

円分体の単数の p 進展開について

東工大 栗原え香 (Fumika Kurihara)

§ 0. p を奇素数, ζ_1 を 1 の原始 p 乗根. $\mathbb{Q}(\zeta_1)$ を $\mathbb{Q}(\zeta_1)$ の最大実部分体. $\pi = 1 - \zeta_1$ とする. π のとき $\mathbb{Z}[\zeta_1]$ の任意の元 α で, $\mathbb{Z}$ の元でなく, p と素なものは,

$$\alpha \equiv a + b\pi^c \pmod{\pi^{c+1}}, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}, \quad p \nmid ab, \quad c \not\equiv 0 \pmod{p-1}$$

と展開でき, c は α に対して一意的に決まることが知られている. L. Washington は論文 [10] で次を示した.

(I) $\exists \{\eta_2, \eta_4, \dots, \eta_{p-3}\}$: basis for the unit group mod ± 1 of $\mathbb{Z}[\zeta_1]^+$

$$\text{s.t. } \eta_i \equiv a_i + b_i \pi^{c_i} \pmod{\pi^{c_i+1}}$$

$$\text{with } c_i = i + (p-1)u_i \text{ for some } u_i \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq u_i \leq u_i = v_p(L_p(\zeta_1, \omega^i))$$

$$\text{where } v_p: p\text{-adic valuation, } v_p(p) = 1$$

ω : Teichmüller character.

(II) h : $\mathbb{Q}(\zeta_1)^+$ の類数 とすると,

$$v_p(h) = \sum_{\substack{i=2 \\ \text{even}}}^{p-3} (u_i - u_i)$$

以下の論説は. この Washington の結果の p 中 $\wedge$ の一般化に関するもので. 詳しくは. J. Number Theory (1989) Vol. 32 No. 2. 226 - 253 に掲載されています.

§ 1. 単数の p 進展開

p : 奇素数を 1 つ fix し. $n \geq 0 \in \mathbb{Z}$, ζ_{n+1} : 1 の原始 p^{n+1} 乗根とする. K_{n+1} を $\mathbb{Q}(\zeta_{n+1})$ の最大実部分体 $\mathbb{Q}(\zeta_{n+1})^+$ と $\mathbb{Q}$ との中間体で指数 $[\mathbb{Q}(\zeta_{n+1})^+ : K_{n+1}] = d$ が p と素なものとする.

$\pi_{n+1} = (1 - \zeta_{n+1})(1 - \zeta_{n+1}^{-1})$. $\pi = N_{\mathbb{Q}(\zeta_{n+1})^+/K_{n+1}}(\pi_{n+1})$ とする. 二のとき. $K_{n+1} \ni \forall d$: integer, $d \notin \mathbb{Z}$, d : p と素 は.

$$d \equiv a + b\pi^c \pmod{\pi^{c+1}}, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}, \quad p \nmid ab, \quad c \not\equiv 0 \pmod{\frac{p(p-1)}{2d}}$$
と展開でき. c は d に対して一意的に決まる. 今後二の形の展開は特にことわらないが. すべて上の条件のものとする.

$E_{K_{n+1}}$: K_{n+1} の全単数群

$$r = \text{rank}(E_{K_{n+1}}) = \frac{p(p-1)}{2d} - 1$$

としたとき. 次が得られる.

Th. 1

$E_{K_{n+1}} \supset \forall E$: finite index subgroup $\perp \bar{\mathbb{Z}} \perp \mathbb{Z}$

$\exists \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r\}$: basis for $E/\{\pm 1\}$

s.t. $\eta_i^{p^n} \equiv a_i + b_i \pi^{c_i} \pmod{\pi^{c_i+1}} \quad 1 \leq i \leq r$

with $c_i = i + \frac{p(p-1)}{2d} u_i$ for some $u_i \geq 0 \in \mathbb{Z}$

Remarks.

