

フェルマ曲線の安定退化とその応用について

学習院大学・理 前田博信

§1 序

代数体 K 上で定義された非特異、完備、絶対既約な代数曲線 C は K の整数環 $\mathcal{O}_K$ 上にひろげて曲面にすることが出来る。すなわち連結、正則な2次元のスキーム X と固有平坦射 $\pi: X \rightarrow B = \text{Spec}(\mathcal{O}_K)$ であって $X \times_{\mathcal{O}_K} K \simeq C$ とするものが(少なくとも1つ)存在する。blowing down をくり返して、更に $X \rightarrow B$ は極小、即ち X には第一種例外曲線が存在しない、としてよい¹⁾。 C の種数 $g(C)$ が $g(C) \geq 1$ なら極小な X は一意的に定まり、 $g(C) = 0$ なら X と双有理同値な極小モデルは可算無限個存在し互にエレメンタリー変換でうつあっている。

1942年の論文²⁾で M. Deuring は一般の $p \in \{B \text{ の閉点} \}$ に対して、 π の p 上のファイバー X_p が $\kappa(p) = \mathcal{O}_K/p$ 上絶対既約で正則な代数曲線とすること、即ち X が p で "good reduction" をもつという M. Eichler の主張を

1) I. Shafarevich, Lectures on Minimal Models ... , Tata Lecture Notes 37, 1966

2) M. Deuring, Reduktion algebraischer Funktionenkörper ... , Math. Zetschr. 47, 1942, 643-654.

証明した。この論文にはこのような易しい事実は既に Ostrowski や E. Noether は知っていたに違いないと書いてある。一方、 X の good でない reduction、つまり bad reduction についての考察については H. Hasse が 1954 年の論文³⁾で整数論における重要な問題として研究を奨励しているが Hasse は C_s (後出) の conductor を計算したにとどまった。

bad reduction の様子が明らかになるのは小平による複素楕円曲面の研究 (1963) や Néron の仕事 (1964) に初まると思われる。一方、1962 年に Shafarevich はストックホルムの ICM (国際数学者会議) で Weil 楕円曲線、即ち $x^3 + y^3 = 1$ 、は $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{3})$ まで持ちあげてやると、どこにも bad reduction のよいモデルが存在すること示した⁴⁾。

60 年代から bad reduction の研究が盛んになった。M. Raynaud の研究により Néron の極小モデルがよく理解され、A. Grothendieck は アーベル多様体が good reduction をもつための Néron-Ogg-Shafarevich 判定法を一般化し、アーベル多様体に対する安定還元定理を証明した⁵⁾。1969 年には P. Deligne と D. Mumford が代数曲線 C/K の安定還元定理を定式化し、 C の reduction が stable であることと C のヤコビ多様体 $\text{Jac}(C)$ の reduction が stable であることが同値であることを証明した⁶⁾。

3) H. Hasse, Zetafunktionen und L-Funktionen ... , 全集第2巻, 450-515.

4) I. Shafarevich, Algebraic Number Fields, Proc. ICM, Stockholm 1962, 163-176.

5) A. Grothendieck, ed., SGA 7 I, Lect. Notes in Math. 288, Springer

6) P. Deligne and D. Mumford, The irreducibility of ... , Publ. Math. IHES, 36, 1969, 75-110.

このことを用いて 種数 $g \geq 2$ の安定曲線の (coarse) moduli scheme $\overline{\mathcal{M}}_g/\mathbb{Z}$ を得る. $\overline{\mathcal{M}}_g$ は $\mathbb{Z}$ 上 projective であるから 代数体上で定義された代数曲線 C が かつてに 1 つ与えられたら 各素数 p に対し C の p 上での stable reduction が一意的に定まる. これを具体的に求めることが 問題となる. この問題は 代数幾何学のみならず 整数論の分野で多くの応用のあることが、最近の研究によって明らかになっている.

この小論では C として フェルマ曲線 $F^n; x^n + y^n = 1$ / $\mathbb{Q}$, 並びに フェルマ曲線 $F_{a,b,c}^n; y^n = (-1)^c x^a (1-x)^b$ / $\mathbb{Q}$, $a+b+c=0$, について得られた結果を紹介したい. なお F^p ($p \geq 3$ が素数) については Maeda⁷⁾, $F_{a,b,c}^n$ (n は一般) については Coleman と McCallum⁸⁾ による.

