

Filtered Modules と長さ有限 p -進表現について

東大理 都築 暢夫 (Nobuo Tsuzuki)

1. はじめに

混標数 $(0, p)$ 局所体の Galois 群の p -進表現の理論は、J.-M. Fontaine によりその概念 (Hodge-Tate 表現、de Rham 表現、crystalline 表現) が正確に定義され、局所体上の多様体の p -進 étale cohomology に対する予想を定式化した [Fo]。これらの予想は最終的に G. Faltings により解決された [Fa1][Fa2]。さらに、絶対不分岐な局所体上の多様体で good reduction の場合には、その上の Filtered Module の圏から p -べき torsion étale 層の圏への充満忠実な関手があり、これは cohomology と可換になる。(局所体の場合は [FL]、一般には [Fa2]。)

ここでは、絶対分岐指数が $p-1$ より小さい局所体の場合に Fontaine-G. Laffaille の理論の一般化をする。局所体の整数環を Witt 環上のアフィン直線へ埋め込み その divided power 包絡環 (以下 P.D.-包絡環) をとり、その上の Frobenius、減少列と接続をもつ加群として Filtered Module を定義する。また、Filtered Module の圏から p -進 Galois 表現の圏への充満忠実関手を構成する。

次のように記号を定める。

K : 剰余体 k が完全体である混標数 $(0, p)$ 完備離散付値体

A : K の整数環

π : K の素元 (一つ固定)

e : K の絶対分岐指数

$W = W(k)$: k -係数 Witt 環

$\overline{K}$: K の代数閉包 $\overline{A}$: $\overline{K}$ の整数環

$G = \text{Gal}(\overline{K}/K)$: K の絶対 Galois 群

$\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G)$: $\mathbb{Z}_p[G]$ -加群の圏

環 R および環準同型 f に対して $\text{mod } p^n$ したものを、それぞれ、 R_n と f_n とで表す。

2. FILTERED MODULES

W -環準同型

$$i: W[t] \longrightarrow A \quad (t \mapsto \pi, \quad t \text{ は変数})$$

を、 $\text{Spec } A$ のアフィン直線への埋め込み、 σ を $W[t]$ 上の Frobenius ($\sigma: t \mapsto t^p$, W 上は通常 of Frobenius) とする。 R_n を W_n 上の自然な P.D.-構造と可換な i_n に対する P.D.-包絡環とする。すなわち、 $f(t) \in W[t]$

を π の最小多項式とすると、 $W[x] \rightarrow W[t] (x \mapsto f(t))$ による係数拡大により

$$R_n = W_n[t] \otimes_{W_n[x]} W_n\{x\}$$

とあらわせる。ただし、 $W_n\{x\}$ は一変数 P.D.-多項式環とする。また、各自然数 m に対して $J_n^{[m]}$ を m 次の P.D.-イデアルとする。このとき、P.D.-構造の性質から σ_n は R_n 上に延びる (P.D.-構造は保たない)。 $R_\infty, J_\infty^{[m]}, \sigma_\infty$ を、それぞれ、 $R_n, J_n^{[m]}, \sigma_n$ の射影極限とする ($m \leq 0$ のとき $J_\infty^{[m]} = R_\infty$ とする)。 R_∞ において p は零因子でなく、各 $m \leq p-1$ に対して $\sigma_\infty(J_\infty^{[m]}) \subset p^m R_\infty$ であることから、

$$\varphi_{R_\infty} = p^{-m} \sigma_\infty : J_\infty^{[m]} \longrightarrow R_\infty \quad (m \leq p-1)$$

が定義される。

ω^1 を $t=0$ において一位の極をゆるした $\text{Spec } W[t]$ の微分加群、すなわち、 $\omega^1 = W[t]d\log(t)$ とする。このとき、 $W[t]$ 上の Frobenius σ により σ -準同型

$$\frac{d\sigma_\infty}{p} : \omega^1 \longrightarrow \omega^1 \quad a d\log(t) \mapsto \sigma_\infty(a) d\log(t)$$

