

合同 zeta 函数に関する Artin-Tate 公式について

諏訪紀幸 中央大学理工学部

研究集会では (Some remarks on the Artin-Tate formula for diagonal hypersurfaces) と題して講演したが, 実際にはより一般の代数多様体に対する Artin-Tate 公式について解説した. 本稿では第 3 節で Artin-Tate 公式の導出の粗筋を, 特に de Rham-Witt complex に関する結果がどこに利いているかを主眼に説明する. 第 1 節では合同 zeta 函数の理論の中での Artin-Tate 公式の位置について, 第 2 節では Artin-Tate 公式を記述し証明するための道具立てについて手短かに復習する. 第 4 節で diagonal hypersurface に関する幾つかの結果を述べる. 第 4 節の詳細については [12] を参照されたい.

記号.

scheme の上の層はすべて étale 位相で考える. したがって, 層の cohomology はすべて étale cohomology を意味する.

M を可換群とする. M の torsion subgroup を M_{tors} で, 剰余群 M/M_{tors} を M/tors で表わす.

v を $v(q) = 1$ によって正規化された $\bar{\mathbb{Q}}_p$ の p 進加法付値とする. また, $|\cdot|_l$ を $|\cdot|_l = \frac{1}{l}$ によって正規化された $\bar{\mathbb{Q}}_l$ の l 進乗法付値とする.

1. 歴史

1.1. (Weil 予想) X を有限体 $k = \mathbb{F}_q$ の上の代数多様体とする. X の合同 zeta 函数 $Z(X/k, t)$ は

$$Z(X/k, t) = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\#X(\mathbb{F}_{q^n})}{n} t^n \right]$$

によって定義された. 変数変換 $t = q^{-s}$ によって $Z(X/k, t)$ から Hasse-Weil の zeta 函数

$$\zeta(X, s) = \prod_{x \in X_0} \frac{1}{1 - \#k(x)^{-s}} \quad (X_0 \text{ は } X \text{ の閉点全体})$$

を得る.

Riemann-Weil 仮説は $\zeta(X, s)$ の極と零点の分布に関する定理であるが, 振り返ってみると, X が非特異射影的で $\dim X = N$ であるとき,

- (1) $Z(X/k, t)$ は t の有理函数;
- (2) $Z(X/k, t)$ は

$$Z(X/k, t) = \frac{P_1(t) \cdots P_{2N-1}(t)}{P_0(t) \cdots P_{2N}(t)}, \quad P_i(t) = P_i(X; t) = \prod_j (1 - \alpha_{ij}t), \quad |\alpha_{ij}| = q^{\frac{i}{2}}$$

と因数分解される. さらに, $P_i(X; t)$ は t の整係数多項式,

が Weil の研究を端緒として Grothendieck, Deligne によって示された。周知のように, $P_i(X; t)$ は線型代数の言葉で記述される。実際, Φ を X の k の上の相対 Frobenius 写像, $H^*(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l)$ を l 進 étale cohomology 群とすれば,

$$P_i(X; t) = \det[1 - \Phi^* t; H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l)]$$

が成立する。また, $H^*(X/W)_K$ を crystalline cohomology 群とすれば,

$$P_i(X; t) = \det[1 - \Phi^* t; H^i(X/W)_K]$$

が成立する。

1.2. (Tate 予想) ρ_r を $\zeta(X, s)$ の $s = r$ における極の位数とすれば, ρ_r は q の $P_{2r}(X; t) = 0$ の逆根としての重複度に等しい。Tate [13] は次のように ρ_r を algebraic cycle と関連付けて議論した。

$Z^r(X)$, $Z^r(X_{\bar{k}})$ をそれぞれ X あるいは $X_{\bar{k}}$ の余次元 r の algebraic cycle の群とする。このとき, cycle 写像とよばれる準同型 $\gamma: Z^r(X_{\bar{k}}) \rightarrow H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l(r))$ が定義される。明らかに γ の $Z^r(X)$ による像は $H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l(r))^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ に含まれる。Tate 予想は逆が成立することを主張する: Φ^* の $H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l(r))$ の上への作用は半単純で, ρ_r は $Z^r(X)$ の γ よる像によって生成される $H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l)$ の部分空間の次元に等しい。

今の所, Tate 予想は主立った所では

- (1) X が Abel 多様体, $r = 1$ (Tate [14]);
 - (2) X が K3 曲面で $\widehat{\text{Br}}_{X/k}$ が finite height, $r = 1$ (Nygaard, Ogus);
 - (3) X が次元と次数に関する幾つかの条件をみたす Fermat 多様体で $r = N/2$ (塩田, 桂, 青木 [8, 9, 10, 1])
- の場合に示されている。