§2. 安定退化の一般論

記号は慣用に従う. K は代数体、 K の整数環を $\mathcal{O}_K$, $B = \text{Spec } \mathcal{O}_K$, K の有限素点 (= B の閉点) を $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ 等で表わす. $\mathcal{K}$ を K を定数体とする一変数代数函数体、つまり $\mathcal{K}$ は K 上有限生成で $\text{tr. deg}_K \mathcal{K} = 1$ かつ、 K は $\mathcal{K}$ 内で代数的閉とする、(別名、混雑数の 2 次元大域体). $\mathcal{K}/K$ のモデルの中から 非特異完備、絶対既約な代数曲線 C/K を選ぶ. C/K の極小モデル $X \rightarrow B$ を選ぶ. π には 特異ファイバーがあるのが普通である. 例えは $K = \mathbb{Q}$ のとき、 $\mathbb{Z}$ 上いたる所 good reduction をもつ アーベル多様体は存在しないことが知られているから、 $\mathbb{Z}$ 上で

7) H. Maeda, Die stabile Reduktion der Fermatkurve ... , manuscripta 56, 1986, 333-342.

8) W. McCallum and R. Coleman, Stable Reduction of Fermat ... , Crelle に出る予定.

singular fibre を一つも 持たない $C/\mathbb{Q}$, $g(C) \geq 1$, は存在しない.⁹⁾

G. Faltings によって証明された Shafarevich 予想によれば¹⁰⁾, " B 上の有限個の素点の集合を S とし、高々 S 上でのみ bad reduction をする K 上の代数曲線の K -同型類は g の種数 $g (\geq 2)$ を固定すると高々有限個しか存在しない" のであるから π の特異ファイバーの様子が決まることと、 C/K が決まることは "ほとんど" 同値であるといえるであろう. という訳で 特異ファイバー に注目したい.

特異ファイバー といっても g の種類は豊富で 種数 g が大きくなると非常に増える. しかも素点 p の標数 p が $p < 2g+2$ のときが 難しい. しかし、半安定 (後述) な特異ファイバーに限ると g の様子は比較的良好に分かる. 一般の C/K に対して K の適当な有限次拡大体 (Galois にとる) L をとれば $C_L = C \times_K L$ は高々半安定な特異ファイバーをもつようになっている (安定還元定理) から K 上で C を知ることは L 上の C_L と、拡大 L/K との関係 (具体的には $\text{Gal}(L/K)$ の p -慣性群の C_L への作用) を知ることに帰着される. このような視点に立た、但し $p > 2g+2$ のとき、特異ファイバーの研究が 西独マンハイム大学の Popp 教授の助手であった E. Viehweg の学位論文である.¹¹⁾ このアイデアは後に base space が高次元の場合に拡張され、飯高式分類理論 における加法予想 $C_{n,n-1}$ の証明に用いされた.

9) J.-M. Fontaine, Il n'y a pas de variété abélienne sur $\mathbb{Z}$, *inventiones* 81, 1985, 515-538

10) G. Faltings, Endlichkeitsätze für abelsche Varietäten ..., *inventiones* 73, 1983, 349-366.

11) E. Viehweg, Invarianten der degenerierten ..., *Journal für Math.*, 293/294, 1977, 284-308.

以下 $g(C) \geq 1$ とする. C/k の極小モデル $\pi: X \rightarrow B$ が y で "bad reduction" をもつとして今 X_y のみに注目したい. K の y での完備化 K_y は局所体、即ち剰余体が有限体、であるから K_y の最大不分岐拡大 K_y^{nr} へ基底変換をして B は剰余体が代数的閉体となる完備離散付値環の Spec としてよい.

C/k の極小モデル $\pi: X \rightarrow B$ が半安定 (semi-stable) であるとは π の各幾何学的ファイバーが極小で、各既約成分は高々通常2重点の特異性を持ち、これらの交点も通常2重点となっているものをいう. ファイバーの既約成分に非特異有理曲線 $E \subset \mathbb{P}^1$ がある場合は X の極小性から $E^2 \leq -2$ であるが、 $E^2 = -2$ となる $\mathbb{P}^1$ の連結成分は A_n -型の有理2重点の最小特異点解消の例外集合となっている. これらすべて blowing down して $\pi': X' \rightarrow B$ を得る: X' には A_n -型の有理2重点があるが π' の各幾何学的ファイバーはすべて安定 (stable) である. 即ち各ファイバーは高々通常2重点を特異性にもち、 X の成分に非特異有理曲線がある場合は X の上に少なくとも3つの特異点があるものとする. 2次元では特異点解消には最小のものが定まるから安定モデル (X' のこと) を考えることと半安定モデル (X のこと) を考えることは同値である.