が導かれる。 d_{R_∞} を R_∞ 上の自然な微分とすると、 $d_{R_\infty}(J_\infty^{[m]}) \subset \omega^1 \otimes_{W[t]} J_\infty^{[m-1]}$ ($\text{Griffith transversality}$) が成り立ち、 $m \leq p-1$ のとき下の図式

$$\begin{array}{ccc} J_\infty^{[m]} & \xrightarrow{d} & \omega^1 \otimes_{W[t]} J_\infty^{[m-1]} \\ \varphi_{R_\infty}^m \downarrow & & \downarrow \frac{d\sigma_\infty}{p} \otimes \varphi_{R_\infty}^{m-1} \\ R_\infty & \xrightarrow{d} & \omega^1 \otimes_{W[t]} R_\infty \end{array}$$

が可換となる。

定義 1. (圏 $\underline{\mathbf{MF}}^\nabla_{\text{big}}$ の定義)

$\underline{\mathbf{MF}}^\nabla_{\text{big}}$ の対象 $M = (M, (M^k, \varphi_M^k)_{k \leq p-1}, \nabla_M)$ は次の条件 (1)-(5) を満たすものからなる。

- (1) M, M^k は p のべきで消える R_∞ -加群である。
- (2) (M^k) は減少列で、 $k \leq 0$ のとき $M^k = M$ となる。
- (3) 各 j, k に対して $J_\infty^{[j]} M^k \subset M^{j+k}$ となる。

(4) 各 k に対して $\varphi_M^k : M^k \rightarrow M$ は σ_∞ -準同型で、次のふたつの図式が可換となる。

$$\begin{array}{ccc}
 M^k & \xrightarrow{\subset} & M^{k-1} \\
 \varphi_M^k \downarrow & & \downarrow \varphi_M^{k-1} \\
 M & \xrightarrow{p} & M
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 J_\infty^{[j]} \otimes_{R_\infty} M^k & \xrightarrow{\text{積}} & M^{j+k} \\
 \varphi_{R_\infty}^k \otimes \varphi_M^j \downarrow & & \downarrow \varphi_M^{j+k} \\
 M & \xlongequal{\quad} & M
 \end{array}$$

(5) $\nabla_M : M \rightarrow \omega^1 \otimes_{W[t]} M$ は W -接続で、Griffith transversality $\nabla_M(M^k \subset \omega^1 \otimes_{W[t]} M^{k-1})$ を満たす。また、次の図式

$$\begin{array}{ccc}
 M^k & \xrightarrow{\nabla_M|_{M^k}} & \omega^1 \otimes_{W[t]} M^{k-1} \\
 \varphi_M^k \downarrow & & \downarrow \frac{d\sigma_\infty}{p} \otimes \varphi_M^{k-1} \\
 M & \xrightarrow{\nabla_M} & \omega^1 \otimes_{W[t]} M
 \end{array}$$

が可換となる。

$\mathbf{MF}_{\text{big}}^\nabla$ の射は上の構造と可換な R_∞ -準同型とする。

補足 2. $\mathbf{MF}_{\text{big}}^\nabla$ は W -線型な加法圏となる。後に Hom や Ext を考える都合上 $\mathbf{MF}_{\text{big}}^\nabla$ を含むアーベル圏 $\mathfrak{MS}_{\text{big}}^\nabla$ が必要になるが、ここではその定義を省く。(減少列のところを、単に列にする。)

$\mathbf{MF}_{\text{big}}^\nabla$ の対象 M に対して R_∞ -加群 $\tilde{M}$ を次のように定める。

$$\tilde{M} = \left(\bigoplus_{k \leq p-1} R_\infty \otimes_{\sigma_\infty} M^k \right) / T$$

