

Representations of finite groups and Hilbert modular forms

東京理大理工 浜畑芳紀 (Yoshinori Hamahata)

1. Hilbert modular forms.

K を n 次総実代数体とし, $K \hookrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ を n 個の埋め込みとする. $\mathfrak{o}_K$ は K の整数環とする. $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ は上半平面で, $\mathfrak{H}^n$ は n 個の直積とする. $SL_2(\mathfrak{o}_K)$ は $\mathfrak{H}^n$ に次のように作用する: $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathfrak{o}_K)$ と $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathfrak{H}^n$ に対して,

$$(1) \quad \gamma \cdot z = \left(\frac{a^{(1)}z_1 + b^{(1)}}{c^{(1)}z_1 + d^{(1)}}, \dots, \frac{a^{(n)}z_1 + b^{(n)}}{c^{(n)}z_1 + d^{(n)}} \right).$$

$\mathfrak{o}_K$ の ideal $\mathfrak{n}$ に対して,

$$\Gamma(\mathfrak{n}) = \{\gamma \in SL_2(\mathfrak{o}_K) \mid \gamma \equiv 1_2 \pmod{\mathfrak{n}}\}$$

とおく. $\Gamma(\mathfrak{n})$ も $\mathfrak{H}^n \sim (1)$ のように作用する. また, $\Gamma(\mathfrak{n})$ は, $\mathbb{P}^1(K) = K \cup \{\infty\}$ に 1 次分数変換で作用する. $\Gamma(\mathfrak{n}) \backslash \mathbb{P}^1(K)$ の元を $\Gamma(\mathfrak{n})$ の cusp という. 各 $m \in \mathbb{N}$ について

$$j_{2m}(\gamma, z) = \prod_{i=1}^n (c^{(i)}z_i + d^{(i)})^{-2m}$$

とおく. 但し, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(K)$ とする. さらに, $\gamma \in GL_2^+(K)$ に対して $f|_{2m}[\gamma] = f(\gamma z)j_{2m}(\gamma, z)$ とおく.

定義. $f: \mathfrak{H}^n \rightarrow \mathbb{C}$ が $\Gamma(\mathfrak{n})$ に対する weight $2m$ の Hilbert cusp form とは, 次の 3 条件をみたすこと:

- 1) f は $\mathfrak{H}^n$ 上で正則,
- 2) $\forall \gamma \in \Gamma(\mathfrak{n})$ について, $f|_{2m}[\gamma] = f$,

3) f は $\Gamma(\mathfrak{n})$ の各 cusp で正則で, $\forall \gamma \in GL_2^+(K)$ について, $f|_{2m}[\gamma]$ の Fourier 展開の定数項は 0.

$\Gamma(\mathfrak{n})$ に対する weight $2m$ の Hilbert cusp form 全体のなす集合を $S_{2m}(\Gamma(\mathfrak{n}))$ とおくと, $S_{2m}(\Gamma(\mathfrak{n}))$ は $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間になる. $SL_2(\mathfrak{o}_K)$ は, $(\gamma, f) \mapsto f|_{2m}[\gamma]$ により $S_{2m}(\Gamma(\mathfrak{n}))$ に作用し, $\Gamma(\mathfrak{n})$ は自明に作用する. よって, $SL_2(\mathfrak{o}_K)/\Gamma(\mathfrak{n})$ は $S_{2m}(\Gamma(\mathfrak{n}))$ に作用する. $\pi : SL_2(\mathfrak{o}_K)/\Gamma(\mathfrak{n}) \rightarrow \text{Aut}(S_{2m}(\Gamma(\mathfrak{n})))$ をそれに付随する表現とする. $\text{tr } \pi$ における既約指標 $\bullet$ の重複度を $m(\bullet)$ と書く.

