

過 圧 密 粘 土 の 構 成 式

足 立 紀 尚 ・ 西 好 一

CONSTITUTIVE EQUATIONS FOR OVER-CONSOLIDATED CLAY

By Toshihisa ADACHI and Koichi NISHI

Synopsis

It has been emphasized to construct the general constitutive equations for soil materials in order to analyze three-dimensional boundary value problems. So far, however, most works on the constitutive equations for clays are mainly focused on normally consolidated clays, but only few can be found for over-consolidated state. In this study, we derived the constitutive equations for over-consolidated clays by extending Roscoe's original critical state energy theory to be able to explain more generally such mechanical properties of over-consolidated clays as strain-hardening and strain-softening deformation processes.

1. 序

Roscoe¹⁾ らが弾一塑性体として土質材料の構成式誘導に際し定義づけた状態曲面 (state surface) の内部, すなわち過圧密状態にある粘土の, とくに "Dry" 側の構成式に関する研究は少なく^{2),3)}, ただ軽く過圧密された粘性土については Roscoe-Burland⁴⁾ の議論が挙げられる。過圧密状態の粘土は Roscoe らの初期の理論によると, その状態曲面に応力状態が達するまでは弾性的挙動をすると仮定していたが, 過圧密粘土においても, そのせん断初期から無視できない塑性せん断ひずみが生ずることが実験的に明らかにされ, 上記の Roscoe-Burland の旧理論の検討もこの実験事実にもとづいている。

本研究は土質ならびに岩石質材料の弾一粘塑性体とした構成式の研究の一環として, 超過圧密粘土の体積変化特性に着目した考察を行い, その塑性降伏特性について議論を進め, その状態曲面内での塑性せん断変形ならびに体積膨張過程におけるひずみ硬化また軟化現象を説明できる弾一塑性体理論に基づいた過圧密粘土の構成式を導いたものである。

2. 過圧密粘土の体積変化特性

土質材料の体積変化を論ずる際通常設けられる次の仮定のもとで本研究においても議論を行う。

仮定 (1) 土質材料の体積変化 v は等方圧力に対する体積変化 $(v)_p$ とせん断応力による体積変化 (ダイレイタンス) $(v)_q$ の和として表わされる。すなわち,

$$v = (v)_p + (v)_q \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし, ここで p, q は下記のように定義される平均有効応力と軸差応力をそれぞれ表わし, この場合は軸対称の場合に限定しての記述である。

$$p = (\sigma_1' + 2\sigma_3')/3, \quad q = \sigma_1' - \sigma_3' \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに, σ_1' は有効最大主応力, σ_3' は有効最小主応力。

2.1 等方圧力による体積変化

Roscoe¹⁾ らによると **Fig. 1** に示すように, p_0 まで等方圧密された粘土はその状態に対応する f_0 なる初

期降伏面を有する。すなわち、その降伏面は次式で与えられる

$$f_0 = \eta - M \ln \frac{p_0}{p}, \quad v = v_0 - \kappa \ln \frac{p}{p_0} \quad \dots\dots (3)$$

ここに η は有効応力比 q/p を M は η の極限状態 (critical state) における値を v は体積ひずみを v_0 はその p_0 に対する値さらに κ は膨潤指数である。

正規圧密粘土の降伏面を Fig. 1 に示し、(3) 式で与えられるものと仮定すると、 p_0 から等方応力を減

少し膨潤させた過圧密粘土ではせん断応力 q を加えても f_0 に到達するまで塑性ひずみは生じないことになる。これは後述するように、この内部でもかなりのせん断応力による塑性変形が生じている実験結果と一致しない。しかし、Roscoe-Burland⁴⁾ の議論や排水せん断試験結果からみても f_0 の内部では等方応力 p による体積変化 $(v)_p$ はほぼ弾性的に挙動するものと仮定できる。

仮定 (2) 等方応力による体積変化は降伏曲面 f_0 の内側とその上で以下のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} f_0 < 0 : (dv)_p &= (dv)_p^e + (dv)_p^p = (dv)_p^e = \frac{-\kappa}{1+e} \frac{dp}{p} \\ f_0 = 0 : (dv)_p &= (dv)_p^e + (dv)_p^p = \frac{-\lambda}{1+e} \frac{dp}{p} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (4)$$

ここに、スーバスクリプトの P は塑性、 E は弾性成分を示し、また κ は膨潤指数、 λ は圧密指数を e は間げき比を、それぞれ表わしている。“Wet” と “Dry” 状態の定義づけは Fig. 1 に示すように降伏面 f_0 と極限状態線 (critical state line, 以下 C.S.L.) の交点から p 軸に垂直に下した線の左右として行う。

2.2 せん断応力による体積変化 (ダイレイタンスー)

仮定 (1) および (2) から初期降伏面 f_0 内部における体積変化は次のようになる。

$$dv = (dv)_p^e + (dv)_q = \frac{-\kappa}{1+e} \frac{dp}{p} + (dv)_q \quad \dots\dots (5)$$

この関係からダイレイタンスー量 $(dv)_q$ は $p =$ 一定試験を行うことにより求められるが、ここでは非排水せん断試験結果を用い、過圧密粘土のダイレイタンスー特性を検討してみる。非排水せん断過程では $dv=0$ の条件が成立するから (5) 式から直ちに

$$(dv)_q = + \frac{\kappa}{1+e} \frac{dp}{p} \quad \dots\dots (6)$$

したがって、ダイレイタンスー量 $(dv)_q$ は (6) 式によって算定できる。

過圧密比 (OCR) が 50, 30, 15, 6, 5, に対する非排水せん断試験結果^{2), 3), 5)} から求めた $(v)_e$ と有効応力比 η との関係を Fig. 2 に示してある。この図から明らかなことは、ある有効応力比までは OCR の値にかかわらず、顕著なダイレイタンスーが発生しないことであり、その有効応力比はその極限応力比 $\eta=M$ にほぼ等しいことである。それ以後は η の増大および減少に伴ない、たえず体積が膨張する方向でダイレイタンスーの発生がみられる。すなわち、体積膨張時

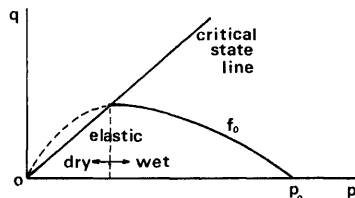


Fig. 1. Definitions for “Dry” and “Wet” states.