ここで $R_\infty \otimes_{\sigma_\infty}$ は Frobenius $\sigma_\infty : R_\infty \rightarrow R_\infty$ による係数拡大を表し、 T は下の (ア) および (イ) なる形の元により生成される $\bigoplus_{k \leq p-1} R_\infty \otimes_{\sigma_\infty} M^k$ の R_∞ -部分加群である。

$$(ア) \quad (1 \otimes x) \oplus ((-p) \otimes x) \in R_\infty \otimes_{\sigma_\infty} M^{k-1} \oplus R_\infty \otimes_{\sigma_\infty} M^k \quad (x \in M^k)$$

$$\begin{aligned}
 (イ) \quad & (\varphi_{R_\infty}^j(a) \otimes x) \oplus ((-1) \otimes ax) \in R_\infty \otimes_{\sigma_\infty} M^k \oplus R_\infty \otimes_{\sigma_\infty} M^{j+k} \\
 & \quad (a \in J_\infty^{[j]}, \quad x \in M^k)
 \end{aligned}$$

定義 1.4 により $\bigoplus_{k \leq p-1} \varphi_M^k$ から R_∞ -準同型

$$\tilde{\varphi}_M : \tilde{M} \longrightarrow M$$

が導かれる。これも M の Frobenius と呼ぶことにする。

R_∞ -加群 $\tilde{M}$ に対して W -接続 $\tilde{\nabla}_M : \tilde{M} \rightarrow \omega^1 \otimes_{W[t]} \tilde{M}$ を次のように定める。

$$a \otimes x \in R_\infty \otimes_{\sigma_\infty} M^k$$

$$\mapsto \left(a \left(\frac{d\sigma_\infty}{p} \otimes id_{M^{k-1}} \right) \circ \nabla_M(x) \right) \oplus (da \otimes x) \in \omega^1 \otimes_{\sigma_\infty} M^{k-1} \oplus \omega^1 \otimes_{\sigma_\infty} M^k$$

定義 1.5 により $\tilde{\nabla}_M$ は W -接続となり、 $\tilde{\nabla}_M$ と ∇_M とは $\tilde{\varphi}_M$ に関して平行、すなわち $\nabla_M \circ \tilde{\varphi}_M = (id_{\omega^1} \otimes \tilde{\varphi}_M) \circ \tilde{\nabla}_M$ となる。

上で定めた $M \mapsto \tilde{M}$ は圏 $\underline{\mathbf{MF}}^\nabla_{\text{big}}$ から R_∞ -加群の圏への関手を定めて、Frobenius $\tilde{\varphi}_M$ と W -接続 $\tilde{\nabla}_M$ とはその定義より $\underline{\mathbf{MF}}^\nabla_{\text{big}}$ の射と可換になる。さらに、上の関手は注意 2 のアーベル圏 $\underline{\mathcal{M}\mathcal{F}}^\nabla_{\text{big}}$ から R_∞ -加群の圏への右完全関手に延びる。

定義 3. 以下の条件 (1)-(3) を満たす圏 $\underline{\mathbf{MF}}^\nabla_{\text{big}}$ の対象 M を *Filtered Module* と呼び、それらからなる充満部分圏を $\underline{\mathbf{MF}}^\nabla$ とする。

(1) M は R_∞ -加群として有限個の $R_\infty/p^n R_\infty$ の直和 (n はいろいろ) である。

(2) Frobenius $\tilde{\varphi}_M : \tilde{M} \rightarrow M$ は同型である。

(3) 各自然数 n と各元 $x \in M^{k-1}$ に対して $\varphi_M^{k-1}(p^n x) \in p^{n+1}M$ ならば $p^n \in p^n M^k + p^n M^{k-1}$ である。

補足 4. (1) $\tilde{\nabla}_M$ のべき零性により $\underline{\mathbf{MF}}^\nabla$ の対象 M は $\text{Spec } A$ 上の対数型の極つき *crystal* とみなせる。[K1]

(2) 圏 $\underline{\mathbf{MF}}^\nabla$ は標準的な同型をのぞいて K の素元 π のとり方によらない。

定義 5. d を $0 \leq d \leq p-1$ を満たす自然数とする。Filtered Module M がレベル $[0, d]$ とは、各 k に対して $M^k = \sum_{j=0}^d J_\infty^{[k-j]} M^j$ を満たすことをいう。レベル $[0, d]$ なる Filtered Module の圏を $\underline{\mathbf{MF}}^\nabla_{[0, d]}$ で表す。