但し基底変換に関しては事情が異なる. 安定モデルは "本当に安定" であるが半安定モデルは2重点のところで形が変わってしまう. 局所環で述べると $R[[u, v]]/(uv - \pi)$ (π は R の素元) が基底変換 $\pi = \pi''$ で $R'[[u, v]]/(uv - \pi'')$ (A_{n-1} -型) となる.

ここから K は一般の体とする. K 上定義された代数曲線 C にはヤコビ多様体 $Jac(C)$ とよばれるアーベル多様体と $Jac(C)$ での平行移動の不足性を除けば標準的な埋め込み写像 $f: C \rightarrow Jac(C)$ が付随する. $Jac(C)$ は K 上定義されており C に K 有理点があれば f も K 上定義される.

ここで Néron の極小モデルの復習をしたい.¹²⁾ R を離散付値環, L を R の商体, $R/\mathfrak{p} = k$ を剰余体とする. 今のところ k は全く一般の体でよい. A は L 上定義されたアーベル多様体とする. このとき次の性質をみたす R 上の正則な可換群スキーム $\mathcal{A}$ が存在して、同型を除いて一意である. (i) $\mathcal{A} \times_R L \simeq A$ (ii) R 上 smooth な任意のスキーム Y に対して $Y \rightsquigarrow Hom_R(Y, \mathcal{A})$ と $Y \rightsquigarrow Hom_L(Y \times_R L, A)$ は函数として同値. $\mathcal{A}$ を A/L の Néron モデルという.

$\mathcal{A}/R$ の閉ファイバー A_0 は k 上の可換群スキームである. もし A_0 が完備であれば A_0 は k 上のアーベル多様体で、このとき A は $\mathfrak{p}$ で "good reduction" をもつという. もし A_0 の単位元の連結成分 A_0° が準アーベル多様体、即ち k の適当な拡大体上で A_0° はアーベル多様体を代数的トーラス G_m^n で拡大したものに同型、となっているとき A は $\mathfrak{p}$ で安定還元 (stable reduction) をもつという.

以上の準備の下に Deligne-Mumford 並びに Raynaud の定理を述べることが出来る.

12) A. Néron, Modèles minimaux des variétés abéliennes ..., IHES N°21, 1964.

まず R は剰余体長が代数的閉体となる完備離散付値環とする。
 K を R の商体とし、 C を K 上非特異完備絶対既約な代数曲線で
 $g(C) \geq 2$ とする。このとき

(i) C の R 上の reduction が stable であることと $\text{Jac}(C)$ の reduction が stable であることは同値。

(ii) $\pi: X \rightarrow B$ を C/K の極小モデルで $X_g = \sum_{i=1}^n r_i C_i$ としたとき
 $\gcd(r_1, \dots, r_n) = 1$ ならば、 $\text{Jac}(C)$ の R 上の Néron モデルの単位元
の連結成分の閉ファイバーは $\text{Pic}^0(X_g)$ と同型¹³⁾ (X/B が安定
モデルのときは $\text{Pic}^0(X_g)$ は X_g/k の generalized Jacobian である。
 $k = \mathbb{C}$ ならこれは代数的アルバネーセ多様体として構成できる)

(iii) A/K をアーベル多様体とするとある有限次 Galois 拡大 K'/K
が存在して (K' は K 上完全不分岐で再び完備離散付値体となる)
 $A \times_K K'$ の reduction は stable とできる。

ここで (i) と (iii) を組み合わせれば代数曲線の安定還元定理を得る。

§3 虚数乗法をもつアーベル多様体

代数体 K が総虚であって、ある総実体 K^+ 上の二次拡大となるとき
 K を CM 体という。 K が CM 体のとき $[K:\mathbb{Q}] = 2n$ として、 n
個の無限素点 $\text{Hom}(K, \mathbb{C}) \ni \varphi_1, \dots, \varphi_n$ が互いに相異なり、かつ互に
複素共役でない、ように選べる。このとき $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ を CM 型という。
 $[K:\mathbb{Q}] = 2n$ の CM 体には丁度 2^n 種類の CM 型がある。

13) M. Raynaud, Spécialisation du foncteur de Picard, IHS 38 (1970), 27-76.