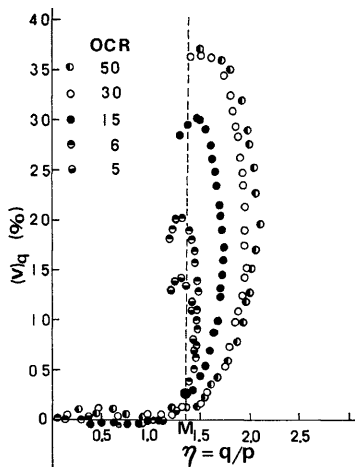


Fig. 2. Relation between effective stress ratio and plastic volumetric change for over-consolidated clay.

においてもひずみ硬化が生じており太田⁶⁾のダイレイタンスー理論から出てくる帰結と異なり、超過圧密粘土の理論的取り扱いを困難なものにしている理由でもある。**Fig. 3** は **Fig. 2** に用いた非排水せん断過程の有効応力経路を示すが、ほぼ $\eta=M$ 付近までは応力経路は q - 軸に平行である。このことは、(5) 式で $(dv)_q=0$ であって、 $p=p_i$ 一定の条件が $\eta=M$ まで保持されるということと等価である。

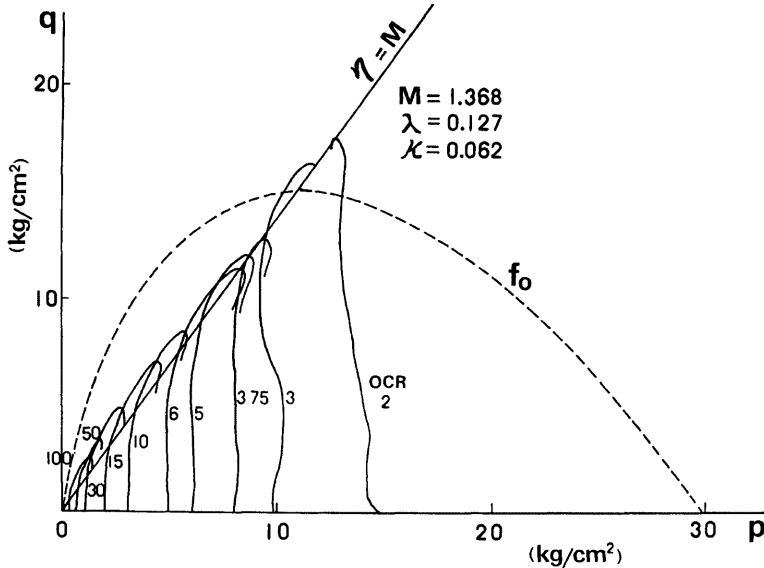


Fig. 3. Effective stress paths of "Dry" state under undrained triaxial compression.

以上は "Dry" 側の議論であるが藤本⁷⁾の実験結果を示す **Fig. 4** からは "Wet" 側では Roscoe らにより与えられた降伏面 f_0 まではやはりダイレイタンスーの発生が顕著ではない。すなわち、(5) 式より p —一定となって、 f_0 に到達するまで "Wet" 側の過圧密粘土の非排水せん断応力経路は q - 軸に平行となる。このことは Roscoe and Durland⁴⁾ らによっても議論され確かめられている。

これまでの議論によって、次の仮定を設ける。

仮定 (3) 過圧密粘土にはダイレイタンスー限界が存在し、その内部ではダイレイタンスーは生じない。また、その限界は "Wet" 側では Roscoe らによる初期降伏面、"Dry" 側では $\eta=M$, $v=v_0-\kappa \ln(p/p_0)$ である。さらに、この限界は試験条件によらず一つの Elastic Wall 内で一義的に決定されるものとする。

Fig. 5 には e - p - q 空間でのダイレイタンスー限界

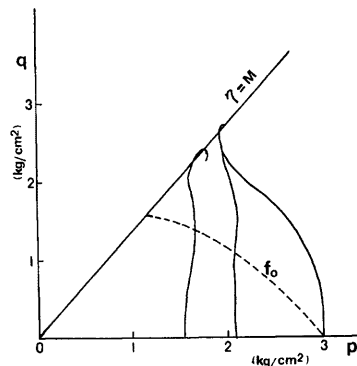


Fig. 4. Effective stress paths of "Wet" state under undrained triaxial compression.

曲面を示している。図中 $\overline{ac}$ は膨潤線, $\overline{af}$ は処女等方圧密曲線を表わし, $\overline{ab}$, $\overline{bdc}$ は $\overline{ac}$ を膨潤線としたときの Elastic Wall のダイレイタンスー限界線である。このように, e - p - q 空間で単一のダイレイタンスー限界曲面が決定できるが, なお, “Wet” 側のダイレイタンスー曲面は状態曲面 (state surface) と一致する。さらに次の仮定をもうける。

仮定 (4) せん断応力による体積変化はほとんど塑性的とみなし, その可逆成分は無視する。すなわち,

$$(dv)_q = (dv)_q^p + (dv)_q^r = (dv)_q^p \dots\dots\dots (7)$$

3. 降伏関数

降伏関数はそれがポテンシャル関数でもあるという, 弾-塑性理論における Associated Flow Rule にもとづくとするなら, Roscoe らと同様にエネルギー式を用いることによって Normality Rule とから決定することができる。

すなわち, エネルギー式は

$$q \cdot d\varepsilon^P + p \cdot dv^P = Mpd\varepsilon^P \dots\dots\dots (8)$$

Normality Rule は

$$dq \cdot d\varepsilon^P + dp dv^P = 0 \dots\dots\dots (9)$$

で与えられる*。これらの関係式と前節で述べた体積変化特性の議論から過圧密粘土の “Wet” 側と “Dry” 側の降伏関数が以下のように決定される。

3.1 “Wet” 側の降伏関数

“Wet” 側の初期降伏面 f_0 内ではせん断応力による体積変化, すなわち塑性体積変化は生じない。しかし, 応力状態が f_0 に達すると塑性体積変化が発生するから, 以下2つの場合に分けて論ずる。