1.3. (Artin-Tate 公式) 次に, $\zeta(X, s)$ の $s = r$ における特殊値が問題になるが, 最初, $N = 2$, $r = 1$ の場合に Artin と Tate によって特殊値の公式が予想され, Tate [15] によって p と素な部分に対して l 進 étale cohomology を用いて証明された。 p 部分に対しては l 進 étale cohomology の代わりに p 進 flat cohomology を用いることによって Milne [6] によって証明された。一般次元の場合は, Milne [7] が Illusie によって定義された logarithmic Hodge-Witt cohomology を用いて Artin-Tate 公式を一般化した。第 3 節で Milne の結果を改良した形で示す。

2. 道具と準備

k を体, X を k の上の非特異射影多様体とする。

2.1. (étale cohomology) l を k の標数と異なる素数とする。

$$H^i(X, \mathbb{Z}_l(r)) = \varprojlim_n H^i(X, \mu_{l^n}^{\otimes r})$$

と定義した。

k が代数的閉体なら, $H^i(X, \mathbb{Z}_l(r))$ は有限型 $\mathbb{Z}_l$ 加群.

$$H^i(X, \mathbb{Q}_l(r)) = H^i(X, \mathbb{Z}_l(r)) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$$

と定義した. また, 殆ど全ての素数 l に対して $H^i(X, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}} = 0$ となる (Gabber の定理).

2.2. (de Rham cohomology) 正則微分形式の複体 $\Omega_{X/k}^*$ の hypercohomology として de Rham cohomology $H_{DR}^*(X/k)$ を定義した. 定義から spectral sequence

$$E_1^{ij} = H^j(X, \Omega_X^i) \Rightarrow H_{DR}^{i+j}(X/k)$$

(Hodge spectral sequence) が存在する. $\dim_k H^j(X, \Omega_{X/k}^i)$ を X の (i, j) Hodge number とよび, $h^{ij}(X)$ で表わす.

以下, k は標数 $p > 0$ の完全体であると仮定する.

2.3. (crystalline cohomology と de Rahm-Witt complex [4, 5]) $H^*(X/W)$ によって X の crystalline cohomology を表わす. $H^*(X/W)/\text{tors}$ は F -crystal の構造をもつ. また, pro-sheaf の複体

$$W\Omega_X^* : W\mathcal{O}_X \xrightarrow{d} W\Omega_X^1 \xrightarrow{d} W\Omega_X^2 \xrightarrow{d} \dots$$

(de Rham-Witt complex) が存在して $H^*(X/W)$ は $W\Omega_X^*$ の hepercohomology に同型となる (Deligne-Illusie). $W\mathcal{O}_X$ の上の Frobenius 写像 F , Verschiebung 写像 V は $W\Omega_X^*$ の上に延長され, $FV = VF = p$, $FdV = d$ が成立する. spectral sequence

$$E_1^{ij} = H^j(X, W\Omega_X^i) \Rightarrow H^*(X/W).$$

(slope spectral sequence) は E_1 で退化する. 特に, 直和分解

$$H^n(X/W)_K = \bigoplus_{i+j=n} H^j(X, W\Omega_X^i)_K$$

を得る. さらに,

$$H^j(X, W\Omega_X^i)_K = H^{i+j}(X/W)_K^{[i, i+1]}$$

次に,

$$\begin{aligned} Z^i &= \text{Ker}[d : H^j(X, W\Omega_X^i) \rightarrow H^j(X, W\Omega_X^{i+1})], \\ B^i &= \text{Im}[d : H^j(X, W\Omega_X^{i-1}) \rightarrow H^j(X, W\Omega_X^i)] \end{aligned}$$

とおく. また,

$$\begin{aligned} V^{-\infty} Z^i &= \bigcap_{n=0}^{\infty} \text{Ker}[dV^n : H^j(X, W\Omega_X^i) \rightarrow H^j(X, W\Omega_X^{i+1})], \\ F^{\infty} B^i &= \bigcup_{n=0}^{\infty} \text{Im}[F^n d : H^j(X, W\Omega_X^{i-1}) \rightarrow H^j(X, W\Omega_X^i)] \end{aligned}$$

とおく. このとき, $V^{-\infty}Z^i$, $F^\infty B^i$ は F , V で安定な $H^j(X, W\Omega_X^i)$ の部分 W 加群で,

$$B^i \subset F^\infty B^i \subset V^{-\infty}Z^i \subset Z^i$$

さらに, $V^{-\infty}Z^i/F^\infty B^i$ は有限型 W 加群. また, 有限次元の unipotent formal group Ψ^{ji} が存在して $H^j(X, W\Omega_X^i)/V^{-\infty}Z^i$ は Ψ^{ji} の Cartier 加群に同型となる. $V^{-\infty}Z^i/F^\infty B^i$ を $\text{Heart}^i H^j(X, W\Omega_X^*)$ で, $d : H^j(X, W\Omega_X^i)/V^{-\infty}Z^i \rightarrow F^\infty B^{i+1}$ を $\text{Domino}^i H^j(X, W\Omega_X^*)$ で表わす.

$$T^{ij}(X) = \dim \text{Domino}^i H^j(X, W\Omega_X^*) = \dim \Psi^{ji}$$

と定義した (Illusie-Raynaud). また,

$$\begin{aligned} h_W^{ij}(X) = & \dim_k H^j(X, W\Omega_X^i)/(\text{tors} + V) + \dim_k H^{j+1}(X, W\Omega_X^{i-1})/(\text{tors} + F) \\ & + T^{i,j}(X) - 2T^{i-1,j+1}(X) + T^{i-2,j+2}(X) \end{aligned}$$

と定義した (Ekedahl). $h_W^{ij}(X)$ を X の (i, j) Hodge-Witt number とよぶ.

