

## ある移流拡散方程式系の解の爆発

九州工業大学工学部 永井 敏隆 (Toshitaka Nagai)

### 1. 序論

細胞性粘菌の集合体形成の数学モデル (Keller and Segel [5]) である非線形偏微分方程式系を考える。

$$(1.1) \quad \frac{\partial a}{\partial t} = \nabla \cdot (D_1 \nabla a - \chi a \nabla \phi(b)) \quad (x \in \Omega, \quad t > 0)$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial b}{\partial t} = D_2 \Delta b + g(a, b),$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial a}{\partial n} = \frac{\partial b}{\partial n} = 0 \quad (x \in \partial\Omega, \quad t > 0),$$

$$(1.4) \quad a(x, 0) = a_0(x), \quad b(x, 0) = b_0(x) \quad (x \in \Omega).$$

ここで  $D_1, D_2, \chi$  は正定数、 $\Omega$  は  $R^N$  の有界領域で、境界  $\partial\Omega$  は滑らかとする。 $a(x, t)$  は場所  $x$ 、時刻  $t$  での細胞性粘菌の個体数、 $b(x, t)$  は誘引物質の濃度を表す。(1.1)において、 $-\nabla \cdot (\chi a \nabla \phi(b))$  は、誘引物質の濃度勾配による粘菌の移動を引き起こす項である。 $\phi(b)$  は  $\phi'(b) > 0$  ( $b > 0$ ) を満たす関数であり、sensitivity function と呼ばれている。(1.2)において、 $g(a, b)$  は、誘引物質の生成と消費を引き起こす項である。

定常問題については、次のことが研究されている。Schaaf [10] は分岐理論による取扱いを行い、定数定常解から分岐した空間非一様な定常解が安定 (不安定) となるための条件を与えた。Lin, Ni and Takagi [6] は、Schaaf の論文で取り扱われてない  $\phi(b) = \log b$  の場合を扱い、Mountain Pass Lemma を用いて次の興味ある結果を得た。ただし、 $g(a, b)$  は  $g(a, b) = -\gamma b + ka$  ( $\gamma, k > 0$ ) と与える。

$N = 1, 2$  の場合  $\chi > D_1$  で、 $N \geq 3$  の場合  $1 < \chi/D_1 < (N+2)/(N-2)$  とする。このとき、 $D_2/\gamma$  が十分小さいならば振幅の大きい非定数定常解が存在する。

更に、Ni and Takagi [8] は最小エネルギー解 (Mountain Pass Lemma を用いて得られた解) の形状について次の結果を得た。

$D_2/\gamma$  が十分小さいとき、最小エネルギー解が最大値を取る点  $P$  は唯一つで境界上にあり、 $D_2/\gamma \rightarrow 0$  のときこの解は  $\Omega$  内で 0 に収束する。

これらの結果は、一点に凝集する空間非一様な定常解の存在を示したものである。

$N \geq 3$  で  $\chi/D_1 = (N+2)/(N-2)$  の場合、Adimurthi and Yadava [1], Budd, Knaap and Peletier [3] は、 $\Omega$  を球とし、球対称な定常解の存在について考察している。一般の領域では、Pan, Ni and Takagi [9] が最小エネルギー解について  $\chi/D_1 < (N+2)/(N-2)$  の場合と同様のことを示した。

発展方程式の初期値問題 (1.1) – (1.4) の解の挙動については、 $\phi(b) = b$ ,  $g(a, b) = -\gamma b + ka$  の場合に、解の爆発が起こりえることが Nanjundiah [7], Childress and Percus [4] により予想されている。以下では、無次元化した次の系

$$(1.1)' \quad \frac{\partial a}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla a - a \nabla b) \quad (x \in \Omega, \quad t > 0)$$

$$(1.2)' \quad \varepsilon \frac{\partial b}{\partial t} = \Delta b - \gamma b + a.$$