2. Representations of $SL_2(\mathbb{F}_q)$.

q を奇素数のべきとし, $\mathbb{F}_q$ を q 個の元からなる有限体とする. $q^* = q(-1)^{(q-1)/2}$ とおく. η を $\mathbb{F}_q$ の非平方数とし, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく. そのとき, M, M' のそれぞれの共役類の上で次のような値をとり, 他の共役類の上で同じ値をとる既約指標の対が 2 つある:

	M	M'
ψ^+	$\frac{1+\sqrt{q^*}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{q^*}}{2}$
ψ^-	$\frac{1-\sqrt{q^*}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{q^*}}{2}$
ψ'^+	$\frac{-1+\sqrt{q^*}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{q^*}}{2}$
ψ'^-	$\frac{-1-\sqrt{q^*}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{q^*}}{2}$

ここで, ψ^+, ψ^- は $(q+1)/2$ 次で, ψ'^+, ψ'^- は $(q-1)/2$ 次である. これらを class (G) の既約指標と呼ぶことにする.

3. Known results.

この節では, $\mathfrak{n}$ は素 ideal $\mathfrak{p}$ で $q = N\mathfrak{p}$ が奇素数のべきであるようなもののみを考える. $SL_2(\mathfrak{o}_K)/\Gamma(\mathfrak{n}) \cong SL_2(\mathbb{F}_q)$ で, $SL_2(\mathbb{F}_q)$ が $S_{2m}(\Gamma(\mathfrak{p}))$ に作用している. このとき, $q \equiv 1 \pmod{4}$ のとき, $\text{tr } \pi$ に ψ^+, ψ^- のみが

現われ, $q \equiv 3 \pmod{4}$ のとき, $\text{tr } \pi$ に ψ^+ , ψ'^+ のみが見られる. それゆえ, 次の重複度の一次結合

$$(2) \quad m := m(\psi^+) - m(\psi^-) + m(\psi'^+) - m(\psi'^-)$$

は無駄のある表示であるが, (2) を一般化した形の重複度の一次結合を後で扱いたいので, 敢えて (2) の形で表示することにする.

定理 (Hecke) $n = 1, m = 1, \mathfrak{p} = (p)$ のとき,

$$m = \begin{cases} 0 & (p \equiv 1 \pmod{4}), \\ h_{\mathbb{Q}(\sqrt{-p})} & (p \equiv 3 \pmod{4}). \end{cases}$$

ここで, $h_{\mathbb{Q}(\sqrt{-p})}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ の類数である.

定理 (Eichler) $n = 1, m = 1, \mathfrak{p} = (p)$ のとき,

$$m = \frac{1}{\sqrt{p^*}} \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{i}{p} \right) \nu(i).$$

但し, $p^* = p(-1)^{(p-1)/2}$, $e[\bullet] = \exp(2\pi i \bullet)$, $\nu(i) = -\frac{e[\frac{i}{p}]}{1 - e[\frac{i}{p}]}$.

定理 (Saito, Yoshida) $n \geq 1, m \geq 2$ のとき,

$$|m| = 2^{n-1} \sum_{L/K} \frac{h_L}{h_K}.$$

但し, 和は L/K は K の総虚 2 次拡大で, 相対判別式が $\mathfrak{p}$ なるものをわたる.

定理 (Meyer-Sczech) $n = 2, m \geq 1, (\mathfrak{p}, 6d_K) = 1$ のとき,

$$m = -2 \sum_{L/K} \frac{h_L}{h_K}.$$

ここに, d_K は K の判別式で, 和は L/K は K の総虚 2 次拡大で, 相対判別式が $\mathfrak{p}$ なるものをわたる.

定理 (Saito) $n = 2, m = 1, h_K = 1, (p, 6d_K) = 1, p = (\mu)$ (μ は総正) のとき,

$$m = \frac{1}{\sqrt{q^*}} \cdot \frac{2}{[U : U(p)]} \sum_{\alpha \in (\mathfrak{o}_K/p)^\times} \left(\frac{\alpha}{p}\right) \nu(\alpha).$$

ここに, $q = Np$, $q^* = q(-1)^{(q-1)/2}$ で, $\left(\frac{\alpha}{p}\right)$ は mod p の平方剰余記号である.

