

弦のランダムな運動を記述する無限次元 確率微分方程式について

名大 理 舟木直久

無限次元確率微分方程式の一つの応用として、次の $\mathbb{R}^d$ 上の
確率微分方程式 (1) で定まる拡散過程によつて揺動される弦
のランダムな運動を考察する。

$$(1) \quad dx_t = a(x_t) dW_t + b(x_t) dt$$

ここで、 $a: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$: 有界かつ Lipschitz 連続、
 $b: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$: Lipschitz 連続で、 W_t は d 次元 Brown 運動とす
る。 $\mathbb{R}^d$ 内の連続な弦の全体は、パラメータ $\sigma \in [0, 1]$ を用い
て、Banach 空間 $C = C([0, 1], \mathbb{R}^d)$ をなすと考えることがで
きる。以下、最初に、 x_t によつて揺動される弦と考える弦
の運動を記述する C -値確率微分方程式を、折線近似とある
スケール変換によつて導き、次に、この方程式のいくつかの
性質を論ずる。

§1. 弦の方程式

弦の方程式を導く為に、まず弦を N 等分し、その各点に粒

子モ一つずつ置く。各粒子は、拡散係数 $\sqrt{N}a(x)$, drift 係数 $b(x)$ で、揺動力は独立であらうな拡散運動をし、隣り合った粒子間には、その大きさが $x \cdot N^2$ ($x > 0$) に比例する harmonic potential から決まる相互作用が働くものとする。弦の運動は、これらの N 粒子の折線近似で与える。即ち、 $X_t^{(N)}(\sigma)$ ($t \geq 0$, $\sigma \in [0, 1]$) を、この折線のパラメータ σ で決まる点の t 時での位置とすると、まず、 $\{X_t^{(N)}(\frac{k}{N})\}_{k=1}^N$ は次の確率微分方程式の解として与えられる。

$$dX_t^{(N)}(\frac{k}{N}) = \sqrt{N}a(X_t^{(N)}(\frac{k}{N}))dW_t(k) + b(X_t^{(N)}(\frac{k}{N}))dt + \frac{K}{2}\Delta^{(N)}X_t^{(N)}(\frac{k}{N})dt$$

$$1 \leq k \leq N.$$

但し、 $\{W_t(k)\}_{k=1}^N$ は、 N 個の独立な d 次元 Brown 運動、

$$\Delta^{(N)}X_t^{(N)}(\frac{k}{N}) = N^2 \{ X_t^{(N)}(\frac{k+1}{N}) - 2X_t^{(N)}(\frac{k}{N}) + X_t^{(N)}(\frac{k-1}{N}) \}$$

この方程式には、 $X_t^{(N)}(0)$, $X_t^{(N)}(\frac{N+1}{N})$ も現れる。従って、適当な境界条件が必要である。ここからは、以下の三通りを考える。

$$\begin{cases} \text{(i) (自由端)} & X_t^{(N)}(0) = X_t^{(N)}(\frac{1}{N}), \quad X_t^{(N)}(\frac{N+1}{N}) = X_t^{(N)}(1) \\ \text{(ii) (片方自由, 片方固定)} & X_t^{(N)}(0) = A_0, \quad X_t^{(N)}(\frac{N+1}{N}) = X_t^{(N)}(1) \\ \text{(iii) (固定端)} & X_t^{(N)}(0) = A_0, \quad X_t^{(N)}(\frac{N+1}{N}) = A_1. \end{cases}$$

但し、 $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^d$: fixed.

$\sigma \in [0, 1]$ に対しては、 $X_t^{(N)}(\sigma)$ は、上の $\{X_t^{(N)}(\frac{k}{N})\}_{k=1}^N$ の折線近似で与える。 i.e.

$$X_t^{(N)}(\sigma) = (N\sigma - k + 1) X_t^{(N)}\left(\frac{k}{N}\right) + (k - N\sigma) X_t^{(N)}\left(\frac{k+1}{N}\right) \\ \sigma \in \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right], \quad 1 \leq k \leq N$$

$\{X_t^{(N)}(\frac{k}{N})\}_{k=1}^N$ は, 上の確率微分方程式の解だから t について連続である。従って, $X_t^{(N)}(\cdot) \in C([0, \infty), \mathcal{C})$ (a.s.)。この確率過程が定める $C([0, \infty), \mathcal{C})$ 上の確率分布を $P^{(N)}$ と書く。

$X_t^{(N)}$ は, $N \rightarrow \infty$ のとき, 次の $\mathcal{C}$ 上の確率微分方程式の解 X_t に近づくことを加わが子。