次の補題が重要である。

補題 6. $\underline{\mathbf{MF}}^\nabla_{\text{big}}$ の対象 M が次の条件

(1) M は R_∞/pR_∞ -加群として有限生成かつ自由である。

(2) R_∞/pR_∞ -準同型 $\tilde{\varphi}_M: \tilde{M} \rightarrow M$ は全射である。

(3) 各元 $x \in M^{k-1}$ が $\varphi_M^{k-1}(x) = 0$ を満たせば $x \in M^k$ となる。
を満たせば、 M は *Filtered Module* になる。

このとき、 M の元 $e_1, \dots, e_r$ ($r = \text{rank} M$) と整数 $i_1, \dots, i_r$ ($0 \leq i_n < e(p-1)$) が存在して、 α_n, β_n を

$$i_n = \alpha_n e - \beta_n \quad (0 \leq \beta_n < e)$$

で定めると、

$$M = \bigotimes_{n=1}^r (R_\infty/pR_\infty)e_n$$

$$M^k = \bigotimes_{n=1}^r ((t^{\beta_n} J_\infty^{[k-\alpha_n]} + J_\infty^{[k-\alpha_n+1]})/p)e_n$$

となり、 $\varphi_M^{\alpha_n}(t^{\beta_n} e_n) = \sum a_{mn} e_m$ で (a_{mn}) を定めると、行列 (a_{mn}) は可逆となる。

証明: M/M^1 は有限生成 $A_1 = R_1/J_1^{[1]}$ -加群より、

$$M/M^1 \cong \bigoplus_{n=1}^{r_1} (A/\pi^{e-i_n} A) \bar{e}_n \quad i_1 \leq \dots \leq i_{r_1}$$

とする。ただし、 $e_1, \dots, e_{r_1}$ は生成元の M への持ち上げとする。定義 1.3 および条件 (3) により、 $M/(M^2 + R_1 e_1 + \dots + R_1 e_{r_1})$ は $A_1 = R_1/J_1^{[1]}$ -加群となり、

$$M/(M^2 + R_1 e_1 + \dots + R_1 e_{r_1}) \cong \bigoplus_{n=r_1+1}^{r_2} (A/\pi^{2e-i_n} A) \bar{e}_n$$

$$i_{r_1+1} \leq \dots \leq i_{r_2}$$

とする。以下帰納的に $e_n, i_n = \alpha_n e - \beta_n$ ($1 \leq n \leq r, 0 \leq \beta_n < e$) を定める。条件 (3) より $\tilde{M}$ は $t^{\beta_1} e_1, \dots, t^{\beta_r} e_r$ で生成されるから、 $\tilde{\varphi}_M$ は同型になる。 ■

命題 7. $\mathfrak{M}_{\text{big}}^\nabla$ の完全列

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

に対して、 M, M', M'' のいずれか二者が *Filtered Module* ならば残りの一つも *Filtered Module* である。

証明: $p^n M = 0$ なる n に関する帰納法による。 $n = 1$ のときは補題 6 から示される。 ■

定理 8. $de < p-1$ のとき圏 $\underline{\mathbf{MF}}_{[0,d]}^\nabla$ はアーベル圏である。

証明は、剰余体 k が代数閉体の場合に帰着できる。

剰余体 k が代数閉体のとき、 $\underline{\mathbf{MF}}^\nabla$ の基本対象を次のように定める。
各周期写像

$$i: \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1, \dots, e(p-1)\} \quad \text{modulo } h \quad (n \rightarrow i_n)$$