4. 結果.

以下, K は実 2 次体で, $\mathfrak{n}$ は次のような形の ideal のみを考える: $p_1, \dots, p_t$ は相異なる素 ideal で $q_i = Np_i$, $\mathfrak{n} = p_1 \cdots p_t$ とする. そのとき, $SL_2(\mathfrak{o}_K)/\Gamma(\mathfrak{n}) \cong \prod_{i=1}^t SL_2(\mathbb{F}_{q_i})$ で $SL_2(\mathfrak{o}_K)/\Gamma(\mathfrak{n})$ の既約指標 = $\prod_{i=1}^t SL_2(\mathbb{F}_{q_i})$ の既約指標である.

定理 $n = 2, m \geq 1, h_K = 1, \mathfrak{n} = p_1 \cdots p_t = (\mu)$ (μ は総正), $(n, 6d_K) = 1$ のとき,

$$\begin{aligned} \sum_{e_1, \dots, e_t \in \{\pm 1\}} \sum_{i=1}^t \sum_{\varphi_i \in \{\psi_i, \psi'_i\}} e_1 \cdots e_t \cdot m(\varphi_1^{e_1} \cdots \varphi_t^{e_t}) \\ = \frac{1}{\sqrt{q_1^* \cdots q_t^*}} \cdot \frac{2^t}{[U : U(\mathfrak{n})]} \sum_{\alpha \in (\mathfrak{o}_K/\mathfrak{n})^\times} \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{n}}\right) \nu(\alpha). \end{aligned}$$

但し, $q_i^* = q_i(-1)^{(q_i-1)/2}$, $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{n}}\right) := \prod_{i=1}^t \left(\frac{\alpha}{p_i}\right) \cdot \nu(\alpha)$ について説明するために記号の準備をする.

$U(\mathfrak{n})$ を K の単数で mod $\mathfrak{n}$ で 1 と合同なものの全体のなす群とし, $[U : U(\mathfrak{n})] = t$ とする. $\mathfrak{o}_K = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}w$ ($0 < w' < 1 < w$) となる $w \in \mathfrak{o}_K$ がある. w は次のような連分数展開をもつ:

$$w = b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{b_r - \frac{1}{b_1}}}}.$$

そのとき, $1 \leq k \leq r$ なる各整数 k に対して正整数 p_k, q_k を

$$\frac{p_k}{q_k} = b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{b_{k-1} - \frac{1}{b_k}}}}$$

によって定義する. $6d_K$ と素な $\alpha \in \mathfrak{o}_K$ に対して, $\nu(\alpha)$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned} \nu(\alpha) := & \sum_i \frac{e \left[\operatorname{tr} \left(\frac{\alpha}{\mu} \right) \cdot \frac{p_i - q_i w'}{w - w'} \right] \cdot e \left[\operatorname{tr} \left(\frac{\alpha}{\mu} \right) \cdot \frac{-p_{i-1} + q_{i-1} w'}{w - w'} \right]}{\left(1 - e \left[\operatorname{tr} \left(\frac{\alpha}{\mu} \right) \cdot \frac{p_i - q_i w'}{w - w'} \right] \right) \left(1 - e \left[\operatorname{tr} \left(\frac{\alpha}{\mu} \right) \cdot \frac{-p_{i-1} + q_{i-1} w'}{w - w'} \right] \right)} \\ & + \sum_j \frac{e \left[\operatorname{tr} \left(\frac{\alpha}{\mu} \right) \cdot \frac{p_j - q_j w'}{w - w'} \right]}{\left(1 - e \left[-\operatorname{tr} \left(\frac{\alpha}{\mu} \right) \cdot \frac{p_j - q_j w'}{w - w'} \right] \right)} \left\{ -1 + \frac{b_j}{1 - e \left[-\operatorname{tr} \left(\frac{\alpha}{\mu} \right) \cdot \frac{p_j - q_j w'}{w - w'} \right]} \right\}, \end{aligned}$$

