

防御的配置問題に対するタブー探索法の応用

広島大学大学院工学研究科 宇野 剛史 (Takeshi Uno)
広島大学大学院工学研究科 坂和 正敏 (Masatoshi Sakawa)
Graduate School of Engineering, Hiroshima University

1 はじめに

競合施設配置問題は他の施設との競合関係を考慮して配置する必要がある施設に対する最適配置問題である。競合施設配置問題で一般に扱われている施設は店舗等の商業施設であり、その数理解的研究は Hotelling [6] によって提案された配置モデルを先駆とする。Hotelling は、施設の潜在的利用者が存在する領域を線分上と仮定した市場において、競合する複数の施設が利用者から獲得可能な購買力の最大化を目的として各々その位置を何度でも変更可能な状況における連続型配置モデルを考察した。また、Wendell 等 [10] は、施設の潜在的利用者が存在する領域を「需要点」と呼ばれる空間内の有限個の点上に限定し、これらの需要点を結ぶことによって構成されたネットワークを市場と仮定した。このような市場において、各企業が施設をこれらの点上にのみ配置可能な状況下における離散型配置モデルの考察を行った。これら 2 つのモデルのように、施設配置モデルは配置可能な領域に応じて連続型または離散型に分類される。離散型すなわちネットワーク上の競合施設配置問題の研究の詳細については、Miller 等 [7] の文献が詳しい。本研究では、離散型すなわちネットワーク上の施設配置問題について考察する。

上記の競合施設配置問題では、全施設の最適配置が Nash 均衡によって表される。これに対して、Hakimi [4] はネットワーク上の競合施設配置モデルにおいて、意思決定者が後から配置される競合施設を考慮した上で施設を配置する最適配置問題を考察した。この問題における全施設の最適配置は Stackelberg 均衡によって表される。本研究では、最適配置が Stackelberg 均衡によって表される施設配置問題について考察する。

上記の商業施設配置モデルに対して、別の競合環境を扱った配置モデルが宇野等 [9] によって提案された。このモデルでは、防衛者が競合相手である侵略者の存在を考慮した上で防衛施設を配置する状況が扱われており、防御的配置モデルと呼ばれる。防御的配置モデルの応用例として、敵国の侵略に対する防衛基地の配置、山火事に対する消防施設の配置、サッカーにおける各選手のポジションの決定やディフェンス・フォーメーションの選択等が挙げられる。防御的配置モデルの応用において、一般に防衛者は侵略者の戦略が不確定な状況で防御施設を配置する必要がある。宇野等 [9] は防衛者を先手プレイヤー、侵略者を後手プレイヤーとおくことにより、防衛者の最適配置を Stackelberg 均衡解と定義することで、防衛する必要がある領域がネットワークとして表される場合の防御的配置問題を定式化した。定式化された配置問題は NP 困難であることから、宇野等は多次元ナップサック問題に対する遺伝的アルゴリズム [3, 8] を応用することで、近似的に最適配置を

導出することを提案した。しかし、数値実験の結果、一部の数値例については局所解に陥ってしまうことが分かった。

本研究では、ネットワーク上の防御的施設配置問題に対して、別の発見的解法を応用することで効率的に最適配置を導出可能であることを提案する。タブー探索は Glover [2] によって提案された近似解法の一手法であり、ナップサック問題 [5] などの組合せ最適化問題に対する有効性が示されている。本研究では、タブー探索法を防御的施設配置問題に応用し、いくつかの数値例に対して得られた結果を遺伝的アルゴリズムと比較することでその有効性を示す。

本論文の構成は以下の通りである。第2章では、ネットワーク上における防御的施設配置問題の定式化を行い、与えられた施設配置に対して目的関数値を求めるアルゴリズムについて述べる。第3章では、防御的施設配置問題に対してタブー探索法を応用した解法アルゴリズムについて説明する。提案したアルゴリズムの有効性を検証するために、第4章で数値例に適用しその計算結果を示す。最後に、第5章で結論について述べる。