を考える。ただし、 $\varepsilon$  と  $\gamma$  は正定数。

Nanjundiah は、空間次元と関係なく爆発は起こりえると予想したが、その後、Childress and Percus により次の予想がなされた。

- (i)  $N = 1$  のとき、爆発は起こらない。
- (ii)  $N = 2$  のとき、次を満たす正定数  $c$  が存在する。

$\int_{\Omega} a_0(x) dx / 2\pi < c$  の場合は、爆発は起こらない。 $\int_{\Omega} a_0(x) dx / 2\pi > c$  の場合は、有限時間  $T$  で爆発が起こりえる。 $t \rightarrow T$  のとき、 $a(\cdot, t)$  はデルタ関数に近づく。 $\Omega$  が球の場合、 $c = 4$  で与えられる。

- (iii)  $N \geq 3$  のとき、 $\int_{\Omega} a_0(x) dx$  の大きさにかかわらず有限時間で爆発が起こりえ、 $a(\cdot, t)$  はデルタ関数に近づく。

本稿では、方程式 (1.2)' において  $\varepsilon \rightarrow 0$  とした系

$$(1.5) \quad \frac{\partial a}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla a - a \nabla b) \quad (x \in \Omega, \quad t > 0)$$

$$(1.6) \quad 0 = \Delta b - \gamma b + a$$

$$(1.7) \quad \frac{\partial a}{\partial n} = \frac{\partial b}{\partial n} = 0 \quad (x \in \partial\Omega, \quad t > 0)$$

$$(1.8) \quad a(x, 0) = a_0(x) \quad (x \in \Omega).$$

を考え、領域  $\Omega$  と非自明な初期関数  $a_0(x)$  に次の条件 (A1), (A2) を課して上の予想を考察する。

(A1)  $\Omega = \{x \in R^N; |x| < L\}$ .

(A2)  $a_0$  は  $\bar{\Omega}$  上の滑らかな非負関数で、 $N \geq 2$  のときは、 $a_0(x) = a_0(|x|)$  (球対称)。

## 2. 主な結果

条件 (A1), (A2) の下で、問題 (1.5) – (1.8) の解  $(a(x, t), b(x, t))$  は滑らかな非負関数で、 $x$  について球対称と成る。解  $(a(x, t), b(x, t))$  の maximal existence time を  $T_{\max}$  とする。

$$a(\cdot, t), b(\cdot, t) \in L^\infty(\Omega) \quad (0 < t < T_{\max})$$

を満たし、 $T_{\max} < \infty$  ならば

$$\lim_{t \rightarrow T_{\max}} (\|a(\cdot, t)\|_{L^\infty} + \|b(\cdot, t)\|_{L^\infty}) = \infty$$

となる。また

$$\int_{\Omega} a(x, t) dx = \int_{\Omega} a_0(x) dx, \quad \int_{\Omega} b(x, t) dx = \frac{1}{\gamma} \int_{\Omega} a_0(x) dx \quad (0 < t < T_{\max})$$

を満たす。 $\theta$  と  $M_k(t) (k=0, 1, 2, \dots)$  を

$$\theta = \frac{1}{\omega_N} \int_{\Omega} a_0(x) dx, \quad M_k(t) = \frac{1}{\omega_N} \int_{\Omega} a(x, t) |x|^k dx$$

で定める。ただし、 $\omega_N$  は  $N-1$  次元球面の面積。 $E_\theta(s) (s \geq 0)$  を

$$(2.1) \quad E_\theta(s) = 2N(N-1)\theta^{2/N} s^{(N-2)/N} - \frac{N}{2}\theta^2 + NL^{-N}\theta s + C_\alpha \theta^{(2N-2+\alpha)/N} s^{(2-\alpha)/N}$$

で定める。ただし、

$$(2.2) \quad N=2 \text{ の時は、 } 0 < \alpha < 2 \text{ で } C_\alpha = \frac{\gamma L^\alpha}{\alpha e},$$

$$N \geq 3 \text{ の時は、 } \alpha = 0 \text{ で } C_\alpha = \frac{\gamma N}{2(N-2)}.$$

定理 1 (解の爆発)。  $N \geq 2$ ,  $E_\theta(M_N(0)) < 0$  とする。このとき、 $T_{\max} < \infty$  となり、 $t \rightarrow T_{\max}$  とすると

$$(i) \quad \|a(\cdot, t)\|_{L^\infty} \rightarrow \infty, \quad \|b(\cdot, t)\|_{L^\infty} \rightarrow \infty,$$

$$(ii) \quad a(\cdot, t) \rightarrow \int_{\Omega} a_0(x) dx \delta, \quad b(\cdot, t) \rightarrow \int_{\Omega} a_0(x) dx N(\cdot, 0) \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega)$$