に対して $\alpha_n^i, \beta_n^i, q_n^i$ および Filtered Module $M = M(i)$ を下のように定義する。

$$\begin{aligned} i_n &= \alpha_n^i e - \beta_n^i \quad (0 \leq \beta_n^i < e); \\ q_n^i &= \left(\sum_{m=0}^{h-1} i_{m+n+1} p^m \right) / (p^h - 1); \\ M &= \begin{cases} M = \bigoplus_{n=0}^{h-1} (R_\infty/p) e_n & \{e_n\} \text{ は } M \text{ の標準基底とする。} \\ M^k = \bigoplus_{n=0}^{h-1} ((t^{\beta_n^i} J_\infty^{[k-\alpha_n^i]} + J_\infty^{[k-\alpha_n^i+1]})/p) e_n \\ \varphi_M^{\alpha_n^i}(t^{\beta_n^i} e_n) = e_{n-1} \\ \nabla_M(e_n) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$\mathbb{F}_{p^h} \subset \bar{k} \subset R_\infty/pR_\infty$ より、各基本対象 $M = M(i)$ に対して環準同型

$$\nu: \mathbb{F}_{p^h} \longrightarrow \text{End}_{\underline{\mathbf{MF}}^\nabla}(M) \quad a \mapsto \nu_a$$

が $\nu(e_n) = a^{p^{-n}} e_n$ により定義できる。明らかにこれは単射である。

補題 9. $M = M(i), M' = M(i')$ を $\underline{\mathbf{MF}}^\nabla$ の基本対象で、 i, i' の値はともに $p-1$ より小さいとする。

(1) $\text{Hom}_{\underline{\mathbf{MF}}^\nabla}(M, M') \neq 0$ となる必要十分条件は、ある整数 l が存在して各整数 n に対して $q_n^i - q_{n+l}^{i'}$ が非負整数となることである。

(2) i の周期がちょうど h のとき、単射 ν は同型になる。

補題 10. $de < p-1$ とする。このとき、 $\underline{\mathbf{MF}}_{[0,d]}^\nabla$ の対象 M に対して M の部分対象である基本対象 $M(i)$ (i の値は de 以下) が存在する。

証明のポイントは、 $\sigma_\infty(t)M = t^p M \subset M^{d+1}$ および補題 6 における Filtered Module の構造である。

命題 7、補題 9、10 から定理 8 が示される。特に、 k が代数閉体のとき圏 $\underline{\mathbf{MF}}_{[0,d]}^\nabla$ はアルティン圏となり、その単純対象は基本対象である。

3. 表現の構成

$f: \text{Spec } \bar{A} \rightarrow \text{Spec } A$ を構造射とする。対数型の極つき crystal の理論より、 $f_{n*} O_{\text{crys}}$ (O_{crys} は $\text{Spec } \bar{A}_n$ 上の対数型の極つき crystalline site に付随する topos の構造層とする。) は $\text{Spec } A_n$ 上の準連接平坦 crystal となる [K2]。crystal の理論から、 $f_{n*} O_{\text{crys}}$ は自然に接続をもつ R_n -P.D.-多元環 P_n とみなせて [K1]、その P.D.-構造により減少列が定まる。また、crystalline cohomology の関手性より Frobenius および、上にあげた諸構造と可換な Galois 群 G の作用が定まる。これより、 P_n は圏 $\underline{\mathbf{MF}}_{\text{big}}^\nabla$ の対象とみなせる。 P_n の射影極限を P_∞ とかくと、 $P_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ も圏 $\underline{\mathbf{MF}}_{\text{big}}^\nabla$ の対象とみなせる。

Filtered Module の圏から p -進表現の圏への反変関手を

$$\begin{aligned} D: \underline{\mathbf{MF}}_{\text{big}}^\nabla &\longrightarrow \underline{\mathbf{Rep}}_{\mathbb{Z}_p}(G) \\ M &\longmapsto D(M) = \text{Hom}_{\underline{\mathcal{M}\mathcal{F}}_{\text{big}}^\nabla}(M, P_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \end{aligned}$$

と定める。ここで、 $\underline{\mathcal{M}\mathcal{F}}_{\text{big}}^\nabla$ は補足 2 における $\underline{\mathbf{MF}}_{\text{big}}^\nabla$ を含むアーベル圏で、 $D(M)$ への G は P_∞ をとうして作用する。