2 防御的施設配置モデル

2.1 問題の定式化

防衛者が防衛する必要のある領域をネットワークとして $G_D \equiv (V_D, E_D)$ と表す。ここで、 V_D 及び E_D は各々ネットワーク G_D 内における点または枝の集合である。 V_D 内の点の数を n とおき、 E_D 内の枝の数を m とおく。以下では、 $V_D \equiv \{1, \dots, n\}$ として表されるものとする。この施設配置モデルにおいて、防衛者は V_D 内のある一点にできるだけ侵略者を近づけないようにすることを目的として防御施設を配置する。以下ではこの点を「目標点」と呼び、 $c \in V_D$ で表す。

本研究では、侵略者の存在する領域を「侵略点」と呼び、ネットワーク G_D に対して隣接するノード r で表す。侵略点 r と V_D 内の点とを結ぶ枝の集合を E_r とおく。また、 $V \equiv V_D \cup \{r\}$, $E \equiv E_D \cup E_r$ とおき、ネットワーク全体を $G \equiv (V, E)$ で表す。枝 $e \in E$ に付随する重みを $w_e > 0$ とおく。ここで、 w_e は枝 e に付随する2点間の距離を意味する。点 $v \in V$ から目標点までの距離を、最短経路を通った時の枝に付随する重みの総和として定義し、距離を d_v とおく。

次に、この施設配置モデルのプレイヤーである防衛者と侵略者の戦略について述べる。この施設配置モデルにおいて、侵略者は目標点 c にできるだけ近づくことを目的として経路を選択する。よって、侵略者の戦略は侵略点 r から目標点 c までの経路として表される。侵略者の経路は点 r, c を両端点とするアークの一つとなると仮定することができ、侵略点 r から目標点 c までの経路の集合を SI とおく。侵略者の選択した経路 $p \in SI$ に対して、侵略者が l 番目に経由した点及び枝を、各々 $v_p^l \in V_D$, $e_p^l \in E$ とおく。侵略者はネットワーク G 内で移動可能な距離の上限が与えられていると仮定する。この上限を「侵略者の能力」と呼び、侵略点 r での侵略者の能力を $\bar{\alpha} > 0$ とおく。一方、防衛者は V_D 内の各点に高々一つの防御施設を配置可能であると仮定する。防御施設は侵略者が配置されている点

を通過する際に侵略者の能力をある値だけ減らすことができると定義する. この値を「施設の能力」と呼び, $\beta > 0$ とおく. 点 $v \in V_D$ に対して, 防衛者がその点に防御施設を配置したか否かを表す 2 値変数を $q_v \in \{0, 1\}$ とおく. このとき, 防衛者の戦略は V_D 内の各点に対する施設配置として表され, $\mathbf{q} \equiv (q_1, \dots, q_n)$ とおく. 防衛者が防御施設を配置する際, 建設費等の制約条件が考えられる. 本研究では, 制約条件が線形で与えられる場合について考察する. 制約条件が k 個存在する場合について, $j \in \{1, \dots, k\}$ 番目の制約条件の点 i に関する係数を $A_{ij} > 0$ とおき, $\mathbf{A}_i \equiv (A_{i1}, \dots, A_{ik})^T$, $\mathbf{A} \equiv (\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n)$ とおくことで制約条件の左辺行列を表す. また, j 番目の制約条件の上限値を $b_j > 0$ とおき, k 次行ベクトル $\mathbf{b} \equiv (b_1, \dots, b_m)^T$ で制約条件の右辺ベクトルを表す. このとき, 防衛者の実行可能集合は以下のように表される:

$$SD \equiv \{\mathbf{q} \in 2^n \mid \mathbf{A}\mathbf{q} \leq \mathbf{b}\}. \quad (2.1)$$

防衛者及び侵略者の戦略を, 各々 $\mathbf{q} \in SD$ 及び $\mathbf{p} \in SI$ とおく. 施設配置 $\mathbf{q}$ に対して, 枝 e に付随する点に配置されている防御施設の数 $N(e, \mathbf{q}) \in \{0, 1, 2\}$ とおく. このとき, 任意のアーキはアーキ内の全ての点に対して二つの付随する枝を持つことから, 施設配置 $\mathbf{q}$ に対する枝 e の重みは以下のように表される:

$$w_e^{\mathbf{q}} = w_e + \beta \cdot \frac{N(e, \mathbf{q})}{2}. \quad (2.2)$$

また, 侵略者が戦略 $\mathbf{p}$ に基づいて L 番目に経由する点 v_p^L における侵略者の能力を以下のように表す:

$$\alpha(v_p^L \mid \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \bar{\alpha} - \sum_{l=1}^L w_e^{\mathbf{q}}. \quad (2.3)$$