となる。ただし、 $\delta$  は原点におかれた Dirac の  $\delta$ -関数で、 $N(x, y)$  は  $\gamma u - \Delta u = f$  in  $\Omega$ ,  $\partial u / \partial n = 0$  on  $\partial\Omega$  のグリーン関数、 $\mathcal{D}'(\Omega)$  は  $\Omega$  上の超関数の空間。

$N=2$  のとき  $\theta > 4$  ならば  $E_\theta(0) = \theta(4-\theta) < 0$ 、 $N \geq 3$  のとき  $E_\theta(0) = -N\theta^2/2 < 0$  より、次の定理 1 の系を得る。

系。  $N \geq 2$  で、 $N=2$  のときは  $\theta > 4$  とする。このとき、 $M_N(0)$  が十分小さいならば定理 1 の結果が成り立つ。

定理 2 (解の有界性)。  $N=1$ , または  $N=2$  で  $\theta < 4$  とする。このとき、問題 (1.5) - (1.8) の解は大域的に存在し、

$$\sup_{t \geq 0} (\|a(\cdot, t)\|_{L^\infty} + \|b(\cdot, t)\|_{L^\infty}) < \infty$$

を満たす。

### 3. 定理1の証明

補題1. 次の不等式が成り立つ。

$$\frac{d}{dt}M_N(t) \leq 2N(N-1)\theta^{2/N}\{M_N(t)\}^{(N-2)/N} - \frac{N}{2}\theta^2 + R(t) \quad (0 < t < T_{\max}).$$

ただし,

$$(3.1) \quad R(t) = \gamma N \int_0^L a(r, t) B(r, t) r^{N-1} dr.$$

証明. (1.5) に  $|x|^N$  を掛け  $\Omega$  上で積分し、Green の公式を用いると次を得る。

$$(3.2) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} a |x|^N dx \\ &= 2N(N-1) \int_{\Omega} a |x|^{N-2} dx - N \int_{\partial\Omega} a |x|^{N-2} (x \cdot \vec{n}) d\sigma + N \int_{\Omega} a (\nabla b \cdot x) |x|^{N-2} dx. \end{aligned}$$

ただし、 $\vec{n}$  は  $\partial\Omega$  での外向き単位法線ベクトルで、 $\cdot$  は  $R^N$  での通常の内積を表す。Hölder の不等式より、

$$(3.3) \quad \int_{\Omega} a |x|^{N-2} dx \leq \omega_N \{M_0(t)\}^{2/N} \{M_N(t)\}^{(N-2)/N} = \omega_N \theta^{2/N} \{M_N(t)\}^{(N-2)/N}$$

を得る。 $A(r, t)$  と  $B(r, t)$  を

$$A(r, t) = \int_0^r a(\rho, t) \rho^{N-1} d\rho, \quad B(r, t) = \int_0^r b(\rho, t) \rho^{N-1} d\rho$$

で定める。 $A(L, t) = \theta$ ,  $B(L, t) = \theta/\gamma$  を満たす。 $\nabla b \cdot x = r \partial b / \partial r$  と

$$0 = r^{N-1} \frac{\partial b}{\partial r} - \gamma B + A$$

より

$$(3.4) \quad \int_{\Omega} a (\nabla b \cdot x) |x|^{N-2} dx = -\omega_N \int_0^L a A r^{N-1} dr + \gamma \omega_N \int_0^L a B r^{N-1} dr$$

を得る。次に、 $a r^{N-1} = \partial A / \partial r$  と  $A(L, t) = \theta$  より

$$\int_0^L a A r^{N-1} dr = \frac{1}{2} \theta^2$$

が得られ、この関係式と (3.4) より

$$(3.5) \quad N \int_{\Omega} a (\nabla b \cdot x) |x|^{N-2} dx = \omega_N \left\{ -\frac{N}{2} \theta^2 + R(t) \right\}$$