(2) $dX_t(\sigma) = a(X_t(\sigma)) dB_t(\sigma) + b(X_t(\sigma)) dt + \frac{K}{2} \Delta X_t(\sigma) dt$
 $\equiv \equiv \equiv$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2}$ で, $B_t(\sigma)$ は, $L^2([0, 1], \mathbb{R}^d)$ 上の cylindrical な Brown 運動。(i.e. $\frac{dB_t}{dt}(\sigma)$ は, $(t, \sigma) \in [0, \infty) \times [0, 1]$ 上の d 次元 Gaussian white noise) 先の三つの場合に対応して, 方程式(2)には, それぞれ, 次のような境界条件がつく。

$$\begin{cases} \text{(i)} & \frac{\partial X_t}{\partial \sigma}(0) = \frac{\partial X_t}{\partial \sigma}(1) = 0 \\ \text{(ii)} & X_t(0) = A_0, \quad \frac{\partial X_t}{\partial \sigma}(1) = 0 \\ \text{(iii)} & X_t(0) = A_0, \quad X_t(1) = A_1 \end{cases}$$

より正確に言えば, 方程式(2)を半楕円形熱方程式と考えて, 積分方程式に直して, 数学的な意味を与え子と加わが子, その解は一意的に存在して,

$$X_t \in C([0, \infty), \mathcal{C}) \quad (\text{a.s.})$$

か言え子。(i.e. X_t は, $\mathcal{C}$ -値連続確率過程) 解 X_t の与え子確率分布を P とすれば, 初期値に関して, $X_0^{(N)}$ が X_0 の折

線近似であるという条件の下で,

定理1 $N \rightarrow \infty$ のとき, $P^{(N)}$ は, P に弱収束する。

故に, 方程式(2)が, x_t によ, て振動される弦のランダムな運動を記述すると思えること加えて, 以下の各節で, この方程式に関する性質を, いくつか論ずる。

§2. " $K \rightarrow \infty$ " の極限

パラメータ K は, 弦の弾性率を表わすと思える。そこで, (2)の解 X_t の K -依存性を明確にする為に, これを $X_t^{(K)}$ と書くとき, $X_t^{(K)}$ の $K \rightarrow \infty$ の極限は,

- (i) の自由端のときは, 一点に縮まり, その運動は, 弦の振動力を与え最初確率微分方程式(4)に従い,
 - (ii) の片方が固定端のときには, 一点 A_0 に縮まり,
 - (iii) の両方が固定端のときには, 線分 $\overline{A_0 A_1}$ に近づく,
- と予想できる。実際, 次のことが証明できる。

$P^{(K)}$: $X_t^{(K)}$ の定める $C([0, \infty), \mathbb{R})$ 上の確率分布,

$P^{(0)}$: 次の $X_t^{(0)}$ の定める確率分布.

但し, x_t は初期値 $x_0 = \int_0^1 X_0(\omega) d\omega$ (弦の重心) をもつ

(1)の解として,

$$X_t^{(k)}(\sigma) \equiv \begin{cases} x_t & (V_\sigma) & : \text{case (i)} \\ A_0 & (V_t, \sigma) & : \text{case (ii)} \\ (1-\sigma)A_0 + \sigma A_1 & (V_t) & : \text{case (iii)} \end{cases}$$

このとき,

定理 2 $k \rightarrow \infty$ のとき, $P^{(k)}$ は, $P^{(k)}$ に弱収束する。

更に, (ii), (iii) の場合には, $X_t^{(k)}$ の $X_t^{(k)}$ からの deviation

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{k} (X_t^{(k)} - X_t^{(k)})$$

について, 次のようなことをいえる。まず, Y_t を, 次のような二つの性質をもつ $\mathcal{C}$ -値定常過程とする。

① $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \Rightarrow \{Y_{t_i}\}_{i=1}^n$ は独立確率変数系

② 各時刻 t での Y_t の分布は,

(ii) のときには, 0 から出発する d 次元 Brown 運動の等しく, $\mathcal{C}$ 上の確率分布に等しく,

(iii) のときには, 0 から出発し, 0 に到達する d 次元 Brownian bridge の分布に等しい。

このとき,

定理 3. $k \rightarrow \infty$ のとき, $\{\sqrt{k}(X_t^{(k)} - X_t^{(k)}), t \geq 0\}$ の任意の有限次元分布は, $\{Y_t, t \geq 0\}$ のそれに収束する。

§3. ポテンシャル場 V 内の弦の運動

まず、有限次元の系に対する確率力学 (stochastic dynamics) について述べる。 $\mathbb{R}^n$ 上のポテンシャル場 $V(x)$ ($x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$) の中にある粒子の運動は、よく知られているように、Newton 方程式

$$\frac{d^2 x_t}{dt^2} = -\nabla V(x_t), \quad \nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)$$

