

Painlevé' IV 型方程式の多変数化

東京大学数理解析研究所 研究科 D2 川向 洋之 (KAWAMUKO, Hiroyuki)

Painlevé' 6 型方程式の多変数化として Garnier system がある。また、木村 [1] では、2 変数の Garnier system を与える線型方程式を退化させ、I 型から V 型までの 2 変数化を与えている。特に、IV 型の拡張は Riemann 図式が

$$\left(\begin{array}{cccc} x=0 & x=\lambda_1 & x=\lambda_2 & \overbrace{x=\infty} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\kappa_\infty \\ \kappa_0 & 2 & 2 & \frac{1}{3} \quad \frac{t}{2} \quad t_1 \quad \kappa_\infty - \kappa_0 + 1 \end{array} \right)$$

↑

(ただし、 $x=\lambda_1, \lambda_2$ はみかけの特異点で、 $\kappa_0 \in \mathbb{Z}$)

で与えられる線型方程式の Isomonodromic deformation を使って得られることが記されている。

この原稿では、上記の Riemann 図式を参考にして、3 変数以上の Painlevé' IV 型方程式を定義し、3 変数の場合の特殊解を記す。

0. 記号の約束

q, κ_0 は、初めから与えられる数字で、 q は自然数、 κ_0 は非整数とする。

$$\sum_{(i)} := \sum_{i=1}^q, \quad \sum_{(i)}^{(j)} := \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^q, \quad \prod_{(i)} := \prod_{i=1}^q, \quad \prod_{(i)}^{(j)} := \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^q$$

$$t_0 := \kappa_0 - 1$$

$$t_{q+1} := 1$$

$$t_N := 0 \quad (if \quad N < 0 \text{ or } N > q+1)$$

$$\Lambda(x) := \prod_{(i)} (x - \lambda_i) \quad \Lambda'(\lambda_k) := \frac{d}{dx} \Lambda(x) \Big|_{x=\lambda_k}$$

$$\sigma_j := \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dx^j} \prod_{(i)} (1 + \lambda_i x)$$

$$\sigma_{k,j} := \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dx^j} \prod_{(i)}^{(k)} (1 + \lambda_i x)$$

Rem $\sigma_j = 0$ if $j < 0$ or $j > q+1$

1. Isomonodromic deformation

次の Riemann 図式を持つ線型常微分方程式を考える.

$$(R) \quad \left(\begin{array}{cccccccccccc} x=0 & x=\lambda_1 & \cdots & x=\lambda_g & \overbrace{} & x=\infty \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\kappa_\infty \\ \kappa_0 & 2 & \cdots & 2 & \frac{1}{g+1} & \frac{t_g}{g} & \frac{t_{g-1}}{g-1} & \cdots & \frac{t_g}{2} & t_g & \kappa_\infty - \kappa_0 + 1 \end{array} \right)$$

ただし, $\kappa_0 \in \mathbb{Z}$ で, $x=\lambda_k$ ($k=1, \dots, g$) は見かけの特異点とする.

Prop

Riemann 図式 (R) を持つ方程式は, 次の様になる.

$$\frac{d^2}{dx^2} y + p_1(x, t) \frac{d}{dx} y + p_2(x, t) y = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$p_1(x, t) := \frac{1-\kappa_0}{x} - \sum_{k=1}^{g+1} t_k x^{k-1} - \sum_{(k)} \frac{1}{x-\lambda_k}$$

$$p_2(x, t) := -\frac{1}{x} \sum_{(k)} a_k(t) x^{k-1} + \kappa_\infty x^{g-1} + \sum_{(k)} \frac{\lambda_k \mu_k}{x(x-\lambda_k)}$$

$$\begin{aligned} a_j(t) := & (-1)^{g-j} \sum_{(i)} \frac{1}{\Lambda'(\lambda_i)} \left[\lambda_i \sigma_{i, g-j} \mu_i^2 - \sigma_{i, g-j} (\lambda_i^{g+1} + \sum_{(k)} t_k \lambda_i^k \right. \\ & \left. + \kappa_0) \mu_i + \kappa_\infty \lambda_i^g \sigma_{i, g-j} \right] \\ & - (1 - \delta_{j, g}) \sum_{(i)} \sum_{k=0}^{g-j-1} (-1)^k \sigma_{i, k} \lambda_i^{g-j-k} \frac{\mu_i}{\Lambda'(\lambda_i)} \end{aligned}$$