補註 2.4. (1) $H^*(X/W)$ が torsion-free で, (2) Hodge spectral sequence が E_1 で退化するとき, X は Mazur-Ogus 型であるという. X が Mazur-Ogus 型なら, 各 (i, j) に対して $h_W^{ij} = h^{ij}$ が成立する (Ekedahl の定理). 例えば, Abel 多様体, 射影空間の中の smooth complete intersection は Mazur-Ogus 型.

2.5. (logarithmic Hodge-Witt cohomology [5], [3]) 対数微分形式によって生成される $W_n\Omega_X^i$ の部分層を $W_n\Omega_{X,\log}^i$ で表わす.

$$H^i(X, \mathbb{Z}_p(r)) = \varprojlim_n H^{i-r}(X, W_n\Omega_{X,\log}^r)$$

と表わすことにする. k の上の pro-algebraic group $\underline{H}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))$ が存在して,

$$H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_p(r)) = \underline{H}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})$$

となる. $\underline{H}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))$ の unipotent part を $\underline{U}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))$ で, étale part を $\underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))$ で表わせば, pro-algebraic group の完全列

$$0 \rightarrow \underline{U}^i(X, \mathbb{Z}_p(r)) \rightarrow \underline{H}^i(X, \mathbb{Z}_p(r)) \rightarrow \underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r)) \rightarrow 0$$

を得る.

$$\dim \underline{U}^i(X, \mathbb{Z}_p(r)) = \dim \text{Domino}^{r-1} H^{i-r}(X, W\Omega_X^*)$$

が成立する. また, k が代数的閉体なら

$$\underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(k) = \text{Ker}[F - 1 : \text{Heart}^i H^j(X, W\Omega_X^*) \rightarrow \text{Heart}^i H^j(X, W\Omega_X^*)]$$

したがって, $\underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(k)$ は有限型 $\mathbb{Z}_p$ 加群.

以下, $k = \mathbb{F}_q$ を標数 p の有限体, $\Gamma = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ とし, $\varphi \in \Gamma$ を $k = \mathbb{F}_q$ の上の Frobenius 写像とする. X を k の上の非特異射影多様体とする.

Γ 加群 M に対して $M^\Gamma = \text{Ker}[1 - \varphi : M \rightarrow M]$, $M_\Gamma = \text{Coker}[1 - \varphi : M \rightarrow M]$ と記す.

補題 2.6. $P_i(X; t) = \prod_{\alpha} (1 - \alpha t)$ とおく. このとき,

$$\det[1 - \varphi t; H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l(r))] = \begin{cases} \prod_{\alpha} \left(1 - \frac{q^r}{\alpha}\right) & (l \neq p) \\ \prod_{v(\alpha)=r} \left(1 - \frac{q^r}{\alpha}\right) & (l = p) \end{cases}$$

補題 2.7. $i \neq 2r$ と仮定する. このとき, $H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))^\Gamma$, $H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_\Gamma$ は有限群. 特に, $H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))^\Gamma$ は $H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}^\Gamma$ に同型. さらに,

$$\begin{aligned} |H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_p(r))_{\text{tors}}^\Gamma| &= q^{T^{r-1, i-r}(X)} |\underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})_{\text{tors}}^\Gamma|, \\ |H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_p(r))_\Gamma| &= |\underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})_\Gamma| \end{aligned}$$

が成立する.

証. Riemann-Weil 仮説から, $1 - \varphi$ は $H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))/\text{tors}$ の上で単射. したがって, 完全列

$$0 \rightarrow H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}} \rightarrow H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r)) \rightarrow H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))/\text{tors} \rightarrow 0$$

に $1 - \varphi$ をほどこすことによって同型

$$H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))^\Gamma \xrightarrow{\sim} H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}^\Gamma$$

および完全列

$$0 \rightarrow H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}, \Gamma} \rightarrow H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_\Gamma \rightarrow (H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))/\text{tors})_\Gamma \rightarrow 0$$

を得る. また, $(H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))/\text{tors})_\Gamma$ は有限群. $l \neq p$ の場合, これで結論を得る.