によ、記述される。これは、決定論的な方程式であるが、一方、以下に述べるランダムな時間発展を与える方程式によって運動を記述する方法もある。それは、Kolmogorov が最初にした次のような確率微分方程式である。

$$(3) \quad dx_t = dw_t - \frac{1}{2} \nabla V(x_t) dt$$

ここで、 w_t は n 次元 Brown 運動。この方程式が、 V に対応する力学を与えると考えられる理由は、次のような点にある。ポテンシャル V に対する系 (運動量変数 p を考えない系) の平衡状態は、次の $\mathbb{R}^n$ 上の Gibbs 分布

$$d\mu(x) = e^{-V(x)} dx \quad (dx \text{ は Lebesgue 測度})$$

であると考えることができる。そこで、 μ を不変測度にもつような確率的時間発展があれば、それを V から決まる確率力学系とよぶのが自然であろう。方程式 (3) は、このような性質をもっている。

方程式 (3) は、あるいは、次のようにしても導かれる。まず、

Newton方程式に、摩擦の効果とランダムな力などの項を加え、次の方程式を考える。

$$\frac{d^2x_t}{dt^2} = -\gamma \frac{dx_t}{dt} - \frac{\gamma}{2} \nabla V(x_t) + \gamma \frac{dw_t}{dt}$$

ここで、 $\gamma \rightarrow \infty$ とすれば、方程式(3)が得られる。即ち、物理的には、ランダムな外力をもち、摩擦による抵抗の影響が大きい場合を記述しているとも考えられる。このような立場から、(3)は、Smoluchowskiの方程式とよばれることもある。

最近、このような確率力学は、無限次元の系に対しても考えられている。例えば、R. Lang: Unendlich-dimensionale Wienerprozesse mit Wechselwirkung I, II. Z. Wahr. verw. Geb. 38, 39 (1977) や、H. Doss et G. Royer: Processus de diffusion associe aux mesures de Gibbs sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. ibid. 46 (1978) 等が見られる。

弦の方程式(2)にもどる。ここでは、 $a(x) = I_d$ ($d \times d$ 単位行列)、 $b(x) = -\frac{1}{2} \nabla U(x)$ であるような場合を考える。但し、 U は次の条件を満たしているとする。

仮定 1. $U \in C^1(\mathbb{R}^d)$ で、下に有界。 ∇U は、Lipschitz 連続である。

このとき、弦の Hamiltonian

$$H(X) = \int_0^1 V(X(\sigma)) d\sigma + \frac{\kappa}{2} \int_0^1 \left| \frac{\partial X}{\partial \sigma}(\sigma) \right|^2 d\sigma, \quad X \in \mathcal{C}$$

と考えると, $H(X)$ の汎関数微分の kernel が,

$$\frac{\delta H}{\delta X}(X)(\sigma) = \nabla V(X(\sigma)) - \kappa \Delta X(\sigma)$$

であることに注意して, 方程式(2)は, 次のように書き直すことができる。

$$dX_t(\sigma) = dB_t(\sigma) - \frac{1}{2} \frac{\delta H}{\delta X}(X_t)(\sigma) dt$$

これは, 無限次元空間 $\mathcal{C}$ 上の Kolmogorov の方程式 (あるいは, Smoluchowski の方程式) であるといえる。従って, その不変測度は, $\mathcal{C}$ 上の Feynmann 測度

$$d\mathbb{L}(X) = \prod_{\sigma \in [0,1]} dX(\sigma)$$

を用いて,

$$e^{-H(X)} d\mathbb{L}(X)$$

となることを予想できる。実際, 以下のことを加える。

まず, W_0 と, 時間変数 σ をもつ d 次元 Brown 運動とし, $\mathcal{C}$ 上の測度 $\mu^{(k)}$ を, (i)~(iii) のそれぞれの場合に応じて次に述べるように定義する。

(i) のとき, $\mu^{(k)}$ は, 初期分布 dx (d 次元 Lebesgue 測度) をもつ確率過程 $W_{\frac{\sigma}{k}} (\sigma \in [0,1])$ の導く測度。

(ii) のとき, $\mu^{(k)}$ は, 点 A_0 から出発する Brown 運動の time change $W_{\frac{\sigma}{k}} (\sigma \in [0,1])$ の導く確率測度。

(iii) のとき, $\mu^{(k)}$ は, 点 A_0 から出発し, 点 A_1 に到達する pinned Brownian motion $W_{\frac{\sigma}{k}}^{\mu^{(k)}} (\sigma \in [0, 1])$ の導く確率測度。