(1) $f_0 < 0$; $dv = 0$ の場合

この場合には (9) 式からただちに,

$$dq \cdot d\varepsilon^P = 0$$

これより, 降伏関数は次式のように求まる。

$$f_1 = q - \kappa_1 = 0, \quad v = v_0 - \kappa \ln(p/p_0) \dots\dots\dots (10)$$

すなわち, 塑性体積成分を生じないということから, Von Mises 型の降伏関数が得られる。しかし, Fig. 6 に示すように p -軸に平行に無限に続くものではなく, 先行圧密圧力 p_0 で決まる降伏関数によって閉じる singular point を有する降伏面を形成する。

(2) $f_0 \geq 0$; $dv^P \neq 0$ の場合

この応力状態まで載荷が進むと, 前節の議論から f_1 と Fig. 7 に示すように Roscoe らによって与えられた降伏面 f_2 との交点に応力状態がのってくる。この場合には Koiter⁸⁾ によって一般化された流れ則の適用が必要となる。すなわち Fig. 7 に示される f_1 は (10) 式から, また f_2 は (2) 式によって次のように与えられる。

* ここに ε はせん断ひずみすなわち ($\varepsilon_1 - \varepsilon_3$) を表わしている。

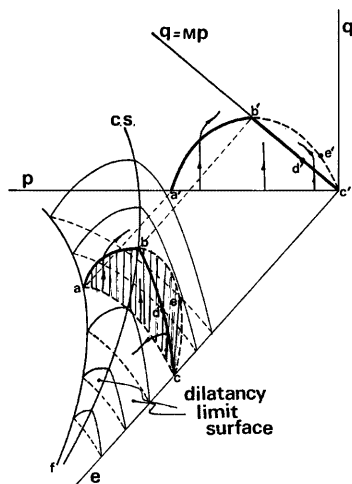


Fig. 5. Isometric view of dilatancy limit surface.

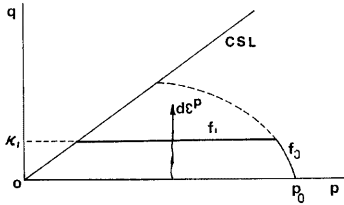


Fig. 6. Yield locus for deformation process without dilatancy.

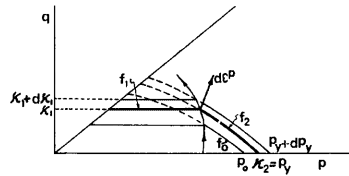


Fig. 7. Yield locus and singular point for "Wet" state.

$$\begin{aligned} f_1 &= q - \kappa_1, \quad v = v_0 - \kappa \ln(p/p_0) \\ f_2 &= \eta - M \ln \frac{\kappa_2}{\dot{p}}, \quad v = v_\gamma - \kappa \ln(\dot{p}/\dot{p}_\gamma) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに $\kappa_2 = p_y$ はひずみ硬化パラメータで v_y は処女圧密曲線上の p_y に対応する体積ひずみ。

3.2 “Dry” 側の降伏関数

“Dry” 側においては応力 q が Mp より小か大かによって、やはり 2 つの場合分けができる。

(1) $q \leq Mp$; $dv^P = 0$ の場合

この場合には塑性体積変化がないから 3.1 の (1) におけると同様に降伏関数は (10) 式となる。

$$f_1 = q - \kappa_1, \quad v = v_y - \kappa \ln(p/p_0) \dots\dots\dots (10)'$$

(2) $q > Mp$; $ev^P \neq 0$ の場合

この応力状態ではエネルギー式である (8) 式と Normality Rule を与える (9) 式から、次の降伏関数の微分方程式が求まる。

$$\frac{dp}{p} + \frac{d\eta}{M} = 0 \quad \dots\dots\dots(12)$$

この微分方程式を (10)' 式で与えられる降伏関数と接続させるという制約を与える $\eta = M$ で $q = \kappa_1$ なる条件のもとで解析すると、次式が与えられる。

$$\eta = M \left\{ 1 + \ln \frac{\kappa_1}{Mh} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

すなわち, “Dry” 側で塑性体積ひずみを伴う場合の降伏関数 f_3 は

$$f_3 = \eta - M \left\{ 1 + \ln \frac{\kappa_1}{M \rho} \right\}, \quad v = v_y - \kappa \ln(p/p_y) \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる。一般にひずみ硬化または軟化パラメータ κ_1 は塑性ひずみ ε_j^p の関数と考えられ、これらの点については以後の節で議論する。

3.3 e - p - q 空間での降伏関数の考察

過圧密粘土の体積変化特性を考察することによって、 e - p - q 空間において単一のダイレイタンスー限界曲面が存在することが明らかとなった。それは“Wet”では Roscoe らによる状態曲面として与えられ、“Dry”側では p - q 面に投影したときの極限状態線として表わされるような曲面であった。

Fig. 8 に示すように、Roscoe らの降伏曲面は膨潤線 $\bar{n}$ を基線とする Elastic Wall と状態曲面との交線として与えられる。しかし、ここではこの Elastic Wall 内でも無視できぬ塑性偏差ひずみが生じているという実験事実にもとづいて降伏曲面を考えた。すなわち、ダイレイタンスー限界線 $h-d-i-k-j$ 内では $\bar{d}k$ で表わされる降伏面、それを超えるところでは $r-e-s$ で表わされるような Singular point をもつ降伏曲面であり、“Dry” 側では $l-q-m$ で示される降伏曲面となる。状態経路 (stase path) は応力履歴や載荷経路に応じてこれらの曲面と動くことになる。例えば “Wet” 側にある点 c から出発すると Elastic

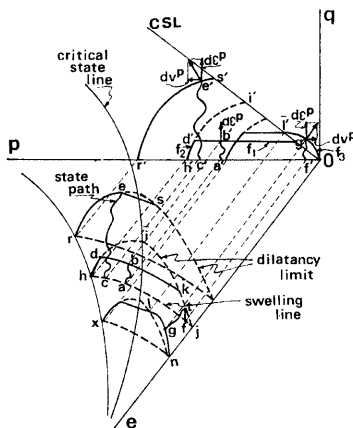


Fig. 8. Yield locus in e-p-q space.