定理 11. レベルが $[0, d]$ である Filtered Module M に対して、 $R_\infty \otimes_{\mathbb{Z}_p} D(M)$ と M とは R_∞ -加群として同型である。(標準的ではない。) また、制限関手 $D: \underline{\mathbf{MF}}_{[0,d]}^\nabla \rightarrow \underline{\mathbf{Rep}}_{\mathbb{Z}_p}(G)$ は完全かつ充満忠実である。

証明は、剰余体が代数閉体のときに帰着される。そのとき、圏 $\underline{\mathbf{MF}}_{[0,d]}^\nabla$ はアルティン圏より基本対象の D による振る舞いをみればよい。

定理 12. 剰余体 k が代数閉体かつ $de < p-1$ とする。周期がちょうど h (h') である周期関数 i (i') の $\underline{\mathbf{MF}}_{[0,d]}^\nabla$ の基本対象 $M = M(i)$ ($M' = M(i')$) に対して以下が成り立つ。

(1) 補題 9.1 の同型 $\nu: F_{p^h} \rightarrow \text{End}_{\underline{\mathbf{MF}}_{[0,d]}^\nabla}(M)$ により $D(M)$ を F_{p^h} -ベクトル空間とみなしたとき、

$$\dim_{F_{p^h}} D(M) = 1$$

である。

(2) χ_h をレベル h の基本指標とする。すなわち、 $g \in G$ に対して $g(\pi^{p^{-h}}) = \chi_h(g)\pi^{p^{-h}}$ で定められる。このとき、 $D(M)$ への G の作用は

$$\chi_h^{i_0 + i_1 p + \cdots + i_{h-1} p^{h-1}}: G \rightarrow F_{p^h}^\times$$

により与えられる。

$$(3) \operatorname{Ext}_{\mathcal{M}_{\mathfrak{F}^\vee}^{\text{big}}}^1(M, P_1) = 0$$

(4) 自然な変換

$$\operatorname{Ext}_{\underline{\mathcal{M}\mathcal{F}^\vee}}^1(M, M') \longrightarrow \operatorname{Ext}_{\underline{\operatorname{Rep}}_{\mathbb{Z}_p}(G)}^1(\mathbb{D}(M'), \mathbb{D}(M))$$

は単射になる。

証明は具体的な計算によるが、かなり面倒である。

補足 13. 定理 12 は J.-P.Serre の予想[S]

X を K 上の非特異完備な代数多様体で A 上 *good reduction* とする。
 $d < p - 1$ ならば、 d 次 étale homology 群 $H_d(X \otimes_K \overline{K}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ への
 K の楕円群の各単純部分商への作用は下のかたちで与えられる。

$$\chi_h^{i_0 + i_1 p + \cdots + i_{h-1} p^{h-1}} \quad (0 \leq i_n < e)$$

と適合する。

参考文献

- [BO] Berthelot, P., Ogus, A., "Notes on crystalline cohomology," Princeton University Press, 1978.
- [Fa1] Faltings, G., *p-adic Hodge Theory*, J. Am. Math. Soc. 1 (1988), 255–299.
- [Fa2] Faltings, G., *Crystalline cohomology and p-adic Galois representations*, Algebraic and Analysis, Geometry and Number Theory (1990), 25–80, Johns Hopkins University Press.
- [Fo] Fontaine, J.-M., *Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local, construction d'un anneau Barsotti-Tate*, Ann. of Math 115 (1983), 529–577.
- [FL] Fontaine, J.-M., Laffaille, G., *Construction de représentations p-adiques*, Ann.Sci.Ec.Norm.Sup. 15 (1982), 547–608.
- [HK] 兵頭 治, 加藤 和也, *Semistable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles*, preprint.
- [K1] 加藤 和也, *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie*, Algebraic and Analysis, Geometry and Number Theory (1990), 191–224, Johns Hopkins University Press.
- [K2] 加藤 和也, *Semi-stable reduction and p-adic étale cohomology*, preprint.
- [S] Serre, J.-P., *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Invent.Math. 15 (1972), 259–331.