侵略者は $\alpha(v_p^L \mid \mathbf{p}, \mathbf{q}) \geq 0$ をみたす点 v_p^L に到達可能であるとする. このとき, 侵略者の効用関数を以下のように与える:

$$U_I(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv -\min_{v \in \mathbf{p}} \{d_v \mid \alpha(v \mid \mathbf{p}, \mathbf{q}) \geq 0\}. \quad (2.4)$$

また, この施設配置モデルを 2 人ゼロ和 Stackelberg 均衡ゲームとして表すものとし, 施設配置 $\mathbf{q}$ に対する侵略者の最適戦略の一つを以下のようにおく:

$$\mathbf{p}^*(\mathbf{q}) \in \arg \max_{\mathbf{p} \in SI} U_I(\mathbf{p}, \mathbf{q}). \quad (2.5)$$

このとき, 防衛者の効用関数は以下のように与えられる:

$$U_D(\mathbf{q}) \equiv -U_I(\mathbf{p}^*(\mathbf{q}), \mathbf{q}). \quad (2.6)$$

以上より, 防御施設配置問題は以下の最適化問題として定式化される:

$$\text{Minimize} \quad U_D(\mathbf{q}) \quad (2.7)$$

$$\text{Subject to} \quad \mathbf{q} \in SD. \quad (2.8)$$

2.2 施設配置に対する目的関数値の導出

問題 P においてある施設配置に対する目的関数値を求めるためには、その施設配置に対する侵略者の最適応答を導出する必要がある。侵略者の最適応答は以下の二つを求めることにより導出可能である。

1. V 内の任意の点から目標点 c までの距離
2. 施設配置が決定された時点で、侵略点 r から V 内の任意の点まで移動した時の侵略者の能力

番号 1,2 共に最短経路問題として表すことができ、ダイクストラ法を用いることで導出可能である。すなわち、番号 1 は施設が全く配置されない場合、すなわち任意の枝 $e \in E$ における重みが $w_e^{(e, \dots, 0)} = w_e$ で与えられるネットワーク上における最短経路問題であり、番号 2 は決定された配置 $q \in SD$ に対して枝 e の重みが w_e^q で与えられるネットワーク上における最短経路問題である。ダイクストラ法の詳細については、Cormen [1] の文献が詳しい。

フィボナッチ・ヒープを用いたダイクストラ法の計算量は、 $O(m + n \log n)$ で与えられる [1]。従って、実行可能な施設配置の数を η とおくと、問題 P において厳密解を導出するのに必要な計算量は $O((1 + \eta)(m + n \log n))$ として与えられる。一般の防御的施設配置問題では η は n に対して指数的に増加するので、厳密解を導出することは困難である。宇野等 [9] は、多次元ナップサック問題に対する遺伝的アルゴリズム [3, 8] を応用することで、防御的施設配置問題の近似解を導出することを提案した。しかし、数値実験の結果、一部の数値例については局所解に陥ってしまうことが分かった。次章では、より精度の高い発見的解法を提案する。

3 タブー探索法に基づく近似アルゴリズム

n 次元ベクトルについて、 $t^1 \equiv (1, 0, \dots, 0), \dots, t^n \equiv (0, \dots, 0, 1)$ とおく。以下の定理は、問題 P の性質を述べたものである。

