

BZ反応におけるペースメーカーと進行波

静岡大・教養 長 島 弘 幸

Belousov-Zhabotinsky 反応においてペースメーカーにより実験的に進行波の波長をコントロールすることを行っているが、今回はその定性的な理論につき述べる。

反応拡散系を次のように書く¹⁾

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_t &= \mathbf{F}(\mathbf{A}) + \varepsilon D_M \nabla^2 \mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{g}(\vec{x}, \mathbf{A}) \\ 0 < \varepsilon &\ll 1 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで $\mathbf{A}$ は反応物の濃度を表わす。また $\mathbf{g}$ は不純物 (ペースメーカー) を表わす。

$\mathbf{A}$ を ε で展開し

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\varepsilon, t, \vec{x}) &= \mathbf{A}_0(t, T, \vec{x}) + \varepsilon \mathbf{A}_1(t, T, \vec{x}) + \cdots \\ \mathbf{A}^0 &= \mathbf{B}(t + \psi(T, \vec{x})) \end{aligned} \quad (2)$$

とおく。ただし $T = \varepsilon t$ である。

ε の一次で

$$\psi_T = D(\nabla^2 \psi + \Gamma \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \psi) + \alpha(\vec{x}) \quad (3)$$

を得る。ここで

$$D = \langle D_M B' \rangle, \quad D\Gamma = \langle D_M B'' \rangle, \quad \alpha = \langle g \rangle$$

で $\langle \rangle$ は一種の周期の平均である。式(3)を変形し変数分離を行うと

$$D \nabla^2 \Phi + \Gamma \alpha(\vec{x}) \Phi = \omega \Phi \quad (4)$$

を得、 $\alpha > 0$ の領域で正の離散固有値を得る。ここで最大固有値 ω_1 のみきく時空領域を考える。(実験的にはペースメーカーの比較的近くで充分時間が経過した状態) 式(4)を2次元に適用し

$$\alpha(\vec{x}) = \begin{cases} \alpha & |\vec{x}| \leq R \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

として解くと固有値 ω の関係式

$$\sqrt{\frac{\omega}{D}} \frac{K_1\left(\sqrt{\frac{\omega}{D}} R\right)}{K_0\left(\sqrt{\frac{\omega}{D}} R\right)} = \sqrt{\frac{\Gamma\alpha - \omega}{D}} \frac{J_1\left(\sqrt{\frac{\Gamma\alpha - \omega}{D}} R\right)}{J_0\left(\sqrt{\frac{\Gamma\alpha - \omega}{D}} R\right)} \quad (5)$$

を得る。ここで J_0, J_1 は Bessel 関数, K_0, K_1 は変形 Bessel 関数である。

最大固有値 ω_1 の R の依存性は $0 < z \ll 1$ のとき

$$K_0(z) \sim \log \frac{1}{z} \quad K_1 \sim z$$

$$J_0(z) \sim 1, \quad J_1(z) \sim 0$$

より

$$\omega_1(R) \longrightarrow 0 \quad (R \rightarrow 0)$$

他方

$$\sqrt{\frac{\Gamma\alpha - \omega_1}{D}} R = x_0 < \alpha_1, \quad J_0(\alpha_1) = 0$$

であるので $R \rightarrow \infty$ で $\omega_1 = \Gamma\alpha$ となる。これを波長 λ と R の関係になおすと

$$\lim_{R \rightarrow 0} \lambda(R) = \infty \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \lambda(R) = \lambda(\infty) = \text{一定}$$

となり、また R に関して λ は単調減少となり、これは実験結果を定性的に説明する。

1) P. S. Hagan : Adv. App. Math. 2 (1981) 400.