$l = p$ の場合. $H^1(\Gamma, \underline{U}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})) = 0$ なので, pro-algebraic group の完全列

$$0 \rightarrow \underline{U}^i(X, \mathbb{Z}_p(r)) \rightarrow \underline{H}^i(X, \mathbb{Z}_p(r)) \rightarrow \underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r)) \rightarrow 0$$

から, 完全列

$$0 \rightarrow \underline{U}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(k) \rightarrow H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_p(r))^\Gamma \rightarrow \underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})^\Gamma \rightarrow 0$$

および同型

$$H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_p(r))_\Gamma \xrightarrow{\sim} \underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})_\Gamma$$

を得る. $\dim \underline{U}^i(X, \mathbb{Z}_p(r)) = T^{r-1, i-r}$ なので,

$$|\underline{U}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(k)| = q^{T^{r-1, i-r}}$$

が成立する.

さらに, $\underline{U}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})$ が torsion group なので, 完全列

$$0 \rightarrow \underline{U}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(k) \rightarrow H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_p(r))_{\text{tors}}^{\Gamma} \rightarrow \underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})_{\text{tors}}^{\Gamma} \rightarrow 0$$

を得る. これから上記と併せて結論を得る.

補題 2.8. $i \neq 2r$, $2r+1$ と仮定する. $H^i(X, \mathbb{Z}_l(r))$ は有限群で,

$$|H^i(X, \mathbb{Z}_l(r))| = |H^{i-1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\Gamma}| |H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}^{\Gamma}|$$

証. Hochschild-Serre の spectral sequence

$$E_2^{ij} = H^i(\Gamma, H^j(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))) \Rightarrow H^{i+j}(X, \mathbb{Z}_l(r))$$

から得られる完全列

$$0 \rightarrow H^{j-1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\Gamma} \rightarrow H^j(X, \mathbb{Z}_l(r)) \rightarrow H^j(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}^{\Gamma} \rightarrow 0$$

に注意すればよい.

補題 2.9. $H^{2r}(X, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}$, $H^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}$ は有限群. 特に,

$$|H^{2r}(X, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}| = |H^{2r-1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\Gamma}| |H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}^{\Gamma}|$$

さらに,

$$|H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_p(r))_{\text{tors}}^{\Gamma}| = q^{T^{r-1, i-r}(X)} |\underline{D}^{2r}(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})_{\text{tors}}^{\Gamma}|$$

証. Hochschild-Serre の spectral sequence から得られる完全列

$$0 \rightarrow H^{j-1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\Gamma} \rightarrow H^j(X, \mathbb{Z}_l(r)) \rightarrow H^j(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}^{\Gamma} \rightarrow 0$$

を考えて, $H^{2r}(X, \mathbb{Z}_l(r))$, $H^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_l(r))$ が有限型 $\mathbb{Z}_p$ 加群であることが従う. さらに, $H^{2r-1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\Gamma}$ が有限群なので,

$$0 \rightarrow H^{2r-1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\Gamma} \rightarrow H^{2r}(X, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}} \rightarrow H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}^{\Gamma} \rightarrow 0$$

は完全列.

3. Artin-Tate 公式

$k = \mathbb{F}_q$ を標数 p の有限体, $\Gamma = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ とし, X を k の上の次元 N の非特異射影多様体とする

補題 3.1. $P_i(X; t) = \prod_{\alpha} (1 - \alpha t)$ とおく. このとき,

$$\sum_{v(\alpha) < r} (r - v(\alpha)) = \sum_{j=0}^{r-1} (r - j) h_W^{j, i-j}(X) - T^{r-1, i-r+1}(X).$$

証. F -isocrystal $H^i(X/W)_K$ の slope は $\{v(\alpha)\}_\alpha$ で与えられる (Manin の定理). ここで, $H^{i-j}(X, W\Omega_X^j)_K = H^i(X/W)_K^{[j, j+1]}$ なので,

$$\begin{aligned}\dim_k H^{i-j}(X, W\Omega_X^j)/(\text{tors} + V) &= \sum_{j \leq v(\alpha) < j+1} (j+1 - v(\alpha)), \\ \dim_k H^{i-j}(X, W\Omega_X^j)/(\text{tors} + F) &= \sum_{j \leq v(\alpha) < j+1} (v(\alpha) - j)\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}& \sum_{j=0}^{r-1} (r-j) h_W^{j, i-j}(X) - T^{r-1, i-r+1}(X) \\ &= \sum_{j=0}^{r-1} \left\{ (r-j) \dim_k H^{i-j}(X, W\Omega_X^j)/(\text{tors} + V) + (r-j-1) \dim_k H^{i-j}(X, W\Omega_X^j)/(\text{tors} + F) \right\} \\ &= \sum_{j=0}^{r-1} \left\{ (r-j) \sum_{j \leq v(\alpha) < j+1} (j+1 - v(\alpha)) + (r-j-1) \sum_{j \leq v(\alpha) < j+1} (v(\alpha) - j) \right\} \\ &= \sum_{v(\alpha) < r} (r - v(\alpha)).\end{aligned}$$

定理 3.2. (Artin-Tate 公式 I) $i \neq 2r$ と仮定する. このとき,

$$|P_i(X; q^{-r})|_l^{-1} = \begin{cases} \frac{|H^{i+1}(X, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}|}{|H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}^F| |H^{i+1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}^F|} & (l \neq p) \\ q^{-\sum_{j=0}^{r-1} (r-j) h_W^{j, i-j}(X)} \frac{|H^{i+1}(X, \mathbb{Z}_p(r))_{\text{tors}}|}{|\underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})_{\text{tors}}^F| |\underline{D}^{i+1}(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})_{\text{tors}}^F|} & (l = p) \end{cases}$$

が成立する.