ここに, i は $1 \leq i \leq rt$ をみたし, $e \left[\operatorname{tr} \left(\frac{\alpha}{\mu} \right) \cdot \frac{p_i - q_i w'}{w - w'} \right]$ も $e \left[\operatorname{tr} \left(\frac{\alpha}{\mu} \right) \cdot \frac{-p_{i-1} + q_{i-1} w'}{w - w'} \right]$ も 1 でないものの全体を動く. j も $1 \leq j \leq rt$ をみたし, $e \left[\operatorname{tr} \left(\frac{\alpha}{\mu} \right) \cdot \frac{-p_{j-1} + q_{j-1} w'}{w - w'} \right] = 1$ となるものの全体を動く.

5. 証明の概略.

各 i に対して, $\eta_i \in \mathfrak{o}_K$ で $\left(\frac{\eta_i}{\mathfrak{p}_i} \right) = -1$, $\left(\frac{\eta_i}{\mathfrak{p}_j} \right) = 1$ ($j \neq i$) なるものをとる. 定理の左辺を m' とおく.

補題

$$m' = \sum_{i=1}^t \sum_{\epsilon_i \in \{1, \eta_i\}} \left(\frac{\epsilon_1 \cdots \epsilon_t}{n} \right) \operatorname{tr} \pi \left(\begin{pmatrix} 1 & \epsilon_1 \cdots \epsilon_t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

(1) $m = 1$ の場合: $X(n)$ を $\Gamma(n)$ から定義される Hilbert modular surface とし, $\tilde{f}_{\epsilon_1 \cdots \epsilon_t}$ を $(z_1, z_2) \mapsto (z_1 + \epsilon_1^{(1)} \cdots \epsilon_t^{(1)}, z_2 + \epsilon_1^{(2)} \cdots \epsilon_t^{(2)})$ によって

induce される $X(n)$ の自己同型とする. Ω^2 を $X(n)$ 上の正則 2-形式の層とすると, $S_2(\Gamma(n)) = H^0(X(n), \Omega^2)$ である. $\text{tr } \pi \left(\begin{pmatrix} 1 & \epsilon_1 \cdots \epsilon_t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{tr}(\tilde{f}_{\epsilon_1 \cdots \epsilon_t} | H^0(X(n), \Omega^2))$ となる. $H^2(X(n), \Omega^2) \cong H^0(X(n), \mathcal{O}_{X(n)})$ でその $\mathbb{C}$ 上の次元は 1 だから,

$$\text{tr}(\tilde{f}_{\epsilon_1 \cdots \epsilon_t} | H^2(X(n), \Omega^2)) = \text{tr}(\tilde{f}_{\epsilon_1 \cdots \epsilon_t} | H^0(X(n), \mathcal{O}_{X(n)})) = 1.$$

よって,

$$\sum_{i=1}^t \sum_{\epsilon_i \in \{1, \eta_i\}} \left(\frac{\epsilon_1 \cdots \epsilon_t}{n} \right) \text{tr}(\tilde{f}_{\epsilon_1 \cdots \epsilon_t} | H^2(X(n), \Omega^2)) = \sum_{i=1}^t \sum_{\epsilon_i \in \{1, \eta_i\}} \left(\frac{\epsilon_1 \cdots \epsilon_t}{n} \right) = 0.$$

また, $H^1(X(n), \mathcal{O}_{X(n)}) = 0$ が知られていて, $H^1(X(n), \Omega^2) \cong H^1(X(n), \mathcal{O}_{X(n)})$ なので,

$$\sum_{i=1}^t \sum_{\epsilon_i \in \{1, \eta_i\}} \left(\frac{\epsilon_1 \cdots \epsilon_t}{n} \right) \text{tr}(\tilde{f}_{\epsilon_1 \cdots \epsilon_t} | H^1(X(n), \Omega^2)) = 0.$$