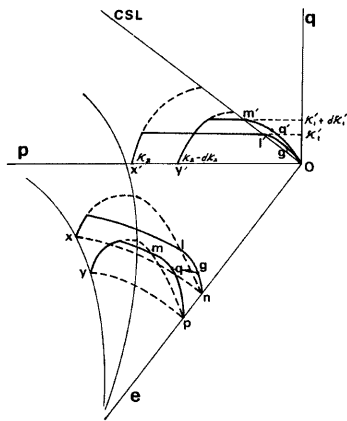


Fig. 9. Yield locus for "Dry" state in e-p-q space.

wall (ここではもはやこの術語は使用できないであろうが体積変化に関しては Elastic wall としての意味を有するからそのまま用いる) 面内を動き singular point d に達してから後は塑性体積圧縮を生じ、最終的に critical state に到達する。一方, "Dry" 側の f 点から出発すると "Wet" 側と同様に最初は Elastic wall 面内を動いて t 点に達し, そこから塑性体積膨張を伴って最終的には critical state に到る。"Dry" 側で留意すべきことは必ず硬化あるいは軟化過程にかかわらず, ダイレイタンスー限界を超えた時点から critical state に達するまで常に体積の膨張を伴って変形することである。すなわち, Fig. 9 に示すように q -軸上で与えた硬化あるいは軟化パラメター κ_1' (l 点に対応) が $\kappa_1' + d\kappa_1'$ (m 点に対応) へと変化したとき, p -軸上で与えられる硬化あるいは軟化パラメターは κ_2 (x 点に対応) から $\kappa_2 - d\kappa_2'$ (y 点に対応) へ移行する。 κ_2 は $e \sim p$ 座標上で規定されるパラメターであるが, κ_1' はむしろ $e \sim q$ 座標上で定義すべきパラメターであろう。これらを $p \sim q$ 座標へ投影したときにある関数関係をもって変化するものと考えると,

$$\kappa_1' = g(\kappa_2)$$

とおける。また κ_2 は Roscoe らによると次の関係がある。

$$\kappa_2 = h(v^P)$$

したがって, これらから κ_1' も塑性体積ひずみ v^P の関数と考えてもよいと思われる。すなわち,

$$\kappa_1' = g(h(v^P)) = g'(v^P) \quad \dots\dots\dots (15)$$

(15) 式での関数形は実験的に検討し求めるべきものである。

次節ではこれまで議論した降伏関数を用いて構成式を誘導する。

4. 過圧密粘土の構成式

前節までは p, q , ならびに e を用いて降伏関数に対する議論を行ったが, テンソル表示を用いて一般化して構成式の誘導を行う。

まず, (8) 式のエネルギー式は

$$\sigma_m' dv^P + s_{ij} \cdot de_{ij}^P = M^* \sigma_m' \sqrt{2I_2^P} \quad \dots\dots\dots (16)$$

Normality Rule は

$$d\sigma_{ij}' \cdot de_{ij}^P = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

で与えられる。ここに σ'_{ij} は有効応力成分, ε_{ij} はひずみ成分, $\sigma'_m = \frac{1}{3}(\sigma'_{kk})$ は有効平均応力, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}/3$ は偏差応力成分, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kk}\delta_{ij}/3$ は偏差ひずみ成分, $\sqrt{2J_2} = \sqrt{de_{ij}de_{ij}}$ は偏差ひずみ増分の第二不変量, さらに $M^* = (\sqrt{2J_2}/\sigma'_m)_{\text{at critical state}}$ であって, $\sqrt{2J_2} = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$ は偏差応力の第二不変量である。

(16), (17) 式と前節の議論にしたがうと $\sqrt{2J_2}-\sigma'_m$ 座標上で次の3つの降伏関数から成る閉じた降伏曲面が得られる。

$$f_1 = \sqrt{2J_2} - \kappa_1, \quad v = v_0 - \kappa \ln(\sigma'_m/\sigma'_{m0}) \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$f_2 = \frac{\sqrt{2J_2}}{\sigma'_m} + M^* \ln \left(\frac{\sigma'_m}{\kappa_2} \right), \quad v = v_y - \kappa \ln \frac{\sigma'_m}{\sigma'_{my}} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$f_3 = \frac{\sqrt{2J_2}}{\sigma'_m} + M^* \left\{ \ln \left(\frac{M^* \sigma'_m}{\kappa'_1} \right) - 1 \right\}, \quad v = v_y - \kappa \ln \frac{\sigma'_m}{\sigma'_{my}} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここにひずみ硬化あるいは軟化パラメータは $\kappa_1 = (\sqrt{2J_2})_y$, $\kappa_2 = \sigma'_{my}$ ならびに $\kappa'_1 = (\sqrt{2J_2})_y$ と表示されるが, とくに κ'_1 は前節で述べたように κ_2 とある関係を有している。

降伏関数が与えられると, 塑性体力学理論の Associated Flow Rule^{8),9)} によって次のように塑性ひずみ成分に対する構成式が求まることになる。すなわち,

(1) 滑らかな降伏曲面に対しては

$$d\varepsilon_{ij}^P = Q \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}; \quad Q = - \frac{(\partial f / \partial \sigma_{kl}) \cdot d\sigma_{kl}}{[\partial f / \partial \varepsilon_{ij}^P + (\partial f / \partial \kappa \cdot \partial \kappa / \partial \varepsilon_{ij}^P)] \partial f / \partial \sigma_{ij}} \quad \dots\dots\dots (21)$$

(2) Singular Point 上では

$$d\varepsilon_{ij}^P = \sum_{r=1}^m c_r Q_r \frac{\partial f_r}{\partial \sigma_{ij}}; \quad f_r < 0 \quad \text{or} \quad (\partial f_r / \partial \sigma_{ij}) d\sigma_{ij} < 0 \quad \text{なら} \quad c_r = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$f_r = 0 \quad \text{で} \quad (\partial f_r / \partial \sigma_{ij}) d\sigma_{ij} \geq 0 \quad \text{なら} \quad c_r = 1$$