証. $l \neq p$ のとき,

$$|P_i(X; q^{-r})|_l^{-1} = \left| \prod_{\alpha} \left(1 - \frac{q^r}{\alpha}\right) \right|_l^{-1} = \left| \det[1 - \varphi; H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l(r))] \right|_l^{-1}$$

ここで,

$$\left| \det[1 - \varphi; H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l(r))] \right|_l^{-1} = |(H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))/\text{tors})_F|$$

さらに, $H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}$ が有限群なので,

$$\frac{1}{|(H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))/\text{tors})_F|} = \frac{|H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_F^F|}{|H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_F|}$$

したがって, 補題 2.7 と補題 2.8 あるいは補題 2.9 から結論を得る.

$l = p$ のとき,

$$\left| \prod_{v(\alpha)=r} \left(1 - \frac{q^r}{\alpha}\right) \right|_p^{-1} = \left| \det[1 - \varphi; H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_p(r))] \right|_p^{-1}$$

ここで,

$$\left| \det[1 - \varphi; H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_p(r))] \right|_p^{-1} = |(H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))/\text{tors})_l| = |(\underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})/\text{tors})_l|$$

さらに, $\underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})_{\text{tors}}$ が有限群なので,

$$\frac{1}{|(\underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})/\text{tors})_l|} = \frac{|\underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})_l^r|}{|\underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})_l|}$$

また, $v(\alpha) < r$ なら $v(1 - \frac{\alpha}{q^r}) = v(\alpha) - r$, $v(\alpha) > r$ なら $v(1 - \frac{\alpha}{q^r}) = 0$ なので,

$$\begin{aligned} |P_i(X; q^{-r})|_p^{-1} &= \left| \prod_{v(\alpha) < r} \left(1 - \frac{q^r}{\alpha}\right) \right|_p^{-1} \left| \prod_{v(\alpha)=r} \left(1 - \frac{q^r}{\alpha}\right) \right|_p^{-1} \left| \prod_{v(\alpha) > r} \left(1 - \frac{q^r}{\alpha}\right) \right|_p^{-1} \\ &= q^{-\sum_{v(\alpha) < r} (r - v(\alpha))} \left| \prod_{v(\alpha)=r} \left(1 - \frac{q^r}{\alpha}\right) \right|_p^{-1} \end{aligned}$$

したがって, 補題 2.7, 補題 2.8 あるいは補題 2.9 に補題 3.1 を併せて結論を得る.

3.3. $i = 2r$ の場合, Tate [15] の工夫に従って議論を進める.

$\epsilon_l^{2r} : H^{2r}(X, \mathbb{Z}_l(r)) \rightarrow H^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_l(r))$ を $1 \in \mathbb{Z}_l = H^1(k, \mathbb{Z}_l)$ との cup 積によって定義される写像とする. このとき, $f : H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))^{\Gamma} \rightarrow H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\Gamma}$ を合成

$$H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))^{\Gamma} \rightarrow H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r)) \rightarrow H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\Gamma}$$

によって定義される準同型とすれば図式

$$\begin{array}{ccc} H^{2r}(X, \mathbb{Z}_l(r)) & \xrightarrow{\epsilon_l^{2r}} & H^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_l(r)) \\ j \downarrow & & \uparrow j \\ H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))^{\Gamma} & \xrightarrow{f} & H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\Gamma} \end{array}$$

は可換.

可換群の準同型 $\beta : M \rightarrow N$ に対して $\text{Ker } \beta$, $\text{Coker } \beta$ が有限群であるとき, $z(\beta) = |\text{Ker } \beta|/|\text{Coker } \beta|$ と定義する.

定理 3.4.(Artin-Tate 公式 II) 各 l に対して Φ^* の $H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l(r))$ 上への作用が半単純で

あると仮定する。このとき,

$$\left| \prod_{\alpha \neq q^r} \left(1 - \frac{\alpha}{q^r}\right) \right|_l^{-1} = \begin{cases} |\det(\varepsilon_l^{2r})|_l^{-1} \frac{|H^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}|}{|H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}^\Gamma| |H^{2r+1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}^\Gamma|} & (l \neq p) \\ q^{-\sum_{j=0}^{r-1} (r-j) h_W^{j, i-j}(X)} |\det(\varepsilon_p^{2r})|_p^{-1} \frac{|H^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_p(r))_{\text{tors}}|}{|\underline{D}^{2r}(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})_{\text{tors}}^\Gamma| |\underline{D}^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})_{\text{tors}}^\Gamma|} & (l = p) \end{cases}$$