- ① c_i, u_i は E に対して一意に決まり basis のとり方によらない。今後 E に対して Th.1 のようにして決まる c_i, u_i を $c_i(E), u_i(E)$ と書くことにする。
- ② $E_{k+n} \supset {}^v E \supset {}^v E'$: finite index subgroups に対し
- $$c_i(E) \leq c_i(E'), \quad u_i(E) \leq u_i(E') \quad \text{for } \forall i$$
- が成り立つ。

§ 2. The Main Theorem

Th. 2 (the main theorem)

$E_{k+n} \supset {}^v E \supset {}^v E'$: finite index subgroups に対し

$$v_p([E:E']) = \sum_{i=1}^r (u_i(E') - u_i(E))$$

$E \in \mathcal{L}$ v_p : p -adic valuation, $v_p(p)=1$

証明の概略

$$v_p([E:E']) = v_p(R_p(E'^{p^n})) - v_p(R_p(E^{p^n}))$$

なので $v_p(R_p(E^{p^n}))$ を計算する。そこで、次のような E の subgroup E_r を作る。

$\forall M \in \mathbb{Z}$: 十分大 $1 \leq r \leq M$ する

$m_1, m_2, \dots, m_r \in \mathbb{Z}$

s.t. $m_i + u_i(E) \equiv 0 \pmod{p^M}$, $0 \ll m_1 \ll \dots \ll m_r$ をとる。

(3)

このとき,

$$E \supset E_r = \langle \eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_r \rangle$$

$$\text{s.t. (i) } \eta_i^{p^m} \equiv a_i + b_i \pi^{c_i} \pmod{p^M}$$

$$\begin{aligned} \text{with } c_i &= c_i(E) + \frac{p^r(p-1)}{2d} m_i \\ &= i + \frac{p^r(p-1)}{2d} (m_i + u_i(E)) \end{aligned}$$

$$(ii) \quad v_p([E:E_r]) = \sum_{i=1}^r m_i$$

== 2. $\text{Gal}(K_{n+1}/\mathbb{Q}) = \{\sigma_j\}_{1 \leq j \leq r+1}$ とすると.

$$\begin{aligned} R_p(E_r^{p^m}) &= \det(\log_p \eta_i^{p\sigma_j})_{1 \leq i, j \leq r} \\ &\equiv \det(\log_p(a_i + b_i \pi^{\sigma_j c_i}))_{1 \leq i, j \leq r} \pmod{p^M} \end{aligned}$$

となる。 v_p の値を実際に計算すると.

$$\begin{aligned} v_p(\det(\log_p(a_i + b_i \pi^{\sigma_j c_i}))_{1 \leq i, j \leq r}) \\ = \sum_{i=1}^r m_i + \sum_{i=1}^r u_i(E) + \delta(K_{n+1}) \end{aligned}$$

(== 2. $\delta(K_{n+1})$ は K_{n+1} のみにより E によらない定数.)

となる。従って, M が十分大であることから

$$\begin{aligned} v_p(R_p(E^{p^m})) &= v_p(R_p(E_r^{p^m})) - \sum_{i=1}^r m_i \\ &= \sum_{i=1}^r u_i(E) + \delta(K_{n+1}) \end{aligned}$$

となり定理が証明される。

E_{n+1} : $\mathbb{Q}(\zeta_{n+1})^+$ の全単数群

C_{n+1} : $\mathbb{Q}(\zeta_{n+1})^+$ の円単数群

$C_{K_{n+1}} = N_{\mathbb{Q}(\zeta_{n+1})^+/K_{n+1}}(C_{n+1})$ とする。

このとき、次が得られる。

Cor.

$\hat{h}_{K_{n+1}}$: K_{n+1} の類数 としたとき、

$$\psi_p(\hat{h}_{K_{n+1}}) = \sum_{i=1}^r (u_i(C_{K_{n+1}}) - u_i(E_{K_{n+1}}))$$

Th.1, Th.2, Cor は最初に述べた Washington の結果の P 中の拡張にも、ています。

§3. $u_i(E_{n+1}), u_i(C_{n+1})$ の性質

ここでは $K_{n+1} = \mathbb{Q}(\zeta_{n+1})^+$ とする。従って、 $\pi = \pi_{n+1}$, $\Gamma = \Gamma_{n+1} = \frac{P(P-1)}{2} - 1$ とする。

(1) p -adic L -function との関係

簡単な計算より、

$$\sum_{i=1}^r u_i(C_{n+1}) = \Gamma n + \psi_p(P^n \prod_{\chi} L_p(1, \chi))$$

(ここで $\prod_{\chi}$: mod P^n の nontrivial even Dirichlet characters)