定理 1 二つの施設配置 $q^1, q^2 \in SD$ が、点 $i \in V_D$ について $q^1 = q^2 + t^i$ をみたすとする。このとき、以下の関係式が成り立つ：

$$U_D(p^*(q^1), q^1) \leq U_D(p^*(q^2), q^2) \quad (3.1)$$

証明：式 (2.2) 及び (2.4) より明らかである。 ■

定理 1 より、防衛者は制約条件をみたす限り施設を多く配置した方が良いことが分かる。このことは、問題 P の最適解が実行可能集合 SD の境界付近に存在することを意味する。この性質は多次元 0-1 ナップサック問題に対しても当てはまり、Hanafi [5] は実行可能領域周辺を重点的に探すことで効率的に最適解を導出するタブー探索法を提案した。

本研究では、Hanafi の提案したアルゴリズムを基にして、防御的施設問題に特化した解法アルゴリズムを提案する。

タブー探索法は近傍探索法の一つであり、配置 q に対する近傍を $\mathcal{N}(q) \equiv \{\hat{q} \mid \hat{q} = q \pm t^i \in 2^n, i = 1, \dots, n\}$ で定義する。また、 $S_M \equiv \{\pm t^i \mid i = 1, \dots, n\}$ を「ムーブ集合」と定義し、 S_M 内の各要素を「ムーブ」と呼ぶ。現在の解からの一回の探索においてその解の近傍集合のみを調べ、与えられた評価関数の値が最も改善されるムーブによって次の解に移動する。タブー探索法では解の移動で選ばれたムーブはある一定期間選ばれないと仮定し、その期間を「タブー期間」と呼び、 T で表す。タブー期間内により選択不可能なムーブは「タブー」とであると定義し、タブー探索法の実行中に各ムーブに対するタブー期間が保存されるメモリを「タブーリスト」と呼ぶ。

以上のタブー探索法的前提を基に、Hanafi の提案した解法アルゴリズムについて述べる。ここで、Hanafi は評価関数として目的関数の他に、目的関数値の改善度を制約条件の実行可能性の向上度で割ることで与えられる関数を用いており、この関数を $\phi: S_M \rightarrow \mathbb{R}$ と表す。アルゴリズムの終了判定に用いられるパラメータを $N_z, N_{TD} > 0$ とする。

Hanafi の提案タブー探索法の概要

手順 0. (初期設定) タブーリストの初期化を行い、 $i = 0, s = FALSE, z = 0$ とする。べき集合 2^n からランダムに選ばれた解を初期解 q とする。もし $q \in SD$ ならば、 $s = TRUE$ として手順 5 へ行く。

手順 1. (TS_PROJECT : 実行不可能領域から有望領域へ解を移動) 評価関数 ϕ を用いて、現在解 q を近傍 $\mathcal{N}(q)$ 内のタブーでないムーブの中で最大値をとるムーブによって移動させる。この移動は q が SD 内に入るまで行われる。

手順 2. (アルゴリズムの分岐・終了判定) $i \leftarrow i + 1$ とする。もし $i \leq n$ ならば、手順 3 に行く。そうでないならば、 $i = 0, z \leftarrow z + 1$ とする。もし $z > N_z$ ならば、アルゴリズム終了。探索された解 q の中で最も目的関数値の良い解が、近似最適解として得られる。そうでないならば、もし $s = FALSE$ ならば、 $s = TRUE$ として手順 4 に行き、もし $s = TRUE$ ならば、 $s = FALSE$ として手順 6 に行く。

手順 3. (COMPLEMENT : 有望領域で解の近傍を集中的に探索) 現在解 q に対して、点 $i \in V_D$ で施設が配置されていなければ、施設を配置し、手順 1 に戻る。もし配置されていれば、施設を取り除き、手順 5 へ行く。

手順 4. (TS_DROP : 有望領域から実行可能領域内部へ解を移動) 評価関数 ϕ を用いて、現在解 q を近傍 $\mathcal{N}(q)$ 内のタブーでないムーブの中で最大値をとるムーブによって移動させる。この移動は N_{TD} 回だけ行われる。

手順 5. (TS_ADD : 実行可能領域内部から有望領域へ解を移動) 問題 P の目的関数を評価関数とし、現在解 q を近傍 $\mathcal{N}(q)$ 内のタブーでないムーブの中で最大値をとるムーブによって移動させる。この移動は q が SD 内に存在する条件の下で評価関