が成立する。

証. Φ^* の $H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l(r))$ 上への作用が半単純なので, $z(f)$ が定義され,

$$z(\varepsilon_l^{2r}) = z(i)z(f)z(j)$$

が成立する。ここで,

$$\begin{aligned} z(\varepsilon_l^{2r}) &= |\det(\varepsilon_l^{2r})|_l^{-1} \frac{|H^{2r}(X, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}|}{|H^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}|} \\ z(j) &= |H^{2r-1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_\Gamma|, \\ z(i) &= \frac{1}{|H^{2r+1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))^\Gamma|} \end{aligned}$$

したがって,

$$z(f)^{-1} = z(\varepsilon_l^{2r})^{-1} z(i)z(j) = |\det(\varepsilon_l^{2r})|_l^{-1} \frac{|H^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}|}{|H^{2r}(X, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}|} \frac{|H^{2r-1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_\Gamma|}{|H^{2r+1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))^\Gamma|}$$

ここで, 補題 2.7, 補題 2.8 から

$$\begin{aligned} |H^{2r+1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))^\Gamma| &= |H^{2r+1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}^\Gamma|, \\ |H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}| &= \frac{|H^{2r-1}(X, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}|}{|H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}^\Gamma|} \end{aligned}$$

したがって,

$$z(f)^{-1} = |\det(\varepsilon_l^{2r})|_l^{-1} \frac{|H^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}|}{|H^{2r}(X, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}^\Gamma| |H^{2r+1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))^\Gamma|}$$

$l \neq p$ のとき,

$$z(f) = \left| \prod_{\alpha \neq q^r} \left(1 - \frac{\alpha}{q^r}\right) \right|_l$$

に注意して結論を得る。 $l = p$ のとき,

$$z(f) = |\underline{U}^{2r}(X, \mathbb{Z}_p(r))(k)| \left| \prod_{\substack{v(\alpha)=r \\ \alpha \neq q^r}} \left(1 - \frac{\alpha}{q^r}\right) \right|_p = q^{T^{r-1, r}(X)} \left| \prod_{\substack{v(\alpha)=r \\ \alpha \neq q^r}} \left(1 - \frac{\alpha}{q^r}\right) \right|_p$$

なので、補題 3.1 と併せて結論を得る。

例 3.5. X が Abel 多様体あるいは射影空間における smooth complete intersection なら、各 $l \neq p$ に対して $H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}} = 0$ 。また、 $H^i(X/W)_{\text{tors}} = 0$ 。したがって、 $\underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})_{\text{tors}} = 0$ 。また、 $h^{ij} = h_W^{ij}$ 。これから、Artin-Tate 公式 I, II はそれぞれ

$$|P_i(X; q^{-r})|_l^{-1} = \begin{cases} |H^{i+1}(X, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}| & (l \neq p) \\ q^{-\sum_{j=0}^{r-1} (r-j) h^{j, i-j}(X)} |H^{i+1}(X, \mathbb{Z}_p(r))_{\text{tors}}| & (l = p) \end{cases}$$

あるいは

$$\left| \prod_{\alpha \neq q^r} \left(1 - \frac{\alpha}{q^r}\right) \right|_l^{-1} = \begin{cases} |\det(\varepsilon_l^{2r})|_l^{-1} |H^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}| & (l \neq p) \\ q^{-\sum_{j=0}^{r-1} (r-j) h^{j, i-j}(X)} |\det(\varepsilon_p^{2r})|_p^{-1} |H^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_p(r))_{\text{tors}}| & (l = p) \end{cases}$$

となる。

補註 3.6. $N = 2r$ と仮定する。Poincaré の双対定理から

$$|H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}^\Gamma| = |H^{2r+1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}, \Gamma}| = |H^{2r+1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}^\Gamma| \quad (l \neq p)$$

を、logarithmic Hodge-Witt cohomology に対する双対定理から

$$|\underline{D}^{2r}(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})_{\text{tors}}^\Gamma| = |\underline{D}^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})_{\text{tors}, \Gamma}| = |\underline{D}^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})_{\text{tors}}^\Gamma|$$

を得る。したがって、公式は

$$\left| \prod_{\alpha \neq q^r} \left(1 - \frac{\alpha}{q^r}\right) \right|_l^{-1} = \begin{cases} |\det(\varepsilon_l^{2r})|_l^{-1} \frac{|H^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}|}{|H^{2r}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(r))_{\text{tors}}^\Gamma|^2} & (l \neq p) \\ q^{-\sum_{j=0}^{r-1} (r-j) h_W^{j, i-j}(X)} |\det(\varepsilon_p^{2r})|_p^{-1} \frac{|H^{2r+1}(X, \mathbb{Z}_p(r))_{\text{tors}}|}{|\underline{D}^{2r}(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})_{\text{tors}}^\Gamma|^2} & (l = p) \end{cases}$$

と書き直せる。さらに、Tate 予想が成立すれば、 ε_l^{2r} は余次元 r の algebraic cycle の intersection form の判別式の l 部分を与える。