4.1 “Wet” 側での構成式

3.1 節に対応させ, 2つの場合における構成式をそれぞれ求めるが, ここには塑性成分についてのみ論ずる。

(1) $f_0 < 0$; $dv^P = 0$ の場合

(18) 式と (21) 式からただちに次式が求まる。

$$d\varepsilon_{ij}^P = Q_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma'_{ij}} = Q_1 \frac{s_{ij}}{\sqrt{2J_2}}$$

$$Q_1 = - \frac{\frac{\partial f_1}{\partial \sigma'_{kl}} \cdot d\sigma'_{kl}}{(\frac{\partial \kappa_1}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \kappa_1}{\partial \varepsilon_{ij}^P}) \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{d(\sqrt{2J_2})}{\partial \varepsilon_{ij}^P \sqrt{2J_2}}} = \frac{d(\sqrt{2J_2})}{\frac{\partial \kappa_1}{\partial \sigma_{ij}} \frac{s_{ij}}{\sqrt{2J_2}}} \quad \dots\dots\dots (23)$$

したがって, 構成式は

$$d\varepsilon_{ij}^P = \frac{d(\sqrt{2J_2})}{\frac{\partial \kappa_1}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \frac{s_{kl}}{\sqrt{2J_2}}} \cdot \frac{s_{ij}}{\sqrt{2J_2}} \quad \dots\dots\dots (24)$$

として得られる。ひずみ硬化パラメータが塑性ひずみの関数として表わされると (24) 式は確定することになるが, この点は以下において考察を加える。また, (24) 式から

$$d\varepsilon_{kk}^P = dv^P = 0$$

で明らかに所定の条件を満たしている。

(2) $f_0 \geq 0$; $dv^P \neq 0$ の場合

(18), (19) ならびに (22) 式から

$$d\varepsilon_{ij}^P = Q_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} + Q_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}$$

足立ら¹⁰⁾によると右辺の第2項は

$$\Omega_2 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{(\lambda - \kappa)}{(1+e)M^*} \left[\frac{d\sigma'_m}{\sigma'_m} + \frac{d(\sqrt{2J_2})}{M^* \sigma'_m - \sqrt{2J_2}} \right] \left[(M^* - \eta^*) \frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{s_{ij}}{\sqrt{2J_2}} \right]$$

で与えられるから、(23)₂ とあわせ考えると次の構成式に求まる。

$$d\varepsilon_{ij}^P = \frac{d(\sqrt{2J_2})}{\frac{\partial \kappa_1}{\partial \varepsilon_{kl}} \cdot \frac{s_{kl}}{\sqrt{2J_2}}} \cdot \frac{s_{ij}}{\sqrt{2J_2}} + \frac{(\lambda - \kappa)}{(1+e)M^*} \left[\frac{d\sigma'_m}{\sigma'_m} + \frac{d(\sqrt{2J_2})}{M^* \sigma'_m - \sqrt{2J_2}} \right] \left[(M^* - \eta^*) \frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{s_{ij}}{\sqrt{2J_2}} \right] \dots (25)$$

ここに $\eta^* = \sqrt{2J_2}/\sigma'_m$ で、Fig. 10 に示すように塑性ひずみ増分の方は $O'N_1$ と $O'N_2$ の間に決定される。

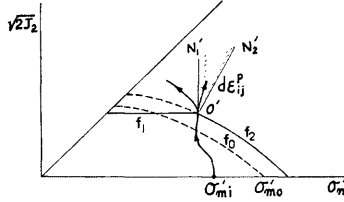


Fig. 10. Direction of plastic strain increment at a singular point.

4.2 “Dry” 側での構成

3.2 節に対応して、ここでも 2つの場合分けをして構成式を誘導する。

(1) $\sqrt{2J_2} < M^* \sigma'_m$; $dv^P = 0$ の場合

この場合には (18), (21) 式から (24) 式と同じように次式が構成式として与えられる。

$$d\varepsilon_{ij}^P = \Omega_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{d(\sqrt{2J_2})}{\frac{\partial \kappa_1}{\partial \varepsilon_{kl}} \cdot \frac{s_{kl}}{\sqrt{2J_2}}} \cdot \frac{s_{ij}}{\sqrt{2J_2}} \dots (26)$$

(2) $\sqrt{2J_2} \geq M^* \sigma'_m$; $dv^P \neq 0$ の場合

この場合には降伏関数 f_1 と f_3 が (12) 式からも明らかなように $\sqrt{2J_2}/\sigma'_m = M^*$ で $d(\sqrt{2J_2})/d\sigma'_m = 0$ となって、互いに滑らかに接続されるから、Singular point となる 4.2 節の (2) の場合と異なって、降伏関数 f_3 のみによって構成式の誘導がなされることになる。すなわち、(20), (21) 式から

$$d\varepsilon_{ij}^P = \Omega_3 \frac{\partial f_3}{\partial \sigma'_{ij}} = \Omega_3 \left[\frac{(M^* - \eta^*)}{\sigma'_m} \cdot \frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{1}{\sigma'_m} \frac{s_{ij}}{\sqrt{2J_2}} \right]$$

となる。さらに硬化あるいは軟化パラメーター κ_1' を (15) 式のように塑性体積ひずみ v^P の関数と考えたと (21)₂ 式より

$$\Omega_3 = - \frac{\frac{\partial f_3}{\partial \sigma_{kl}} \frac{d\sigma_{kl}}{\sigma_{kl}}}{\left(\frac{\partial f_3}{\partial \kappa_1'} \cdot \frac{\partial \kappa_1'}{\partial \varepsilon_{ij}^P} \right) \frac{\partial f_3}{\partial \sigma_{ij}}} = \frac{M^* d\sigma'_m + \sigma'_m d\eta^*}{(M^* - \eta^*) \frac{M^*}{\kappa_1'} \cdot \frac{\partial \kappa_1'}{\partial v^P}}$$

