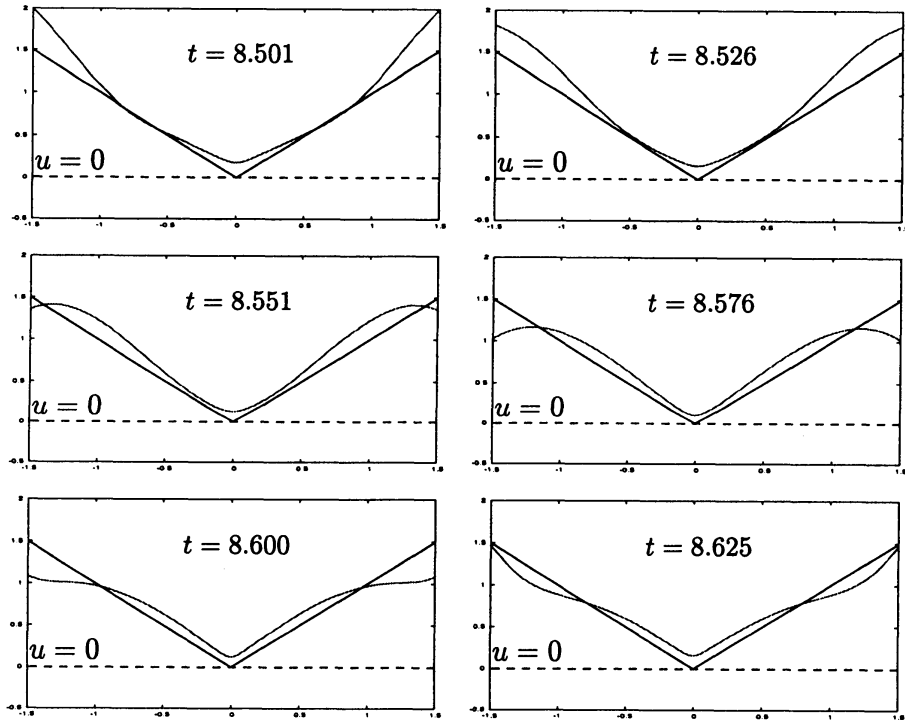
$u^0(x) \geq 1.5$  且つ  $\varphi(t) \geq 1.5$  の時は, サポートは分離しない.

$\varphi(t)$  を 1.5 を挟んで上下に振動させたらサポート分離・融合はどの様に現れるかを観察したのが場合 II) と III) であり, 図 9, 10 がその挙動を示している. 直線分は定常解である.

場合 II) では, 数値サポートの分離・融合の繰り返しが観察された (図 9). 境界条件の  $\varphi(t)$  は周期 1.0 でその最大値と最小値はそれぞれ 2.0 と 1.0 である. 一方, 場合 III) ではその周期は  $\frac{1}{6}$  であり II) の場合よりも短い. この場合 サポートの分離現象は観察されない (図 10). 場合 II) では,  $\varphi(t)$  の周期は III) の場合のそれに比べて十分長いと考えられる. その結果,  $\varphi(t)$  が 1.5 未満を保っている間にサポートが分離し, 逆の場合にサポートが融合するものと考えられる. 言い換えると, 場合 III) では, サポートの分離を実現するには  $\varphi(t)$  の周期が短すぎると考えられる.



⊠ 9: Numerically repeated support splitting and merging phenomena in Case (II), where  $m = 1.5$  and  $c = 6$ .



⊠ 10: Numerical support no-splitting phenomena in Case (III), where  $m = 1.5$  and  $c = 6$ .

場合 II) と III) では  $\varphi(t)$  がサポート分離を起こす境界値 1.5 を対称にして 2.0 と 1.0 の間を振動していたが、周期を短くするとサポート分離現象は生じなくなった。ではこの対称性を崩して周期を短くした次の場合はどうであろうか？

$$\text{IV) } u^0(x) = 1.75, \varphi(t) = 1.375 + 0.375 \cos(32\pi t).$$

初期サポートは分離していない状態から出発しているにもかかわらず、その後サポートは  $x = 0$  付近で分離したままで融合しないという数値計算結果が得られた。以上の計算結果からサポート分離は  $\varphi(t)$  の周期と振幅の幅に依存していると考えられる。この現象に対する数学的アプローチは現時点では著者には分からない。

## 6. 差分法

本研究に用いた数値計算法は差分法であり、それは (1)-(2) を直接近似するのではなく  $u = v^{m-1}$  として書き直した (3)-(4) を近似するものである。初期値問題に対してはその数値解及び数値界面の収束性は保証されている ([15])。しかし、初期境界値問題に対しては数値解の収束性はまだ証明されていない。原因は境界条件での差分化において数値解  $u_h^n (n = 0, 1, 2, \dots)$  がその収束性を保証するコンパクト定理の条件を満たすように十分構成されていないからである。その条件は次の不等式が成り立つことである。

$$(29) \quad 0 \leq u_h^n(x) \leq C_0 \quad \text{on } \mathbf{R}^1,$$

$$(30) \quad \|(u_h^n)_x\|_\infty \leq C_1,$$

$$(31) \quad TV((u_h^n)_x) \leq C_2,$$

$$(32) \quad \|(u_h^{n+1} - u_h^n)/k_{n+1}\|_{L^1(\mathbf{R}^1)} \leq C_3,$$

ただし、 $k_{n+1}$  は時間ステップ幅、 $h$  は空間メッシュ幅、 $C_i (i = 0, 1, 2, 3)$  は定数をそれぞれ表す。今後のこの解決の第一段階としては初期関数を次のように制限した最も簡単な場合を考察することであり、その場合にはこれらの不等式が満足される可能性は十分にある。

$$(33) \quad u(t, \pm 1.5) = \text{const.} \quad \text{且つ} \quad u_{xx}^0(x) \geq 0.$$