例 3.7. $N = 2$, $r = 1$ とする。このとき、同型

$$\text{NS}(X_{\bar{k}})_{l-\text{tors}} \xrightarrow{\sim} H^2(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(1))_{\text{tors}}$$

および

$$H^2(X, \mathbb{G}_m)_{l-\text{cotors}} \xleftarrow{\sim} H^2(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(1))_{\text{cotors}} \xrightarrow{\sim} H^3(X, \mathbb{Z}_l(1))_{\text{tors}}$$

が存在する。また、

$$h_W^{02}(X) = \dim \text{Alb}_{X/k} - h^{01}(X) + h^{02}(X)$$

さらに, Tate 予想が成立するなら, $H^2(X, \mathbb{G}_m)$ は有限群で, $\det(\varepsilon_l^2) = \det[\mathrm{NS}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l]$.
以上をまとめて本来の Artin-Tate 公式

$$\prod_{\alpha \neq q} \left(1 - \frac{\alpha}{q}\right) = \pm \frac{1}{q^{\dim \mathrm{Alb}_{X/k} - h^{01}(X) + h^{02}(X)}} \frac{|\det \mathrm{NS}(X)| |H^2(X, \mathbb{G}_m)|}{|\mathrm{NS}(X)_{\mathrm{tors}}|^2}$$

を得る.

註記 3.8. 講演では Milne [7] が

$$\begin{aligned} e^i(r) &= T^{r-1, i-r} - \sum_{v(\alpha) < r} (r - v(\alpha)), \\ \alpha^r(X) &= T^{r-1, r+1} - 2T^{r-1, r} + \sum_{v(\alpha) < r} (r - v(\alpha)) \end{aligned}$$

によって定義した不変量 $e^i(r)$, $\alpha^r(X)$ が

$$\begin{aligned} e^i(r) &= T^{r-1, i-r}(X) + T^{r-1, i-r+1}(X) - \sum_{j=0}^{r-1} (r-j) h_W^{j, i-j}(X), \\ \alpha^r(X) &= -2T^{r-1, r}(X) + \sum_{j=0}^{r-1} (r-j) h_W^{j, 2r-j}(X) \end{aligned}$$

と表わせることを注意して, Milne の一般化した Artin-Tate 公式をそのまま引用したが, ここでは $H^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_p(r))$ を $\underline{D}^i(X, \mathbb{Z}_p(r))(\bar{k})$ で置き換えて幾分簡略な形にした.

註記 3.9. [2](Prop.8.4) では 3.5 を, X が diagonal hypersurface of Hodge-Witt type の場合に示している.

4. Diagonal hypersurfaces

4.1. N, m を整数 ≥ 1 とする. k を体とし, X を

$$c_0 T_0^m + c_1 T_1^m + \cdots + c_{N+1} T_{N+1}^m = 0$$

$(c_0, c_1, \dots, c_{N+1}) \in k^\times$ によって定義される $\mathbb{P}_k^{N+1}$ の diagonal hypersurface とする. $c_0 = c_1 = \cdots = c_{N+1} = 1$ なら, X は次元 n , 次数 m の Fermat 多様体に他ならない.

以下, k はすべての 1 の m 乗根を含み, k が標数 $p > 0$ なら $(m, p) = 1$ と仮定する. μ_m によって k の 1 の m 乗根の群を表わす. 群 $G = (\mu_m)^{n+2}/(\text{diagonal})$ は X の上に

$$(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{N+1})(t_0, t_1, \dots, t_{N+1}) = (\zeta_0 t_0, \zeta_1 t_1, \dots, \zeta_{N+1} t_{N+1}).$$

によって作用する. G の指標群 $\hat{G}$ は

$$\{\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{N+1}); a_i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \sum_{i=0}^{N+1} a_i = 0\};$$

に同一視できる. $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ の $\hat{G}$ の上への作用を

$$ta = (ta_0, \dots, ta_{N+1}) \in \hat{G}$$

で定義する. $\bar{\mathbb{Q}}$ における 1 の m 乗根 ζ_m を一つ固定する. $a = (a_0, \dots, a_{N+1}) \in \hat{G}$ の $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ の作用による軌道 A に対して G の $\mathbb{Q}$ 指標 χ_A を

$$\chi_A(g) = \frac{1}{m^{n+1}} \sum_{g \in G} \text{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_m^d)/\mathbb{Q}}(a(g)^{-1})$$

によって定義する. ここで, $d = \gcd(m, a_0, \dots, a_{n+1})$. 指標 χ_A は $\mathbb{Q}$ 既約.