ここで、さらに

$$\left(\frac{M^*}{\kappa_1'} \right) \frac{\partial \kappa_1'}{\partial v^P} = F(v^P)$$

とおくと

$$\Omega_3 = \frac{M^* d\sigma'_m + \sigma'_m d\eta^*}{F(v^P)(M^* - \eta^*)}$$

と書ける。したがって求める構成式は

$$d\varepsilon_{ij}^P = \frac{M^* d\sigma'_m + \sigma'_m d\eta^*}{F(v^P)(M^* - \eta^*) \sigma'_m} \left[(M^* - \eta^*) \frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{s_{ij}}{\sqrt{2J_2}} \right] \dots (27)$$

(27) 式からただちに

$$d\varepsilon_{ij}^p = dv^p = M^* \frac{d\sigma'_m + \sigma'_m d\eta^*}{F(v^p)\sigma'_m} \quad \dots\dots\dots(28)$$

が求まり、これより次の関係式が誘導される。

$$F(v^p) dv^p = M^* \frac{d\sigma'_m}{\sigma'_m} + d\eta^* \quad \dots\dots\dots(29)$$

関数形 $F(v^p)$ は実験によって決定されるが、 $F(v^p)$ が応力 σ'_m 、 $\sqrt{2J_2}$ の関数として表わされると (27) の構成式は確定することになる。

なお、この場合には Fig. 11 示すように σ'_m - 軸上では $d(\sqrt{2J_2})_y$ の変化に伴って次の体積変化に相当するだけ、等方応力で表わされるひずみ硬化あるいは軟化パラメーター $-\sigma'_{my}$ に変化が生ずることになる。

$$dv^p = -\frac{(\lambda - \kappa)}{1 + e} \frac{d\sigma'_{my}}{\sigma'_{my}} \quad \dots\dots\dots(30)$$

“Dry” 側では通常体積膨張が生ずるから σ'_{my} は σ'_{m0} より小さな値へと変化することになる。

4.3 特定条件下の“Dry”側の粘土の挙動

以上求めた構成式の記述する“Dry”側の過圧密粘土の挙動を理解を容易にする目的で特定の条件で定性的に説明してみよう。

(1) 非排水せん断過程 ($e = e_i = \text{const.}$)

Fig. 12(a) に示すように σ'_{m0} で圧密した試料を $a(\sigma'_{mi}, e_i)$ 点まで膨潤させて、非排水条件で軸荷重のみ増大させるせん断試験を行うとする。この場合、偏差応力が増大してダイレイタンスー限界に達するまでは塑性体積ひずみならびに弾性体積ひずみも発生せずしたがって等方応力 σ'_m は変化しないから $\sigma'_m = \sigma'_{mi} = \text{const.}$ を保ち、せん断ひずみのみが増大してダイレイタンスー限界上の b 点に達する。その後偏差応力の増大に対しては塑性体積膨張が生ずるが、非排水条件のためにそれに見合う弾性体積圧縮が生ずるから等方応力は増大し、 $e - \sigma'_m$ 面内では $\overline{bc'}$ と σ'_m - 軸に平行に移動するが、塑性体積膨張がある値に達するまでは Fig. 2 からわかるように η^* は増大して c 点でその最大値を取る。その後は塑性体積膨張を伴いながら η^* は減少し、最終的に d 点で極限状態 (CSL) 上に至り破壊することになる。また極限状態における降伏面は図に示す通りで、そのときのひずみ軟化パラメーターは σ'_{myf} で示されている。

(2) 排水せん断過程 I (軸荷重載荷)

Fig. 12(b) に示す通り a 点 (σ'_{mi}, e_i) から軸荷重のみを増大させる排水せん断試験を行う場合を考える。このとき、その有効応力経路は図中に示すように固定される。この場合にもダイレイタンスー限界面に達する b 点までは塑性体積ひずみは生じないが、排水条件による等方応力 σ'_m の増大のために弾性体積圧縮が生じ $e - \sigma'_m$ 面内では膨潤線 (SL) に沿って移動し、 b 点でダイレイタンスー限界面に至ることになる。それ以後は塑性体積膨張が生ずるから $e - \sigma'_m$ 面内ではもとの SL 線から離れ、 η^* が最大値となる c' をへて η^* が減少するとともに等方応力 σ'_m も減少に転じ d' 点で極限状態に達することになる。

(3) 排水せん断過程 II ($\sigma'_m = \text{const.}$)

(2) の場合と同様排水条件のもとでの $\sigma'_m = \text{一定}$ なるせん断過程を考える。この場合は Fig. 12(c) に示すように有効応力経路は固定され a 点からダイレイタンスー限界面に達する b 点までは (1) の場合と同じ挙動をすることになる。しかし、 b 点から以後は塑性体積膨張が生じ η^* が最大となる c 点をへて、 η^* が減少するが、塑性体積膨張は継続して起り d 点で極限状態に達することになる。

4.4 軸対称非排水せん断過程における“Dry”側の応力ひずみ関係

先に求めた構成式を通常の軸対称三軸圧縮でさらに非排水条件のもとで考察するが、ここでは“Dry”側

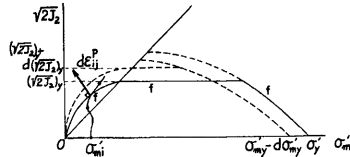


Fig. 11 Direction of plastic strain increment for “Dry” state.