を得る。従って、(3.2), (3.3) そして (3.5) より補題の証明を得る。

補題 2。  $R(t)$  は次のように評価される。

$$R(t) \leq NL^{-N}\theta M_N(t) + C_\alpha \theta^{(2N-2+\alpha)/N} \{M_N(t)\}^{(2-\alpha)/N} \quad (0 < t < T_{\max}).$$

ただし、 $\alpha$  と  $C_\alpha$  は (2.2) で与えられたもの。

証明。まず  $B(r, t)$  は

$$(3.6) \quad B(r, t) \leq \frac{\theta}{\gamma} \left(\frac{r}{L}\right)^N + w(r) \quad (0 < r < L)$$

と評価されることを示す。ただし、 $w(r)$  は次で与えられる。

$$w(r) = -\frac{\theta}{2} r^2 \log \frac{r}{L} \quad \text{if } N = 2,$$

$$w(r) = \frac{\theta L^{-N}}{2(N-2)} (L^N r^2 - L^2 r^N) \quad \text{if } N \geq 3.$$

(3.6) を示すために、次で定められた  $\Phi(r, t)$  を考える。

$$\Phi(r, t) = B(r, t) - \frac{\theta}{\gamma} \left(\frac{r}{L}\right)^N$$

各  $t > 0$  にたいして  $\Phi$  は

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{N-1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \gamma \Phi = -A + \theta \left(\frac{r}{L}\right)^N > -\theta \quad (0 < r < L),$$

$$\Phi(0, t) = \Phi(L, t) = 0$$

を満たす。一方、 $w(r)$  は

$$\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{N-1}{r} \frac{dw}{dr} - \gamma w = -\theta - \gamma w < -\theta \quad (0 < r < L),$$

$$w(+0) = w(L) = 0, \quad w(r) > 0 \quad (0 < r < L)$$

を満たす。従って、比較定理より、 $\Phi(r, t) \leq w(r) \quad (0 < r < L)$ 、すなわち (3.6) を得る。

次に、 $w(r)$  は

$$w(r) \leq \frac{\theta L^\alpha}{2\alpha e} r^{2-\alpha} \quad \text{if } N = 2 \text{ and } 0 < \alpha < 2,$$

$$w(r) \leq \frac{\theta}{2(N-2)} r^2 \quad \text{if } N \geq 3$$

と評価される。(3.6) とこの評価式より

$$R(t) \leq NL^{-N}\theta M_N(t) + C_\alpha \theta M_{2-\alpha}(t)$$

を得る。ただし、 $\alpha$  と  $C_\alpha$  は (2.2) で与えられたもの。Hölder の不等式を用いると

$$M_{2-\alpha}(t) \leq \theta^{(N-2+\alpha)/N} \{M_N(t)\}^{(2-\alpha)/N}$$

と評価され、補題の証明を得る。

補題 1 と補題 2 より、次の補題を得る。

補題 3. 微分不等式

$$\frac{d}{dt}M_N(t) \leq E_\theta(M_N(t)) \quad (0 < t < T_{\max})$$

が成り立つ。ただし、 $E_\theta$  は (2.1) で定められたもの。

定理 1 の証明。  $E_\theta(M_N(0)) < 0$  とせよ。  $E_\theta(s)$  は  $s$  について増加なので、補題 3 を用いると

$$T_{\max} < \infty, \quad M_N(t) > 0 \quad (0 \leq t < T_{\max}), \quad M_N(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow T_{\max})$$

が得られる。  $M_1(t) > 0 \quad (0 \leq t < T_{\max})$  で、  $M_1(t) \leq \theta^{(N-1)/N} \{M_N(t)\}^{1/N}$  より

$$(3.7) \quad M_1(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow T_{\max})$$

が示される。

$\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  とせよ。  $\phi(x)$  を

$$\phi(x) = \phi(0) + \sum_{i=1}^N x_i \psi_i(x) \quad (x \in \Omega)$$

と表す。ただし、 $\psi_i \in C_0^\infty(\Omega)$ 。この式に  $a(x, t)$  を掛け  $\Omega$  上積分して

$$\int_{\Omega} a(x, t) \phi(x) dx = \int_{\Omega} a(x, t) dx \phi(0) + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} a(x, t) x_i \psi_i(x) dx$$