4.2. $N^r(X_{\bar{k}})$ を $X_{\bar{k}}$ の上の余次元 r の algebraic cycle の numerical equivalence を法とする群とする. $N^r(X_{\bar{k}})$ は有限階数の自由 $\mathbb{Z}$ 加群. さらに, intersection number によって定義される $N^r(X_{\bar{k}})$ の上の対称双一次形式は非退化. $N^r(X)$ によって $Z^r(X) \rightarrow Z^r(X_{\bar{k}}) \rightarrow N^r(X_{\bar{k}})$ の像を表わす. $X(N, m)$ によって次元 N , 次数 m の Fermat 多様体を表わす. このとき,

$$(t_0, t_1, \dots, t_{n+1}) \rightarrow (\sqrt[n]{c_0}t_0, \sqrt[n]{c_1}t_1, \dots, \sqrt[n]{c_{n+1}}t_{n+1})$$

は X から $X(N, m)$ への, G の X あるいは $X(N, m)$ の上への作用と同変な, $\bar{k}$ 同型を定義する. これから特に同型

$$\left[N^r(X(N, m)_{\bar{k}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\left[\frac{1}{m}\right] \right]^{(\chi_A)} \xrightarrow{\sim} \left[N^r(X_{\bar{k}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\left[\frac{1}{m}\right] \right]^{(\chi_A)}$$

を得る.

命題 4.3. k を体, X を $\mathbb{P}_k^{2r+1}$ の次数 m の diagonal hypersurface とする. 同一視

$$\left[N^r(X_{\bar{k}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\left[\frac{1}{m}\right] \right]^{(\chi_A)} = \left[N^r(X(N, m)_{\bar{k}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\left[\frac{1}{m}\right] \right]^{(\chi_A)}$$

の下で

$$\left[N^r(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\left[\frac{1}{m}\right] \right]^{(\chi_A)} = \left[N^r(X(N, m)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\left[\frac{1}{m}\right] \right]^{(\chi_A)}$$

または

$$\left[N^r(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\left[\frac{1}{m}\right] \right]^{(\chi_A)} = 0$$

が成立する.

証. 実際, X が m の巾を割る k の拡大の上で $X(N, m)$ に同型であることに注意すればよい.

系 4.4. k を体, X を $\mathbb{P}_k^{2r+1}$ の次数 m の diagonal hypersurface とする. m が素数なら, $B_n(X) - \text{rk } N^r(X)$ は $m-1$ で割り切れる.

命題 4.5. k を標数 $p \geq 0$ の完全体, X を $\mathbb{P}_k^{2r+1}$ の次数 m の diagonal hypersurface とする.

(1) $n = 2$,

(2) $n \geq 4$ で m は $n + 2$ より小さい素数で割り切れない, あるいは,

(3) $n \geq 4$ で m は素数または 4,

と仮定する. $p = 0$ または $p \equiv 1 \pmod{m}$ なら, $\det N^r(X)$ は m のある巾を割る.

証. Fermat 多様体の場合については [12] で示してあるが, 一般の diagonal hypersurface については 4.3 から Fermat 多様体の場合に帰着される.

補註 4.6. 命題 4.5 の仮定の下では numerical equivalence と homological equivalence は一致する.

註記 4.7. [2](p.8) は $n = 2r \geq 4$ に対して, Lichtenbaum complex $\mathbb{Z}(r)$ の存在を仮定して m が素数で k が有限体の場合に 4.5 を示している.

References

- [1] N. Aoki - On some arithmetic problems related to the Hodge cycles on the Fermat varieties. Math. Ann. 266 (1983) 23-54
- [2] F. Gouvêa, N. Yui - Arithmetic of diagonal hypersurfaces over finite fields. Max Planck Institut Preprint MPI 94-36 (1994)
- [3] M. Gros, N. Suwa - Application d'Abel-Jacobi p -adique et cycles algébriques. Duke Math. J. 57 (1988) 579-613
- [4] L. Illusie - Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 4^e serie 12 (1979) 501-661
- [5] L. Illusie, M. Raynaud - Les suites spectrales associées au complexe de de Rham-Witt. Publ. Math. IHES 57 (1983) 73-212
- [6] J-S. Milne - On a conjecture of Artin-Tate. Ann. of Math. 102 (1975) 517-533
- [7] J-S. Milne - Values of zeta functions of varieties over finite fields. Amer. J. Math. 108 (1986) 297-360
- [8] T. Shioda - The Hodge conjecture and the Tate conjecture for Fermat varieties. Proc. of Japan Acad. 55 Ser. A (1979) 111-114
- [9] T. Shioda - The Hodge conjecture for Fermat varieties. Math. Ann. 245 (1979) 175-184
- [10] T. Shioda, T. Katsura - On Fermat varieties. Tohoku Math. J. 31 (1979) 97-115
- [11] N. Suwa - Fermat motives and the Artin-Tate formula I, II. Proc. Japan Acad. 67 (1991) 104-107, 135-138
- [12] N. Suwa - Fermat motives and the Artin-Tate formula. Preprint
- [13] J. Tate - Algebraic cycles and poles of zeta functions. Arithmetic algebraic geometry, Harper and Row (1965) 93-110
- [14] J. Tate - Endomorphisms of abelian varieties over finite fields. Invent. Math. 2 (1966) 133-144
- [15] J. Tate - On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog. Sémin. Bourbaki exposé 306, in Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, Amsterdam (1968) 189-214