数値が改善される変数がなくなるまで行われる。上記の移動が終了すれば、手順 2 に戻る。

手順 6. (TS_INFEASIBLE_ADD : 有望領域から実行不可能領域へ解を移動) 問題 P の目的関数を評価関数とし、現在解 q を近傍 $\mathcal{N}(q)$ 内のタブーでないムーブの中で最大値をとるムーブによって移動させる。この移動は q がある与えられた終了条件が真となるまで行われる。上記の移動が終了すれば、手順 1 に戻る。

次に、Hanafi の提案タブー探索法を防御的施設配置問題に応用する際の改良点について述べる。Hanafi の提案タブー探索法では、アルゴリズム内の全ての現在解に対してそれらの近傍内の全ての解の目的関数値（または、その改善度）を導出している。ナップサック問題では目的関数値（または、その改善度）の導出が容易であるため、上記の事柄はアルゴリズム全体の計算時間には殆ど影響しない。しかし、問題 P を解く場合には目的関数値の改善度を導出するために目的関数値を求める必要があり、2.2 節より目的関数値を導出するための計算量が $O((1+\eta)(m+n \log n))$ で評価されるため、上記の事柄は計算時間の増加に大きく影響する。よって、タブー探索法のアルゴリズム内では、目的関数値を新たに導出する回数をなるべく減らす必要がある。

上記のタブー探索法では、決定変数を 1 から 0 へ減少させる手順 (TS_PROJECT, TS_DROP) と 0 から 1 へ増加させる手順 (TS_ADD, TS_INFEASIBLE_ADD) とに分類される。以下では、各々の場合について改良点を述べる。

(i) 現在解から施設を減らす場合、ムーブ $-t_i$ を選択したときの評価関数として、 ϕ の替わりに以下の関数を用いる：

$$\delta(-t_i) \equiv t_i \cdot a_i. \quad (3.2)$$

関数 δ は制約条件の実行可能性の向上度を表しており、容易に導出することができる。このとき、目的関数値の導出は現在解から次の解に移動した時のみ行う。関数 δ を評価関数として用いる場合には、タブー期間が短いと施設を除去する点の候補が少なくなるという問題点がある。よって、問題 P の解法として上記のタブー探索法を用いる場合には、タブー期間を長めに与える必要がある。

(ii) 現在解から施設を増やす場合、以下の定理が成り立つ：

定理 2 現在解 q で未配置の点 $i \in V_D$ に対して、侵略者の最適戦略 $p^*(q)$ が点 i を経由していないとする。このとき、施設配置 $q + t^i$ に対する侵略者の最適配置の一つは $p^*(q)$ であり、以下の関係式が成り立つ：

$$U_D(p^*(q + t^i), q + t^i) = U_D(p^*(q), q). \quad (3.3)$$

証明：定理 1 より、以下の式が成り立つ：

$$U_D(p^*(q + t^i), q + t^i) \geq U_D(p^*(q), q). \quad (3.4)$$

また、侵略者の最適戦略 $p^*(q)$ が点 i を経由していないことから、以下の式が成り立つ：

$$U_D(p^*(q), q + t^i) = U_D(p^*(q), q). \quad (3.5)$$

式 (3.4) より、このことは施設配置 $q + t^i$ に対する侵略者の最適侵略の一つが $p^*(q)$ であることを意味し、式 (3.3) が成り立つ。 ■

問題 P に適用するタブー探索法では、解の移動の際、施設配置だけでなくその配置に対する侵略者の最適侵略も記憶しておくものとする。このとき、定理 2 より、目的関数値の導出は現在解における侵略者の最適侵略で経由されている点についてのみ行うだけで十分である。