Thm

λ_j, μ_j, t_j の有理関数 $\tilde{K}_j$ ($j=1, 2, \dots, g$) を次の様におく.

$$(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \dots, \tilde{K}_g) := (a_1, a_2, \dots, a_g) \begin{pmatrix} t_2 & t_3 & \dots & t_{q+1} \\ t_3 & & & \\ \vdots & & & \\ t_{q+1} & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1/2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1/g \end{pmatrix}$$

$$\text{ie } \tilde{K}_l := \frac{1}{g} \sum_{i=1}^g a_i t_{l+i}$$

この時, 方程式 (1) が Isomonodromic deformation を許すための必要十分条件は,

$\lambda_j = \lambda_j(t), \mu_j = \mu_j(t)$ が Hamiltonian system

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial t_j} = \frac{\partial \tilde{K}_j}{\partial \mu_i}, \quad \frac{\partial \mu_i}{\partial t_j} = - \frac{\partial \tilde{K}_j}{\partial \lambda_i} \quad (i, j = 1, \dots, g) \quad (2)$$

をみたすことである. —

Rem Hamiltonian system (2) は, $g=1$ の時 Painlevé IV 型, $g=2$ の時は, 木村 [1] の Hamiltonian と同値である.

2. Polynomial Hamiltonian structure

Hamiltonian system を考える際, Hamiltonian は 正準変数に対し, 多項式であった方が扱いやすい. よって, Hamiltonian system (2) の Hamiltonian を多項式にすることを考える.

Thm

$\sigma_k, \rho_k \in$.

$\sigma_k :=$ " λ に属する基本対称式 "

$$\rho_k := (-1)^{k-1} \sum_{(i_1, \dots, i_{g-k})} \frac{\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_{g-k}}}{\lambda'(\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_{g-k}})} \mu_{i_1 \dots i_{g-k}}$$

と置く. $\tilde{K}_j$ は, σ_k, ρ_k, t の多項式として表される. さらに, $(\lambda, \mu, \tilde{K}, t) \longrightarrow (\sigma, \rho, \tilde{K}, t)$ は正準変換, i.e. $\lambda_j = \lambda_j(t), \mu_j = \mu_j(t)$ は Hamiltonian system (2) をみたすなら $\sigma_k = \sigma_k(t), \rho_k = \rho_k(t)$ 也.

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial t_j} = \frac{\partial \tilde{K}_j}{\partial \rho_i}, \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t_j} = - \frac{\partial \tilde{K}_j}{\partial \sigma_i}$$

をみたす. —

参考のため, $g=3$ の a_1, a_2, a_3 を記しておく.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_3 & \sigma_2 \sigma_3 \\ 1 & -\sigma_2 + \sigma_1^2 & -\sigma_1 \sigma_3 \\ 0 & -\sigma_1 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1^2 \\ \rho_2^2 \\ \rho_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2\sigma_2 & 2\sigma_1 \sigma_3 \\ 2\sigma_1 & 0 & -2\sigma_3 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \rho_2 \\ \rho_1 \rho_3 \\ \rho_2 \rho_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\kappa_0 - 2 - \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_3 t_3 & -(\kappa_0 + 1) \sigma_1 - \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 t_2 & -\kappa_0 \sigma_2 - \sigma_3^2 - \sigma_3 t_1 \\ -\sigma_3 + \sigma_1 \sigma_2 - t_1 + \sigma_2 t_3 & \kappa_0 + 1 + \sigma_2^2 - \sigma_1 t_1 - \sigma_2 t_2 + \sigma_3 t_3 & \kappa_0 \sigma_1 + \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 t_2 \\ \sigma_2 - \sigma_1^2 - t_2 - \sigma_1 t_3 & \sigma_3 - \sigma_1 \sigma_2 + t_1 - \sigma_2 t_3 & -\kappa_0 - \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_3 t_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix}$$

$$+ \kappa_0 \begin{bmatrix} \sigma_3 \\ -\sigma_2 \\ \sigma_1 \end{bmatrix}$$

Hamiltonian $\tilde{K}$ は, これらの和で表される.