代表的な CM 体は 円分体 $\mathbb{Q}(\mu_N)$, $N \geq 3$ と 虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ である。
あるいは (複雑な) 数体 と 適当な 虚 2 次体の 合成 を とれば 一般に
アベル体でない CM 体と得ることが出来る。¹⁴⁾

体 K 上 定義された アベル多様体 A が 虚数乗法 を もつ とは、
ある CM 体 K で、 $[K:\mathbb{Q}] = 2 \dim A$ かつ $K \rightarrow \text{End}_K(A) \otimes \mathbb{Q}$ が 単射、
となるものが存在することという。例えば $K = \mathbb{C}$ のとき、CM 体 K
に 一つの CM 型 $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ と 一つの 分数イデアル $\mathfrak{a} \subset K$ が与えられたら、
写像 $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n): K \rightarrow \mathbb{C}^n$ による $\mathfrak{a}$ の 像 $\Phi(\mathfrak{a})$ は $\mathbb{C}^n$ 内の lattice
になることが知られていて $\mathbb{C}^n / \Phi(\mathfrak{a}) = A$ は K を 虚数乗法 に もつ
アベル多様体 (単なる複素トーラスではない!) となる。これを とりかえる
と もとの アベル多様体 と isogeny になる。しかし CM 型 $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ を
とりかえると 新しくできた アベル多様体 は 性質が 全く 変わってしまう
(例は後ででてくる)。

さて、虚数乗法 を もつ アベル多様体 A が 大域体 (つまり 代数体
又は 有限体上の 変数函数体) 又は 局所体 K 上 定義されている場合は
 K の 巡回拡大 上で A は いたる所 good reduction を もつ ように
できる、ことが Serre と Tate によて示され、¹⁵⁾ 後に F. Oort¹⁶⁾ により K の 剰余
体が 完全体 の 場合に 拡張された。

14) C-G. Schmidt, Arithmetik Abelscher Varietäten ..., Lect. Notes in Math. ¹⁹⁸⁴ 1082, Springer

15) J.-P. Serre and J. Tate, Good reduction of ..., Ann. of Math. 88, 1968, 492-517.

16) F. Oort, Good and stable reduction of ..., manuscripta 11, 1974, 171-197.

§4 フェルマ曲線について

$x^n + y^n = 1$ をアフィンモデルとする $\mathbb{Q}$ 上の代数曲線 F^n を n 次フェルマ曲線とよぶ. フェルマ曲線の特徴の一つに、自己同型群が非常に大きいということがある. 代数閉体 $\mathbb{Q}$ 上では F^n の自己同型は $\text{Pic}^0(F^n) \simeq \text{Jac}(F^n)$ の自己同型に自然に対応する. このことは $\text{End}_{\mathbb{Q}}(\text{Jac}(F^n))$ が大きいことを意味し、実際に $\text{End}_{\mathbb{Q}}(\text{Jac}(F^n)) \otimes \mathbb{Q}$ には $\mathbb{Q}$ 上定義された中等元が沢山ある.

ζ を 1 の原始 n 乗根とし、 $(x, y) \mapsto (\zeta^j x, \zeta^k y)$ から生じる F^n の自己同型を $\phi_{j,k}$ とする (j, k, r, s, a, b 等は $\text{mod } n$ で考える). F^n を $\mathbb{C}$ 上で考えると $H^0(F^n, \Omega^1)$ の基底として $\{\eta_{r,s}; 0 < r, s < n, r+s < n\}$ がとれる. 但し $\eta_{r,s} = x^{r-1}y^{s-1} \frac{dx}{y^{n-1}}$ とする. F^n には自明な $\mathbb{Q}$ 有理点があるから標準写像 $F^n \xrightarrow{\varphi} \text{Jac}(F^n)$, $\varphi(P) = (\dots, \int \eta_{r,s}, \dots) \text{ mod 周期}$ は $\mathbb{Q}$ 上定義される. $\phi_{j,k}$ は $\text{Jac}(F^n)$ の自己同型 $\lambda_{j,k}$ に延長されて、共に $\mathbb{Q}(\zeta)$ 上定義されている. $\{\lambda_{j,k}\} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上の指標 $\chi_{a,b}$ を $\chi_{a,b}(\lambda_{j,k}) = \zeta^{aj+bk}$ で定める. このとき

$$p_{a,b} := \sum_{j,k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \text{tr}_{\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}}(\chi_{a,b}(\lambda_{j,k})) \cdot \lambda_{j,k} \in \text{End}_{\mathbb{Q}}(\text{Jac}(F^n))$$

は $\mathbb{Q}$ 上定義された中等元で $n^2 = \sum_{(a,b)} p_{a,b}$ が成立つ. ここで $\sum_{(a,b)}$ は $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ が $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \curvearrowright t \cdot (a,b) = (ta, tb)$ で作用するときの各 orbit から代表元 (a,b) を選んで加えるものとする.¹⁷⁾

17) 文献 14) を参照.