が得られる。ここで、 $n=0$ のときは Washington の結果より、

$$u_k(C_1) = \psi_p(L_p(1, \omega^{\frac{P-1}{2}k})) \quad \text{for } 1 \leq k \leq \frac{P-3}{2}$$

(ω : Teichmüller character)

が成り立つ。これより、 $n > 0$ で次が成り立つかというところが自然に考えられる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i \equiv k \pmod{\frac{p-1}{2}}} U_i(C_{n+1}) = \psi_p \left(\prod_{\chi} L_p(1, \omega^{\chi} \chi) \right) + np^n \\ \text{for } 1 \leq k \leq \frac{p-3}{2} \\ \sum_{i \equiv 0 \pmod{\frac{p-1}{2}}} U_i(C_{n+1}) = \psi_p \left(p^n \prod_{\chi}' L_p(1, \chi) \right) + n(p^n - 1) \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ただし, } \prod_{\chi} : \text{mod } p^n \text{ の Dirichlet characters s.t. } \chi^{p^n} = 1 \text{ の積} \\ \prod_{\chi}' : \text{上のもの中 nontrivial なものの積} \end{array} \right)$$

これが成り立つかどうかについては、まだ完全にはわからず、
ていえないが、ある特殊な場合については次が言える。

Th. 4 の Cor.

for $1 \leq k \leq \frac{p-3}{2}$;

$$\text{if } \psi_p(L_p(1, \omega^{\chi_k})) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i \equiv k \pmod{\frac{p-1}{2}}} U_i(C_{n+1}) = \psi_p \left(\prod_{\chi} L_p(1, \omega^{\chi} \chi) \right) + np^n = np^n$$

・ $\psi_p(L_p(1, \omega^{\chi_k})) \neq 0$ なる k については $\sum_{i \equiv k \pmod{\frac{p-1}{2}}} U_i(C_{n+1})$ の値はよくわからず、ていえない。

・ $\sum_{i \equiv 0 \pmod{\frac{p-1}{2}}} U_i(C_{n+1})$ の値についてもよくわからず、ていえないが、

$$\sum_{i \equiv 0 \pmod{\frac{p-1}{2}}} (U_i(C_{n+1}) - U_i(E_{n+1})) = 0$$

が成り立つ。

(2) $U_i(E_m)$ と $U_{ip}(E_{m+1})$ の関係

次が成り立つ。

$$(i) \quad U_{ip}(E_{m+1}) \leq U_i(E_m) + 1 \quad \text{for } i=1, \dots, l_m$$

(ii) $i \not\equiv 0 \pmod{\frac{p-1}{2}}$ なる i について.

$\nexists U_{ip}(E_{m+1})$ があまり大きくない

$$(U_{ip}(E_{m+1}) \leq n-1 \text{ なら十分})$$

$$\Rightarrow U_i(E_m) \leq U_{ip}(E_{m+1})$$

(3) $\eta=0$ となるための条件

η : $\mathbb{Q}(\zeta_p)^\dagger$ の cyclotomic $\mathbb{Z}_p$ -extension の Iwasawa
 η -invariant とする.

Def.

$E_{m+1} \supset E$: finite index subgroup とする

for each $i=1, 2, \dots, l_{m+1}$;

$U_i(E)$: normal $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} U_i(E) = (U_i(E_{m+1}) \text{ のとりうる$

最小の値)

ここで、 $U_i(E_{m+1})$ のとりうる最小の値とは、だいたい.

$$p^{m-e} \parallel i \Rightarrow (U_i(E_{m+1}) \text{ のとりうる最小の値}) = e$$

for $0 \leq e \leq n$ となつてゐる。

(7)

Th. 6

for each k ($1 \leq k \leq \frac{p-3}{2}$) ;

$$\nexists \exists \eta_k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{s.t. (i) } \eta_k \geq U_k(C_1) = \mathcal{V}_p(L_p(1, \omega^{2k}))$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{(ii) } i \equiv k \pmod{\frac{p-1}{2}} \\ U_i(C_{m_k}) : \text{not normal} \end{array} \right\} \text{ for } i \text{ i.i.z.}$$

$$U_i(E_{m_k}) \geq U_k(C_1)$$

$$\Rightarrow \pi = 0$$

これは、 $\pi = 0$ となるための、 $U_i(E_{m+1})$ についての十分条件であるが、次の特別な場合については、必要十分条件が得られる。

Cor.