を得る。この関係式において、  $\int_{\Omega} a(x, t) dx = \int_{\Omega} a_0(x) dx$  と (3.7) を用いることより

$$\int_{\Omega} a(x, t) \phi(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} a_0(x) dx \phi(0) \quad (t \rightarrow T_{\max})$$

が得られる。従って、次が得られる。

$$(3.8) \quad a(\cdot, t) \rightarrow \int_{\Omega} a_0(x) dx \delta \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega) \quad (t \rightarrow T_{\max}).$$

各  $t > 0$  に対して、  $b(\cdot, t)$  が Neumann 問題 (1.6) の解であることと (3.8) より

$$(3.9) \quad b(\cdot, t) \rightarrow \int_{\Omega} a_0(y) dy N(\cdot, 0) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega) \quad (t \rightarrow T_{\max})$$

を得る。ただし、  $N(x, y)$  は  $\gamma u - \Delta u = f$  in  $\Omega$ ,  $\partial u / \partial n = 0$  on  $\partial \Omega$  のグリーン関数。最後に、(3.8) と (3.9) より  $t \rightarrow T_{\max}$  とすると

$$\|a(\cdot, t)\|_{L^\infty} \rightarrow \infty, \quad \|b(\cdot, t)\|_{L^\infty} \rightarrow \infty$$

が得られる。

#### 4. 定理2の証明

解  $(a(x, t), b(x, t))$  の有界性を証明するのに、次の補題を用いる。補題は、Alikakos [2] による方法で証明される。以下、 $C$  は  $T_{\max}$  に依存しない正定数を表す。

補題4。  $\|\nabla b(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq C$  ( $0 < t < T_{\max}$ ) ならば

$$\|a(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq C \max\{1, \|a_0\|_{L^1}, \|a_0\|_{L^\infty}\} \quad (0 < t < T_{\max}).$$

定理2の証明。次の評価式

$$(4.1) \quad \|b(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq C, \quad \|\nabla b(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq C \quad (0 < t < T_{\max})$$

が示されれば、補題4を用いると  $T_{\max} = \infty$  となり定理の証明を得る。

まず  $N = 1$  の場合に (4.1) を示す。(1.6) を  $(-L, x)$  上積分することにより

$$(4.2) \quad |b_x(x, t)| \leq \int_{\Omega} a_0(x) dx \quad (x \in \Omega, 0 < t < T_{\max})$$

が得られる。次に、関係式

$$2Lb(x, t) = \int_{-L}^L b(y, t) dy + \int_{-L}^L \int_y^x b_x(z, t) dz dy, \quad x \in (-L, L)$$

に (4.2) を用いると

$$b(x, t) \leq \frac{1}{2L} \left( \frac{1}{\gamma} + 4L^2 \right) \int_{\Omega} a_0(x) dx$$

が示される。以上で、 $N = 1$  の場合に (4.1) を得る。

$N = 2$  と  $\theta < 4$  の場合に (4.1) を示す。 $u(\sigma, t)$  と  $v(\sigma, t)$  を

$$\sigma = r^2, \quad u(\sigma, t) = \int_0^r a(\rho, t) \rho d\rho, \quad v(\sigma, t) = \int_0^r b(\rho, t) \rho d\rho$$

で定める。 $u$  と  $v$  は次を満たす。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} + 2(u - \gamma v) \frac{\partial u}{\partial \sigma}, \quad (0 < \sigma < L^2, \quad 0 < t < T_{\max})$$

$$0 = 4\sigma \frac{\partial^2 v}{\partial \sigma^2} - \gamma v + u$$

$$u(0, t) = v(0, t) = 0, \quad u(L^2, t) = \theta, \quad v(L^2, t) = \frac{\theta}{\gamma}.$$

$w(\sigma)$  を  $w(\sigma) = 4k\sigma/(1+k\sigma)$  と定める。 $u(L^2, 0) = \theta < 4$  より、 $k$  を十分大きく取り

$$\theta < w(L^2), \quad u(\sigma, 0) \leq w(\sigma) \quad (0 \leq \sigma \leq L^2)$$