4 数値例

本章では、与えられた数値例に対して提案するタブー探索法を応用することで、提案手法の有効性について検証する。

ネットワークの規模について、 $n = 200$, $m = 1970$ とおく。各枝 e に付随する重み w_e は $\{1, \dots, 1000\}$ 内でランダムに与えられるとする。制約条件について、その数を 50 とする。左辺行列 A の各要素 A_{ij} は $\{1, \dots, 1000\}$ 内でランダムに与えられるとし、右辺ベクトル b の各要素 b_j は、 $[0.1, 0.2]$ 内でランダムに与えられた定数 θ_j によって以下のように表されるものとする：

$$b_j = \sum_{i=1}^n A_{ij} \cdot \theta_j. \quad (4.1)$$

さらに、侵略者及び施設的能力を、各々 $\alpha = 200$, $\beta = 50$ とおく。

次にタブー探索法内で用いられるパラメータについて述べる。前章の (i) の議論より、タブー期間は長めに与える必要があることから $T = 40$ とする。前章のアルゴリズム内の TS_DROP について $N_{TD} = 7$ とし、TS_INFEASIBLE_ADD 内における終了条件は、「全ての制約条件式が偽となる場合についてのみ真」であるとする。タブー探索法の終端条件について、 $N_z = 100$ とする。

さらに、比較手法として、2つの解法を用いる。一つはランダム法であり、計算時間 5000 秒以内でランダムに解を生成し、最も良い解を最適解とするものである。もう一つは、宇野等 [9] が用いた遺伝的アルゴリズムによる近似解法である。遺伝的アルゴリズムで用いるパラメータについて、世代数を 70 とし、最終世代数は 1000 とする。また、交叉確率・突然変異確率・逆位確率を、各々 0.25, 0.15, 0.15 とし、世代ギャップを 0.10, スケーリング係数を 1.6 とする。

上記の3つの解法に対する結果を表 1 に示す。ここで、タブー探索法及び遺伝的アルゴリズムについては、20 回実行した結果を載せている。表 1 より、タブー探索法は精度・計算時間の双方において他の2つの解法を上回っていることが分かる。また、ネットワークの規模及び制約条件数が同じでデータが異なる数値例についても実験を行ったが、いずれの計算結果においてもタブー探索法は他の2つの近似解法より短い計算時間で同程度

表 1: 計算結果

解法	タブー探索法	遺伝的アルゴリズム	ランダム法
最良値	104	85	80
平均値	99.2	83.4	-
最悪値	95	80	-
計算時間 (秒)	232.9	717.3	5000

以上の精度が得られた。以上のことから、防御的配置問題におけるタブー探索法が有効性が示された。

5 おわりに

本研究では、防御的配置問題に対して多次元 0-1 ナップサック問題との類似性を利用することで、タブー探索法の適用を提案した。タブー探索法において、現在解から次の解への移動について、計算時間の短縮を可能にする定理を導き、アルゴリズムを改良した。数値実験の結果から、精度及び計算時間について、遺伝的アルゴリズム及びランダム法に対する提案タブー探索法の優位性が示された。

参考文献

- [1] T. H. CORMEN, C. E. LEISERSON, R. L. RIVEST, Introduction to Algorithms, MIT Press (1990).
- [2] F. GLOVER, Future Paths for Integer Programming and Links to Artificial Intelligence, *Comput. Oper. Res.* (1986) 5, pp.533-549.
- [3] D. E. GOLDBERG, Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning, Addison Wesley (1989).
- [4] S. L. HAKIMI, On Locating New Facilities in a Competitive Environment, *European Journal of Operational Research* (1983) 12, pp. 29-35.
- [5] S. HANAFI, A. FREVILLE, An Efficient Tabu Search Approach for the 0-1 Multi-dimensional Knapsack Problem, *European Journal of Operational Research* (1998) 106, pp. 659-675.

- [6] H. HOTELLING, Stability in Competition, *The Economic Journal* (1929) **30**, pp. 41-57.
- [7] T. C. MILLER, T. L. FRIESZ, AND R. L. TOBIN, Equilibrium Facility Location on Networks, *Springer* (1996).
- [8] 坂和 正敏, 田中 雅博, 遺伝的アルゴリズム, 朝倉書店 (1995).
- [9] T. UNO, M. SAKAWA, Derivation of Stackelberg Equilibrium for Location Game about Defense, *Derivation of Stackelberg Equilibrium for Location Game about Defense* (Accepted).
- [10] R. E. WENDELL, R. D. MCKELVEY, New Perspective in Competitive Location Theory, *European Journal of Operational Research* (1981) **6**, pp. 174-182.