for each k ($1 \leq k \leq \frac{p-3}{2}$) ;

$$\nexists U_k(C_1) = \mathcal{V}_p(L_p(1, \omega^{2k})) \leq 1$$

$$\Rightarrow [\pi = 0 \Leftrightarrow U_{k,p^N}(E_{m+1}) \geq U_k(C_1) \text{ for some } N \geq 0]$$

Remarks (Th. 6 $\Rightarrow$ i.i.z.)

$$\textcircled{1} \nexists \mathcal{V}_p(L_p(1, \omega^{2k})) = 0$$

$$\Rightarrow \forall i \text{ s.t. } i \equiv k \pmod{\frac{p-1}{2}} \text{ i.i.z.}$$

$U_i(C_{m+1})$: normal for $\forall m \geq 0$

が言える。従って、このような i については無条件。

② $U_p(L_p(1, \omega^{2p})) > 0$ なる i について。

for $\forall m \geq 0$; $U_i(C_{m+1})$: not normal なる

i ($i \equiv k \pmod{\frac{p-1}{2}}$) は必ずある。また、

$\nexists p^{n-e} \parallel i$ ($0 \leq e \leq n$) $\Rightarrow$ たいたい $U_i(E_{m+1}) \geq e$

なので、Th.6 の条件(ii) は、

$$\left. \begin{array}{l} i \equiv k \pmod{\frac{p-1}{2}}, \\ p^{n-U_B(C_1)} \mid i \\ U_i(C_{m+1}) : \text{not normal} \end{array} \right\} \text{ なる } i \text{ についての条件と}$$

なる。

Remark (Cor について)

(2) の $U_i(E_m)$ と $U_{ip}(E_{m+1})$ の関係より、

$$U_B(C_1)$$

$$U_B(E_1) \leq U_{Bp}(E_2) \leq \dots \leq U_{Bp^m}(E_{m+1}) \leq \dots$$

が成り立つ。

$$\pi=0 \Leftrightarrow U_{Bp^m}(E_{m+1}) \geq U_B(C_1) \text{ for some } m \geq 0$$

であるが、

$$(1 \leq k \leq \frac{p-1}{2})$$

Vandiver conj が成り立つ $\Leftrightarrow U_B(C_1) = U_B(E_1)$ for each k

なので "Vandiver conj $\Rightarrow \pi=0$ " も直ちにわかる。

« References »

1. J. Coates : p -adic L -functions and Iwasawa's theory , in "Algebraic Number Fields" (A. Fröhlich, Ed.) pp. 269-353 , Durham Symposium, 1975 , Academic Press , New York / London , 1977.
2. P. Dénes , : Über irreguläre Kreiskörper , Publ. Math. Debrecen 3 (1953), 17-23.
3. P. Dénes : Über Grundeinheitssysteme der irregulären Kreiskörper von besonderen Kongruenzeigenschaften , Publ. Math. Debrecen 3. (1954) , 195-204.
4. P. Dénes : Über den zweiten Faktor der Klassenzahl und den Irreguläritätsgrad der irregulären Kreiskörper , Publ. Math. Debrecen 4. (1956) , 163-170.
5. R. Gold : Rational Coates-Wiles series , Illinois J. Math. 28 (1984) , 379-382
6. R. Greenberg : On the Iwasawa invariants of totally real number fields , Amer. J. Math. 98 (1976) , 263-284.

7. H. Hasse : "Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper", Akademie-Verlag, Berlin, 1952.
8. K. Iwasawa : Lecture on p -adic L -functions, in "Annals of Math. Studies" Vol. 54, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1972.
9. W. Sinnott : On the Stickelberger ideal and the circular units of an abelian field, Invent. Math. 62 (1980), 181-234.
10. L. Washington : Units of irregular cyclotomic fields, Illinois J. Math. 23 (1979), 635-647.
11. L. Washington : "Introduction to Cyclotomic Fields", Springer-Verlag, New York, 1982.