したがって,

$$m' = \sum_{i=1}^t \sum_{\epsilon_i \in \{1, \eta_i\}} \left(\frac{\epsilon_1 \cdots \epsilon_t}{n} \right) \left(\sum_{i=0}^2 (-1)^i \text{tr}(\tilde{f}_{\epsilon_1 \cdots \epsilon_t} | H^i(X(n), \Omega^2)) \right)$$

と書ける. この右辺を正則 Lefschetz 固定点定理を使って書き直すと定理の右辺が得られる.

(2) $m \geq 2$ の場合: $D = X(n) - \Gamma(n) \setminus \mathfrak{H}^2$ とおき, $\mathcal{L} = \Omega^2(\log D)$ を $X(n)$ 上の D に沿って対数極をもつ 3-形式のなす層とする. そのとき, $S_{2m}(\Gamma(n)) = H^0(X(n), \mathcal{L}^{\otimes(m-1)} \otimes \Omega^2)$ となつて, $\text{tr } \pi \left(\begin{pmatrix} 1 & \epsilon_1 \cdots \epsilon_t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{tr}(\tilde{f}_{\epsilon_1 \cdots \epsilon_t} | H^0(X(n), \mathcal{L}^{\otimes(m-1)} \otimes \Omega^2))$ が成立する. $\mathcal{L}^{\otimes(m-1)}$ は $\overline{\Gamma(n) \setminus \mathfrak{H}^2}$ 上の ample 層の $X(n) \rightarrow \overline{\Gamma(n) \setminus \mathfrak{H}^2}$ による引き戻しであるから, 小平消滅定理により

$$H^i(X(n), \mathcal{L}^{\otimes(m-1)} \otimes \Omega^2) = 0 \quad (i \geq 1)$$

が成立する. よって,

$$m' = \sum_{i=1}^t \sum_{\epsilon_i \in \{1, \eta_i\}} \left(\frac{\epsilon_1 \cdots \epsilon_t}{n} \right) \left(\sum_{i=0}^2 (-1)^i \text{tr}(\tilde{f}_{\epsilon_1 \cdots \epsilon_t} | H^i(X(n), \mathcal{L}^{\otimes(m-1)} \otimes \Omega^2)) \right)$$

となる. $\mathcal{L}^{\otimes(m-1)}$ は D の回りで自明だから, 正則 Lefschetz 固定点定理を使う際に, $\mathcal{L}^{\otimes(m-1)} \otimes \Omega^2$ の代わりに Ω^2 に置き換えてもよい. したがって, $m \geq 2$ の場合が $m = 1$ の場合に帰着できる.

References

1. M. Eichler, *Einige Anwendung der Spurformel in Bereich der Modulkorrespondenzen*, Math. Ann., **168** (1967), 128-137.
2. Y. Hamahata, *The spaces of Hilbert cusp forms for totally real cubic fields and representations of $SL_2(\mathbb{F}_q)$* , J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **5** (1998), 367-399.
3. E. Hecke, *Über das Verhalten der Integrale I Gattung bei beliebigen, insbesondere in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, Abh. Math. Sem. Ham. Univ., **8** (1930), 271-281.
4. D. McQuillan, *A generalization of a theorem of Hecke*, Amer. J. Math., **84** (1964), 306-316.
5. W. Meyer and R. Sczech, *Über eine topologische und eine zahlentheoretische Anwendung von Hirzebruch's Spitzenauflösung*, Math. Ann., **240** (1979), 69-96.
6. H. Saito, *On the representation of $SL_2(\mathbb{F}_q)$ in the space of Hilbert modular forms*, J. Math. Kyoto Univ., **15** (1975), 101-128.

Yoshinori HAMAHATA

Department of Mathematics

Faculty of Science and Technology

Science University of Tokyo

Noda, Chiba, 278-8510, JAPAN