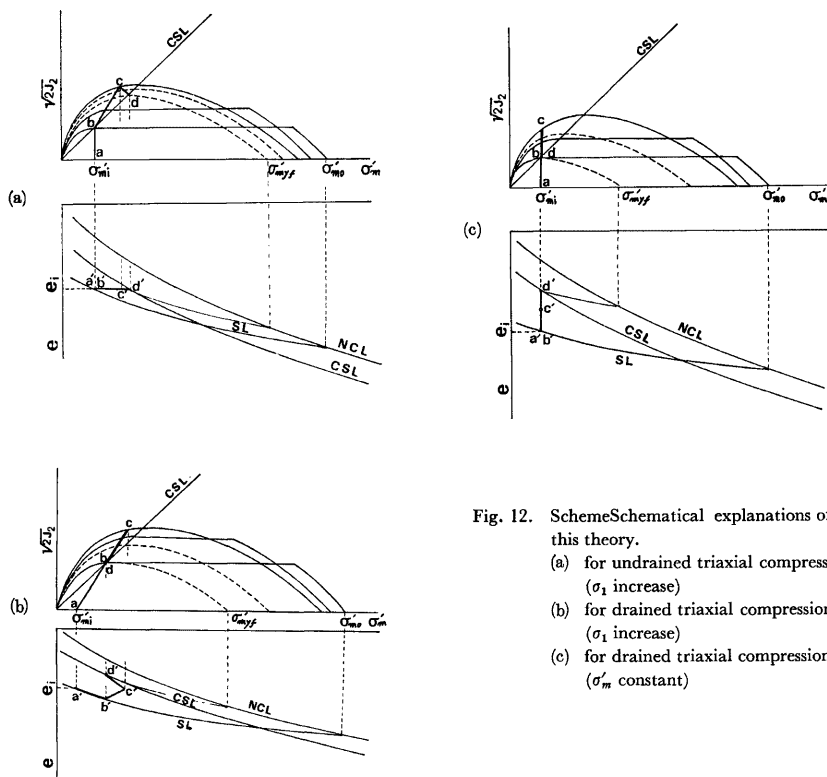


Fig. 12. SchemeSchematic explanations of this theory.

- (a) for undrained triaxial compression (σ_1 increase)
 (b) for drained triaxial compression I (σ_1 increase)
 (c) for drained triaxial compression II (σ_3 constant)

のものについて行う。

(1) $\sqrt{2}J_2 \leq M^* \sigma'_m$, $v = v_0 - \kappa \ln \sigma'_m / \sigma'_{w0}$ の場合

この場合の応力-ひずみ関係は (26) 式で与えられ

$$d\epsilon_{ij}^P = \frac{d(\sqrt{2}J_2)}{\frac{\partial \kappa_1}{\partial \epsilon_{ij}^P} \cdot \frac{s_{kl}}{\sqrt{2}J_2}} \cdot \frac{s_{ij}}{\sqrt{2}J_2} \quad \dots\dots\dots (26)$$

軸対称三軸条件のもとでは次の関係が

$$\sqrt{2}J_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_{11} - \sigma_{33}), \quad s_{11} = \frac{2}{3} (\sigma_{11} - \sigma_{33}), \quad s_{33} = s_{22} = -\frac{1}{3} (\sigma_{11} - \sigma_{33})$$

またこの応力状態では塑性体積ひずみが生じないという条件, あるいは (26) 式そのものから

$$d\epsilon_{33}^P = d\epsilon_{22}^P = -\frac{1}{2} d\epsilon_{11}^P$$

が成立する。この場合, 主応力, 主ひずみのみで議論できるから, 次のおきかえをする。

$$\sigma_{11} = \sigma_1, \quad \sigma_{22} = \sigma_2, \quad \sigma_{33} = \sigma_3, \quad \epsilon_{11}^P = \epsilon_1^P, \quad \epsilon_{22}^P = \epsilon_2^P, \quad \epsilon_{33}^P = \epsilon_3^P$$

この場合に (26) 式は

$$d\epsilon_1^P = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{\frac{\partial \kappa_1}{\partial \epsilon_1^P}} \quad \dots\dots\dots (31)$$

となり、これから次の関係が求まる。

$$\frac{\partial \kappa_1}{\partial \epsilon_1^P} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\epsilon_1^P} \quad \dots\dots\dots (32)$$

硬化パラメター κ_1 は塑性ひずみ ϵ_1^P 、この場合には ϵ_1^P の関数と考えられるから次のように仮定する。

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\epsilon_1^P} = h(\epsilon_1^P) \quad \dots\dots\dots (33)$$

先に用いた過圧密粘土の試験結果を用いて、この条件の範囲内で ϵ_1^P と $\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\epsilon_1^P}$ の関係を半対数紙上で整理すると **Fig. 13** が求まる。この図から、それらの間にはほぼ直線関係があることが明らかである。すなわち

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\epsilon_1^P} = \alpha \ln \epsilon_1^P + \beta = f(\epsilon_1^P) \quad \dots\dots\dots (34)$$

ここに α , β は過圧密比によって異なる材料定数である。(32), (34) 式から

$$\frac{\partial \kappa_1}{\partial \epsilon_1^P} = \frac{1}{3} (\alpha \ln \epsilon_1^P + \beta)$$

であるから、構成式 (31) はこの場合次式となる。

$$d\epsilon_1^P = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{3 \alpha \ln \epsilon_1^P + \beta} \quad \dots\dots\dots (35)$$

一方、有効応力比 η^* の増分は $\sqrt{2J_2}$, σ'_m を用いると

$$d\eta^* = d\left(\frac{\sqrt{2J_2}}{\sigma'_m}\right) = \frac{d(2J_2)}{\sigma'_m} - \frac{\sqrt{2J_2}}{\sigma'_m} \cdot \frac{d\sigma'_m}{\sigma'_m}$$

今考えている条件下では $\sigma'_m = \sigma'_{mi} = \text{const.}$ であるから

$$d\eta^* = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{\sigma'_{mi}}$$

この関係を (35) 式に代入すると

$$d\epsilon_1^P = \frac{\sigma'_{mi} d\eta^*}{\alpha \ln \epsilon_1^P + \beta} \quad \dots\dots\dots (37)$$

となり、 $\eta^* = 0$ で $\epsilon_1^P = 0$ なる条件で積分することによって、有効応力比と軸塑性ひずみ ϵ_1^P の関係が次のように求まる。

$$\eta^* = \frac{1}{\sigma'_{mi}} \cdot \epsilon_1^P (\alpha \ln \epsilon_1^P + \beta - \alpha) \quad \dots\dots\dots (38)$$

(2) $\sqrt{2J_1} \geq M^* \sigma'_m$, $v = v_y - \kappa \ln(\sigma'_m / \sigma'_{my})$ の場合