$A_{a,b} = \text{pr}_{a,b}(\text{Jac}(F^n))$ といくと $A_{a,b}$ は $\mathbb{Q}$ 上の p -ヘルム多様体で $\text{Jac}(F^n)$ と $\prod_{(a,b)} A_{a,b}$ は $\mathbb{Q}$ 上で isogeny となっている. この事実
は $\text{Jac}(F^n)/\mathbb{Q}$ の Mordell-Weil rank を求める過程で D.K. Faddeev に
よって 1960 年に発見された.¹⁸⁾

さて, $F_{a,b}^n$ を $y^n = (-1)^c x^a (1-x)^b$, $a+b+c=0$, をアフィンモデルとする
 $\mathbb{Q}$ 上の代数曲線とする. $F_{a,b}^n$ を フェルマ曲線とよぶ人もいる. このとき
 $A_{a,b}$ は $\text{Jac}(F_{a,b}^n)$ と isogeny となる. p -ヘルム多様体の離散付値
環上の reduction が stable かどうかは isogeny によらないので $\text{Jac}(F^n)$
の安定還元を求める問題は 個々の $\text{Jac}(F_{a,b}^n)$ の安定還元を求める
ことに帰着される. 筆者は $n=p \geq 3$ の場合に初等的な方法で $F_{a,b}^p$
の安定還元を求めたが、独立に Coleman と McCallum が一般の n
について $F_{a,b}^n$ の安定還元を求めるアルゴリズムを見つけた. 一方、
McCallum は 1982 年に、 $n=p$ のときの $F_{a,b}^p$ の $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 上の極小モデル
を計算している.¹⁹⁾

以下 $F_{a,b}^p$ の安定還元から F^p の安定還元を求める方法をスケッチ
する. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ への $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ -orbit の代表元として $(a,b) = (1,1),$
 $(2,1), \dots, (p-2,1)$ がとれる. $F_{s,1}^p$ ($1 \leq s \leq p-2$) を C_s と用名記する.
各 C_s は 種数が $\frac{p-1}{2}$ で $\text{Jac}(C_s)$ は $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ に虚数乗法をもつ.
 s に応じて K に CM 型 が定まる.

18) D.K. Faddeev, Group of divisor classes on ..., Soviet Math. Dokl. 1, 1960, 1149-.

19) W. McCallum, The degenerate fiber of the Fermat curve, Prog. in Math. 26, 1982, 57-70.

F^n の射影モデル $X^n + Y^n + Z^n = 0$ には X, Y, Z の置換として 3 次対称群 $\mathcal{S}_3$ が作用していることに注意すると、集合 $\{C_1, \dots, C_{p-2}\}$ に $\mathcal{S}_3$ が作用していることが分かる。実際、 $s \in \mathbb{F}_p - \{0, 1\}$ の元と考えると、 $s \mapsto \frac{1}{s}$, $s \mapsto 1-s$ が $\mathcal{S}_3$ を生成する。 $\frac{1}{s}$ を代表する整数 $\langle \frac{1}{s} \rangle$ を $1 \leq \langle \frac{1}{s} \rangle \leq p-1$ とすると、 $C_1, C_{\langle \frac{1}{p-2} \rangle}, C_{p-2}$ は全て $\mathbb{Q}$ 上で超楕円曲線 $y^2 = 4x^{p-1}$ に同型である。 $\{C_1, \dots, C_{p-2}\}$ の $\mathcal{S}_3$ -orbit には元の個数が 6, 3, 2 のものがある。上の例は 3 元-orbit の例である。2 元-orbit については、 $p \equiv 1 \pmod{3}$ のとき $s^2 + s + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ に整数根 ω_1, ω_2 が存在し、 $\{C_{\omega_1}, C_{\omega_2}\}$ が 2 元-orbit である。実は $\text{Jac}(C_{\omega_i})$ は $\mathbb{Q}$ 上で 3 個の互に isogeny な p -ヘルム多様体の直積に isogeny で分解する。