3. τ 関数と特殊解.

ここで $g=3$ の場合に τ の外話す.

まず天下りの次に次の Lem1 を挙げる.

Lem 1

$$t_1 = \xi_1 - 2\xi_2\xi_3 + \xi_3^3$$

$$t_2 = -2\xi_2 + 3\xi_3^2$$

$$t_3 = 3\xi_3$$

$$\sigma_1 = g_1 - 2\xi_3$$

$$s_1 = p_1 + \xi_3 p_2$$

$$\sigma_2 = g_2 + \xi_3^2 - g_1\xi_3 - \xi_2$$

$$s_2 = p_2$$

$$\sigma_3 = g_3$$

$$s_3 = p_3$$

$$H_1 = \tilde{K}_3 (= a_3)$$

$$H_2 = -t_3\tilde{K}_1 - 2\tilde{K}_2 + t_3\tilde{K}_3 + p_2 (= -a_2 + t_3a_3 + p_2)$$

$$H_3 = t_2\tilde{K}_1 + 2t_3\tilde{K}_2 + 3\tilde{K}_3 + 2s_1 + \sigma_1 p_2 (= a_1 + 2s_1 + \sigma_1 p_2)$$

と置く. $(\sigma, p, \tilde{K}, t) \rightarrow (g, p, H, \xi)$ は正準変換で, H_j は次の様にかかる.

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & , & -g_1 & , & g_3 \\ -1 & , & g_2 - \xi_2 - g_1^2 & , & g_3(g_1 - \xi_3) \\ 0 & , & g_3 & , & g_3(g_2 - g_1\xi_3 - \xi_2 + \xi_3^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_3^2 \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} -2 & , & 0 & , & 0 \\ -2g_1 & , & 0 & , & 2g_3 \\ 0 & , & 2g_3 & , & 2g_3(g_1 - \xi_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 p_2 \\ p_1 p_3 \\ p_2 p_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} g_2 - g_1^2 + \xi_2 & , & g_3 - g_2 g_1 + g_1 \xi_2 + \xi_1 \\ g_3 - g_2 g_1 + g_1 \xi_2 + \xi_1 & , & -g_3 \xi_3 - g_2^2 + g_1 \xi_1 + \xi_2^2 - \chi_0 \\ -g_3 g_1 - g_3 \xi_3 - \chi_0 & , & -g_3 g_2 + g_3 \xi_3^2 - g_1 \chi_0 + \xi_3 \chi_0 - g_3 \xi_3 \end{bmatrix} \\
& \quad , \quad -g_3 g_1 - g_3 \xi_3 - \chi_0 \\
& \quad , \quad -g_3 g_2 + g_3 \xi_3^2 - g_1 \chi_0 + \xi_3 \chi_0 - g_3 \xi_3 \\
& \quad , \quad -g_3^2 - g_3 \xi_3 + 2g_3 \xi_2 \xi_3 - g_3 \xi_1 - g_2 \chi_0 + g_1 \xi_3 \chi_0 + \xi_2 \chi_0 - \xi_3^2 \chi_0 \left[\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \right] \\
& \quad + \chi_0 \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 - \xi_2 \\ g_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Lem 2

Hamiltonian H_j ($j=1,2,3$) に対し、 H_i と H_j の Poisson bracket $\{H_i, H_j\}$ は 0.