を満たすように出来る。このとき、 $w(\sigma)$  は

$$4\sigma \frac{d^2 w}{d\sigma^2} + 2(w - \gamma v) \frac{dw}{d\sigma} \leq 0 \quad (0 < \sigma < L^2),$$

$$w(0) = 0, \quad w(L^2) > \theta$$

を満たす。比較定理より、 $u(\sigma, t) \leq w(\sigma)$  ( $0 \leq \sigma \leq L^2$ ,  $0 \leq t < T_{\max}$ ) を得る。従って、

$$(4.3) \quad 0 \leq \frac{u(\sigma, t)}{\sigma} \leq \frac{w(\sigma)}{\sigma} \leq 4k \quad (0 < \sigma \leq L^2)$$

を得る。

次に、 $z(\sigma)$  を  $z(\sigma) = \ell\sigma$  で定める。 $\ell$  は

$$z(L^2) = \ell L^2 > \frac{\theta}{\gamma}, \quad \ell\gamma \geq 4k$$

を満たすように定める。ただし、 $k$  は (4.3) におけるもの。このとき、 $z(\sigma)$  は

$$4\sigma \frac{d^2 z}{d\sigma^2} - \gamma z + u \leq 0 \quad (0 < \sigma < L^2),$$

$$z(0) = 0, \quad z(L^2) > v(L^2, t)$$

を満たす。比較定理より、 $v(\sigma, t) \leq z(\sigma)$  ( $0 \leq \sigma \leq L^2$ ) を得る。従って、

$$(4.4) \quad 0 \leq \frac{v(\sigma, t)}{\sigma} \leq \ell \quad (0 < \sigma < L^2)$$

を得る。関係式

$$4 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \sigma \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) = 4 \frac{\partial v}{\partial \sigma} + \gamma v - u$$

を積分し、(4.4) と  $v(\sigma, t) \leq v(L^2, t) = \theta/\gamma$  を用いると

$$b(r, t) = 2 \frac{\partial v}{\partial \sigma}(\sigma, t) \leq 2 \frac{v(\sigma, t)}{\sigma} + \frac{\gamma}{2\sigma} \int_0^\sigma v(\xi, t) d\xi \leq \frac{1}{2}(4\ell + \theta)$$

が得られる。次に、関係式

$$r \frac{\partial b}{\partial r}(r, t) = \gamma v(\sigma, t) - u(\sigma, t)$$

に (4.3) と (4.4) を用いると

$$|\nabla b(x, t)| = \left| \frac{\partial b}{\partial r}(r, t) \right| = \sqrt{\sigma} \left| \frac{\gamma v(\sigma, t) - u(\sigma, t)}{\sigma} \right| \leq L(\ell\gamma + 4k) \quad (x \in \Omega, 0 < t < T_{\max})$$

となり、(4.1) を得る。

## 参考文献

- [1] Adimurthi and S. L. Yadava, Existence and nonexistence of positive radial solutions of Neumann problems with critical Sobolev exponents, Arch. Rational Mech. Anal. 115 (1991), 275–296.
- [2] N. D. Alikakos,  $L^p$  bounds of solutions of reaction–diffusion equations, Comm. Partial Differential Equations 4 (1979), 827–868.
- [3] C. Budd, M. C. Knaap and L. A. Peletier, Asymptotic behaviour of solutions of elliptic equations with critical exponents and Neumann boundary conditions, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 117 (1991), 225–250.
- [4] S. Childress and J. K. Percus, Nonlinear aspects of chemotaxis, Math. Biosci. 56 (1981), 217–237.
- [5] E. F. Keller and L. A. Segel, Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability, J. Theor. Biol. 26 (1970), 399–415.
- [6] C.-S. Lin, W.-M. Ni and I. Takagi, Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system, J. Differential Equations 72 (1988), 1–27.
- [7] V. Nanjundiah, Chemotaxis, signal relaying, and aggregation morphology, J. Theor. Biol. 42 (1973), 63–105.
- [8] W. -M. Ni and I. Takagi, On the shape of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem, Comm. Pure Appl. Math. 44 (1991), 819–851.
- [9] X.-B. Pan, W. -M. Ni and I. Takagi, Singular behavior of least-energy solutions of a semilinear Neumann problem involving critical Sobolev exponents, in preparation.
- [10] R. Schaaf, Stationary solutions of chemotaxis systems, Trans. Amer. Math. Soc. 292 (1985), 531–556.