また、McCallum によると、 s が $(s+1)^p - s^p - 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$ の解になっているとき C_s は Hasse の意味で tame, そうでないとき wild である。2 元 orbit の C_ω はいつも tame であるが、そうでない (非自明な) tame な C_s が不思議な分布をして存在する。²⁰⁾ この s は CM 型が変化する、同じ CM 体と虚数乗法にもっていても性質が異なる、ことの例となっていることに注意する。

さて、 C_s は $k_s = \mathbb{Q}(\sqrt{1-\zeta_p}, \sqrt[p]{\frac{s^p}{(s+1)^{p+1}}})$ まで持ちあげると、 u を所 good な reduction とし p 上の reduction は Artin-Schreier 型の超楕円曲線 $v^2 = u^p - u$ となることが分かる。 $k_s, s=1, \dots, p-2$ の合成体を k とすれば、 k 上で $\text{Jac}(F^p)$ と F^p の安定置元が得られる

20) REDUCE を使って計算することができる。

はずである。

Hurwitz の種数公式' を用いると $F^p \rightarrow C_s$, $(x, y) \mapsto (x^p, x^s y)$ は p 次の不分岐 p -fold であり、これらと自然に可換な $Jac(F^p) \rightarrow \prod_{s=1}^{p-2} Jac(C_s)$ は p 次の isogeny となることが知られている。これを $\mathbb{C}_k$ 上の極小モデル、Néron モデルにのぼして、 $\mathbb{A}^1$ での閉ファイバーを考察する。

$Jac(F^p)$ は k 上でいたる所 good reduction であるから F^p の p -fold の reduction (以下 $-$ で表す) $\overline{F^p}$ は compact 型、即ち双対グラフは木型である。もし F^p が p 上 good なら H. Lange の結果²¹⁾ により

$F^p \rightarrow \overline{C_s}$ は p 次の不分岐写像となる。しかるに Artin-Schreier 型の超楕円曲線の p -rank は零であるから、このような写像は存在しない。 $\overline{F^p}$ は、従って、非特異ではない。 $\overline{F^p}$ から各 $\overline{C_s}$ への射影が全射であることから $\overline{F^p}$ には少なくとも $p-2$ 個の、算術種数は小さくとも $\frac{p-1}{2}$ の、成分があることが分る。 $\overline{F^p}$ の算術種数が $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ であることを考慮すると $\overline{F^p}$ には各 $\overline{C_s}$ ($s=1, \dots, p-2$) と同型の成分 $\overline{F_s^p}$ が一つずつあり、その他は有理曲線であることがわかる。

一方 $C_s: y^p = x^s(1-x) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ が $y \mapsto \zeta y$ で作用し、これを極小モデルへ延長して $\overline{C_s}$ に制限すると、 $\overline{C_s}: v^2 = u^p - u$ には $u \mapsto u+1$ で作用する。この作用は $u=0$ のみを固定点とする。非特異曲線と同様に、安定曲線 C の自己同型は $\text{Pic}^0(C)$ の自己同型 $\wedge$ であることが知られている。今 $\text{Pic}^0(\overline{F^p})$ は $\overline{Jac(F^p)}$ と等しいから、 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は

21) H. Lange, Kurven mit rationalen Abbildung, Journal für Math. 295, 1977, 80-115

各 s 毎に $\overline{F}^s$ に作用し、成句 $\overline{F}^s$ 上で無限遠点を固定点にもつことが分かる。このことから各 $\overline{F}^s$ は $\text{Jac}(\overline{F}^P)$ 内では無限遠点のみを共通点として交わっていることが分かるのでこの点を P とする。各 $\overline{F}^s$ は P において transversal に交わっていることから $\text{Jac}(\overline{F}^P)$ への写像で blowing down した $\overline{F}^P$ の有理曲線成句は唯一つであって、各 $\overline{F}^s$ の無限遠点を通るものに限ることがわかる。

§5. おわりに.

整数論への応用は別の機会にしたいと思います。Coleman と McCallum は $F_{q,b}$ の安定置元を用いて Jacobi Sum Hecke Character の conductor の計算をしていますか。東大の加藤和也 さんが別の方法で conductor を求めています。この同じシンポジウム の報告をどうぞ下さい。

IX 上