また、 $(\frac{\partial}{\partial t_i})$ は λ_k, μ_k も定数と思て t_i について微分せよという意味とすると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right) H_j = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) H_i \quad - (3)$$

が成立。——

Lem 1 の正準変換を行うのは Lem 2 の (3) が成り立つ様にするためである。

よってこの等式から $\sum_{i=1}^3 H_i d\xi_i$ は closed であることがわかる。よって関数 $\tau = \tau(\xi)$ を、

$$d \log \tau := \sum_{i=1}^3 H_i d\xi_i$$

で定義できる。また、

Lem 3

$$p_1 = \hat{p}_1 + \xi_1 + g_1^3 - 2g_1 g_2 + g_3$$

$$p_2 = \hat{p}_2 + \xi_2 - g_1^2 + g_2$$

$$p_3 = \hat{p}_3 + \xi_3 + g_1 + \frac{\chi_0}{g_3}$$

$$\bar{H}_1 = H_1 + g_1$$

$$\bar{H}_2 = H_2 + g_2$$

$$\bar{H}_3 = H_3 + g_3$$

とおく。 $(g, p, H, \xi) \rightarrow (g, \hat{p}, \bar{H}, \bar{\xi})$ は正準変換で、Hamiltonian $\bar{H}$ は、 H を

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = E_1 \begin{bmatrix} p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_3^2 \end{bmatrix} + E_2 \begin{bmatrix} p_1 p_2 \\ p_1 p_3 \\ p_2 p_3 \end{bmatrix} + F \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} + \chi_\infty \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 - \xi_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

と表わした時、

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \\ \bar{H}_3 \end{bmatrix} = E_1 \begin{bmatrix} \hat{p}_1^2 \\ \hat{p}_2^2 \\ \hat{p}_3^2 \end{bmatrix} + E_2 \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \hat{p}_2 \\ \hat{p}_1 \hat{p}_3 \\ \hat{p}_2 \hat{p}_3 \end{bmatrix} + F \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \end{bmatrix} + \chi_\infty \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 - \bar{\xi}_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

となる。 ———

この Lem から、関数 $\bar{c} = \bar{c}(\xi)$ を $d \log \bar{c} = \sum_{i=1}^3 \bar{H}_i d \xi_i$ で定義する。

$$d \log \frac{\bar{c}}{c} = g_1 dt_1 + g_2 dt_2 + g_3 dt_3$$

となることに注意。

最後に、次の Prop を挙げてこの原稿を終ることにする。

Prop.

$u = \bar{c}/c$, $\chi_\infty = 0$, $p_j = 0$ ($j=1,2,3$) とすると、Hamiltonian system

$$\frac{\partial g_k}{\partial \xi_i} = \frac{\partial H_i}{\partial p_k} \quad \frac{\partial p_k}{\partial \xi_i} = - \frac{\partial H_i}{\partial g_k}$$

は、次の様になる。

$$\partial_1^2 U = \partial_2 U + \xi_2 U$$

$$\partial_1 \partial_2 U = \partial_3 U + \xi_1 \xi_3 \partial_1 U$$

$$\partial_1 \partial_3 U = -\xi_3 \partial_3 U - \kappa_0 U$$

$$\partial_2^2 U = -\xi_3 \partial_3 U + \xi_1 \partial_1 U + \xi_2^2 U - \kappa_0 U$$

$$\partial_2 \partial_3 U = \xi_3^2 \partial_3 U - \kappa_0 \partial_1 U + \kappa_0 \partial_3 U - \xi_3 \partial_3 U$$

$$\begin{aligned} \partial_3^2 U = & -\xi_3^3 \partial_3 U + 2 \xi_2 \xi_3 \partial_3 U - \xi_1 \partial_3 U - \kappa_0 \partial_2 U \\ & + \kappa_0 \xi_3 \partial_1 U + \kappa_0 \xi_2 U - \kappa_0 \xi_3^2 U \end{aligned}$$

$$(\text{ただし } \partial_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j})$$

参考文献

- [1] H. Kimura., The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure, Ann. Mat. Pura. Appl., CLV (1989), P. 25-34
- [2] D. Liu., Holonomic deformation of linear differential equation of the A_3 Type, preprint