## 7. まとめ

初期値問題において条件  $m+p=2$  ( $m > 1, p > 0$ ) のもとではあるが、任意の  $c (> 0)$  に対して、サポート分離後の融合現象、および分離・融合の反復現象を引き起こす初期関数の形状を導出することができた。この条件下ではこのような現象が  $c (> 0)$  の大きさには依存しないことが得られた。更に特殊解を使った本研究の方法は空間 2 次元以上にも容易に拡張できる。一方、初期境界値問題においては、差分解の収束性を確立することが重要である。

本研究で扱っているパラメータには  $m+p=2$  ( $m > 1, p > 0$ ) という制限がある。この制限を取り除く事も今後の課題である。

謝辞. 本研究は日本学術振興会科学研究費補助金 (挑戦的萌芽研究) 課題番号:20654013) の援助のもとで行われました。

## 参考文献

- [1] D. G. Aronson, The porous medium equation, *Nonlinear diffusion problems*, (Montecatini Terme, 1985), 1-46, Lecture Notes in Math., 1224, Springer, Berlin, 1986.

- [2] M. Bertsch, A class of degenerate diffusion equations with a singular nonlinear term, *Nonlinear Anal.*, **7** (1983), 117–127.
- [3] X.-Y. Chen, H. Matano and M. Mimura, Finite-point extinction and continuity of interfaces in a nonlinear diffusion equation with strong absorption, *J. reine angew. Math.*, **459**(1995), 1–36.
- [4] V. A. Galaktionov and J. L. Vazquez, Extinction for a quasilinear heat equation with absorption I. Technique of intersection comparison, *Commun. in Partial Differential Equation.*, **19**(1994), 1075–1106.
- [5] V. A. Galaktionov and J. L. Vazquez, Extinction for a quasilinear heat equation with absorption II. A dynamical systems approach, *Commun. in Partial Differential Equation.*, **19**(1994), 1107–1137.
- [6] J. L. Gravelleau and P. Jamet, A finite difference approach to some degenerate nonlinear parabolic equations, *SIAM J. Appl. Math.*, **20** (1971), 199–223.
- [7] M. A. Herrero and J. L. Vazquez, The one-dimensional nonlinear heat equation with absorption: regularity of solutions and interfaces, *SIAM J. Math. Anal.*, **18** (1987), 149–167.
- [8] A.S. Kalashnikov, The propagation of disturbances in problems of non-linear heat conduction with absorption, *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, **14** (1974), 891–905.
- [9] A.S. Kalashnikov, Some problems of the qualitative theory of non-linear degenerate second-order parabolic equations, *Russian Math. Surveys*, **42** (1987), 169–222.
- [10] R. Kersner, The behavior of temperature fronts in media with nonlinear thermal conductivity under absorption, *Vestnik. Mosk. Univ. Mat.*, **33** (1978), 44–51.
- [11] R. Kersner, Degenerate parabolic equations with general nonlinearities, *Nonlinear Anal.*, **4** (1980), 1043–1062.
- [12] R. Kersner, Nonlinear heat conduction with absorption: space localization and extinction in finite time, *SIAM J. Appl. Math.*, **43** (1983), 1274–1285.
- [13] B. F. Knerr, The behavior of the support of solutions of the equation of nonlinear heat conduction with absorption in one dimension, *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, **249** (1979), 409–424.
- [14] L. K. Martinson, Propagation of a thermal wave in a nonlinear absorbing medium, *Prikl. Mekh. i Tekhn. Fiz.*, **4** (1979), 36–39.
- [15] T. Nakaki and K. Tomoeda, A finite difference scheme for some nonlinear diffusion equations in absorbing medium: support splitting phenomena, *SIAM J. Numer. Anal.*, **40**(2002), 945–964.
- [16] O.A. Oleinik, A.S. Kalashnikov and Y.-L. Chzou, The Cauchy problem and boundary value problems for equations of the type of nonstationary filtration, *Izv. Acad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **22** (1958), 667–704.
- [17] P. Rosenau and S. Kamin, Thermal waves in an absorbing and convecting medium, *Phys. D* **8**(1983), 273–283.
- [18] 友枝謙二, 中木達幸, ある非線形拡散方程式におけるサポート分離現象に関する数値的, 数学的考察, 日本応用数理学会論文誌, **17**(2007), 291–300.
- [19] 友枝謙二, 中木達幸, ある拡散現象における解のサポートの反復した分離・融合について, 日本応用数理学会論文誌, **19**(2009), 25–37.