ν を, 次のような $\mu^{(k)}$ に対して絶対連続な $\mathbb{C}$ 上の non-negative measure とする。

$$d\nu(X) = \exp \left\{ - \int_0^1 U(X(\sigma)) d\sigma \right\} d\mu^{(k)}(X)$$

このとき,

定理 4. 仮定 1 の下で, ν は X_t の不変測度。更に強く, 可逆測度 (reversible measure) でもある。

次に, ポテンシャル U が発散する場合も, 境界条件 (iii) (固定端) の下を考へる。次のような仮定をおく。

仮定 2. $U: \mathbb{R}^d \rightarrow (-\infty, \infty]$: 連続, 下に有界。

$$U \in C^1(D), \quad D = \{x \in \mathbb{R}^d : U(x) < \infty\}$$

$\forall U$ は, $D_N = \{x \in \mathbb{R}^d : U(x) < N\}$ 上 Lipschitz 連続 ($\forall N=1, 2, \dots$)

$A_0, A_1 \in D$ で, D 内で結べる。

このような U に対して, (2) の定常解とよべるものを ε 以下のようにして構成する。まず, U を D_N° では適当に cut-off

して仮定1を満たすように作り直し, $U^{(N)}$ とおく. $U^{(N)}$ に対する(2)の定常解は, 定理4により作り出されることができる. この確率過程が誘導する $C((-\infty, \infty), \mathbb{C})$ 上の確率分布を $P^{(N)}$ とおく. このとき, 次の仮定の下で, $\{P^{(N)}\}_{N=1}^{\infty}$ の tightness が証明できる.

仮定3.
$$\sup_N E^{\mu^{(N)}} \left[\int_0^1 |V U^{(N)}(X(s))|^{10} ds e^{-\int_0^1 U^{(N)}(X(s)) ds} \right] < \infty$$

注意 次のポテンシャル V は, $\forall K > 0$ に対して, この仮定を満たす.

$$U(x) = U(|x|), \quad 0 < r_0 < \infty, \quad \alpha > 2$$

$$U(r) = \begin{cases} \infty & \text{if } r \leq r_0 \\ (r-r_0)^{-\alpha} & \text{if } r > r_0. \end{cases}$$

命題 $\{P^{(N)}; N=1, 2, \dots\}$ の任意の極限 P とすれば, P の定常分布は, Z を規格化定数として,

$$d\nu(X) = Z^{-1} \exp \left\{ -\int_0^1 U(X(s)) ds \right\} d\mu^{(N)}(X).$$

二点 A_0, A_1 を結ぶ $\bar{D}$ (D の閉包) 内の連続な弦の全体を, $C(\bar{D}; A_0, A_1)$ とおけば, $\text{supp.}(\nu)$ は, この集合に含まれる.

A_0, A_1 を含む $\bar{D}$ の連結成分の基本群を π_1 とすれば, π_1 の元 i に対して, $\mathcal{C}(\bar{D}; A_0, A_1)$ の連結成分 $\mathcal{C}_i$ が対応し, 次のような分解が得られる。

$$\mathcal{C}(\bar{D}; A_0, A_1) = \bigcup_{i \in \pi_1} \mathcal{C}_i \quad (\text{disjoint 分解})$$

この分解は, 次のような P の分解と一致する。

定理 5. $P = \sum_{i \in \pi_1} a_i P_i$

但し, $a_i = \nu(\mathcal{C}_i)$

$$P_i = P(\cdot \mid C((-\infty, \infty), \mathcal{C}_i)) \quad (\text{条件付き確率})$$

即ち, ポテンシャル V が発散する場合に, 方程式(2)を考えることができれば, それは, $\bar{D}$ の各一次元ホモトピー類に応じて, それぞれ異なる定常な時間発展と見なせるであろう。

次に, ホモトピー類ごとに, 確率過程の分布 $P_i = P_i^{(K)}$ が, 弾性率 K を無限大に近づけたときにどのようなものに収束するかを考える。但し, $n=2$ では, $d=2$ とし, D は凸でない $\mathbb{R}^2$ 内の多角形とする。

まず, 次のような Molchanov の結果: Diffusion processes and Riemannian geometry. Russian Math. Surveys 30 (1975)

に注意する。 i.e.