このとき、軸対称三軸圧縮条件下では (27), (28) 式などから

$$d\epsilon_1^P = dv^P \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{M - \eta} \right] \quad \dots\dots\dots (39)$$

となる、ここに η はもとにもどして $\eta = (\sigma_1 - \sigma_3) / \sigma'_m$ であり M は η の極限状態の値である。さらに非排水条件下であるから (5) 式と $dv = 0$ なる条件によって、この場合 (6) 式の関係が成立するから、(39) 式は次のようにもかける。

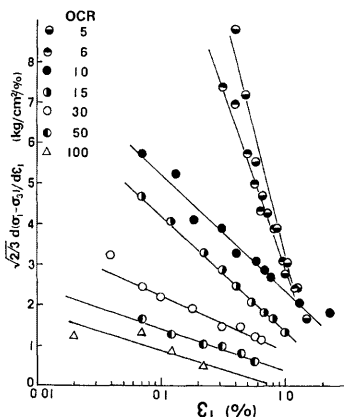


Fig. 13. Strain dependency of strain-hardening parameter K_1 .

$$d\epsilon_1^p = + \frac{\kappa}{1+e} \frac{d\sigma'_m}{\sigma'_m} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{M-\eta} \right] \dots\dots\dots(40)$$

例えば (39) 式において **Fig. 2** のように v^p と η の関係の関数形が与えられると, (39) 式の右辺は η のみと $d\eta$ で表わされるから積分できて ϵ_1^p と η の関係が得られることになる。

(3) 理論解と実験値の比較

以上のように $\sqrt{2}f_2 \leq M^* \sigma'_m$ に対しては (38) 式, $\sqrt{2}f_2 > M^* \sigma'_m$ に対しては (39) 式を積分して得られる関係で有効応力比 η と ϵ_1^p の関係が求まる。(39) 式において, **Fig. 2** から η と v^p が3次関数であると近似して過圧密粘土の解析値とし, 一方実験結果と比較したものが **Fig. 14** (a), (b), (c), (d) に示してある。これらからはかならずしもよい一致は得られなかったが, η の増大, 減少を一応評価できるものであることが明らかである。

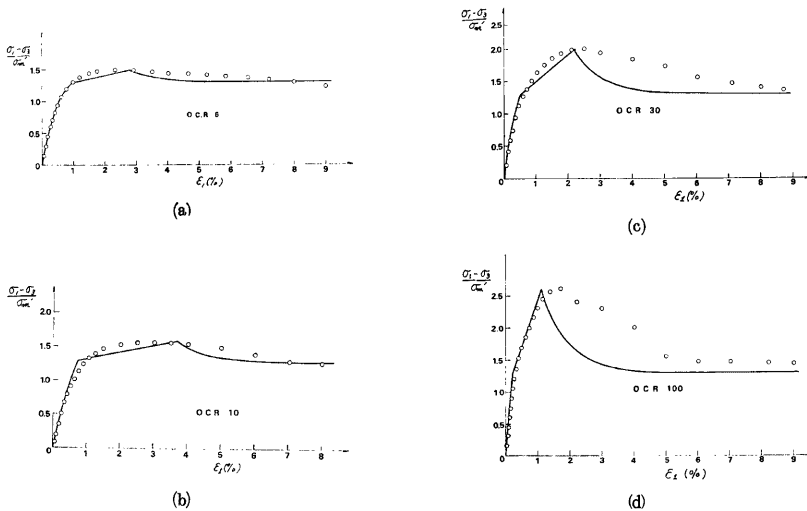


Fig. 14. Comparison of theoretical result with and experimental stress-strain relation.

(a) for OCR=6 (b) for OCR=10 (c) for OCR=30 (d) for OCR=100

5. む す び

本論文では過圧密粘土, とくに“Dry”側を中心に Roscoe らによる弾-塑性理論を拡大してその構成式に対しての議論を行った。実験結果も非排水条件下のものを用いるなど問題も多く, 有効平均応力一定の試験等を実施する必要がある。しかし, 状態曲面内でも有意の塑性変形が生ずること, また体積膨張にともないひずみ硬化ついで軟化に転ずるなどの挙動を統一的に説明できるものであることという条件は不十分ながら満すものである。第4節の最後でふれた塑性体積ひずみ v^p と応力との関係は η と三次関数にあるとの仮定などもかなり便宜的なもので, 過圧密比を含めた形で唯一的なものにするなど改良が必要である。

参 考 文 献

- 1) 例えば, Schofield, A. and P. Wroth : Critical State Soil Mechanics, McGraw Hill, 1968.

- 2) 足立紀尚, 東木雅和: 正規ならびに過圧密粘土の構成方程式, 第9回土質工学研究発表会講演集, 1974, pp. 251~254.
- 3) 足立紀尚, 東木雅和: 過圧密粘土の一構成式, 土木学会第29回年次学術講演会講演概要集, 1974, pp. 81~82.
- 4) Roscoe, K.H. and J.B. Burland: On the Generalized Stress-Strain Behavior of "Wet Clay", Engineering Plasticity, Cambridge Univ. Press, 1968, pp. 535~609.
- 5) 東木雅和: A Stress-Strain Relation of Over-Consolidated Clays, 京都大学工学部修士論文, 1974.
- 6) 太田秀樹: Analysis of Deformation of Soils Based on the Theory of Plasticity and its Application to Settlement of Embankment, 京都大学工学部博士論文, 1971.
- 7) 藤本和義: 過圧密粘土の応力緩和に関する実験的研究 京都大学工学部卒業論文, 1974.
- 8) Koiter, W.T.: Stress-Strain Relations, Uniqueness and Variational Theorems for Elastic-Plastic Materials with A Singular Yield Surface, Quart. Appl. Math., Vol. 11, 1953, pp. 350~354.
- 9) 例えば, Naphdi, P.M.: Stress-Strain Relations in Plasticity and Thermoplasticity, Proc. 2nd Symposium on Naval Structural Mechanics, Pergamon Press, 1960, pp. 121~169.
- 10) 足立紀尚, 岡野 真久: A Constitutive Equations for Normally Consolidated Clay, Soils and Foundations, Vol. 14, No. 4, 1974, pp. 55~73.