$\tilde{D}$: D の普遍被覆面

$p_{\tilde{D}}(t, x, y)$: $\tilde{D}$ 上の吸収壁 Brown 運動の遷移確率 ($x, y \in \tilde{D}$)

とするとき,

命題 $x, y \in \tilde{D}$, $\gamma_{x,y}$: x, y を結ぶ $\tilde{D}$ 内の最短曲線

$\gamma_{x,y}$ は, $\partial\tilde{D}$ に transversal であるとするば,

$$p_{\tilde{D}}(t, x, y) = O(t^{k-1} e^{-\frac{\hat{r}^2(x,y)}{2t}}) \quad , \quad (t \rightarrow 0)$$

但し, k は, $\gamma_{x,y}$ による定数で, $\hat{r}$ は, $\tilde{D}$ 上の距離。

この評価から, Molchanov は, $\mu_i^{(k)} = \mu^{(k)}(\cdot | \mathcal{C}_i)$ とおくとき,

$$\mu_i^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \int_{\gamma_{A_0, A_1}}$$

を示している。但し, γ_{A_0, A_1} は, $\mathcal{C}_i$ の中の最短曲線。 $d=2$

より, 二のようなものは一意的に存在する。更に, ポテンシャル V が,

$$\text{仮定 4} \quad V(x) \leq C \cdot (\text{dis}(x, \partial D))^{-\alpha} \quad , \quad \alpha < 1 + \sqrt{3}$$

を満足しているば,

$$\nu_i^{(k)} = \nu^{(k)}(\cdot | \mathcal{C}_i) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \int_{\gamma_{A_0, A_1}}$$

であることが証明できる。従って、2,

$$X_{t,i}^{(k)}(\sigma) = \bar{\gamma}_{A_0, A_1}(\sigma) \quad (\forall t)$$

とおけば,

定理 6. $P_i^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \delta_{X_{\cdot, i}^{(k)}}$

が成り立つ。

§4. 2次元の Brownian string

特に, $d=2$, $a(x) = I_2$, $b(0)$, 境界条件 (i) (自由端) の場合を扱う。i.e. 考える方程式は,

$$\begin{cases} dX_t(\sigma) = dB_t(\sigma) + \frac{\kappa}{2} \Delta X_t(\sigma) dt \\ \frac{\partial X_t}{\partial \sigma}(0) = \frac{\partial X_t}{\partial \sigma}(1) = 0 \end{cases}$$

X_t が, $\mathbb{C}$ -値強 Markov 過程であることと, その重心の運動は 2次元 Brown 運動であることに注意して, 次の結果が得られる。

定理 7. (i) X_t は, $\mathbb{C}$ 値確率過程として, recurrent.

i.e. $P(X_{t_n} \in D, \exists t_n \uparrow \infty, n=1, 2, \dots) = 1$, $\forall D: \mathbb{C}$ の開集合.

(ii) 弦 $X_t(\sigma)$ は, $\mathbb{R}^2$ の任意の点と何回でも通過する。

i.e. $P(X_{t_n}(\sigma_n) = x, \exists \sigma_n \in [0, 1], \exists t_n \uparrow \infty, n=1, 2, \dots) = 1, \forall x \in \mathbb{R}^2$.

§ 5. 一般化

方程式(2)の一般化として, 可分, 実 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の, 次のような半線形確率微分方程式と考へる。

$$(4) \begin{cases} dX_t = a(X_t) dB_t + b(X_t) dt - \lambda A X_t dt & , \quad t > 0 \\ X_0 \in \mathcal{H} \end{cases}$$

ここで, a, b, A, B_t は, 次のようなものであるとする。

① A は, $\mathcal{H}$ 上の non-negative self-adjoint operator.

pure point spectrum $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$: $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ とする。

$k \rightarrow \infty$ のとき, $\lambda_k \sim c k^{1+\delta}$ ($\exists c, \delta > 0$)

② $a : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) = \{\mathcal{H} \text{ 上の有界線形作用素全体}\}$

$$\|a^*(X_1) - a^*(X_2)\| \phi_k \leq K \|X_1 - X_2\| \quad \text{for } \forall X_1, X_2 \in \mathcal{H}, \forall k=1, 2, \dots$$

但し, $a^*(X)$ は $a(X)$ の adjoint operator で, ϕ_k は, 固有値 λ_k に対応する A の normalized eigenvector.

③ $b : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

$$\|b(X_1) - b(X_2)\| \leq K \|X_1 - X_2\| \quad \text{for } \forall X_1, X_2 \in \mathcal{H}$$

④ B_t は, $\mathcal{H}$ 上の cylindrical Brownian motion. i.e.,

$\{B_t : t \geq 0\}$ は, $\mathcal{H}$ 上の random linear functionals の族

で, $B_0 = 0$ かつ,

$\forall \phi \in H$ ($\phi \neq 0$) に対し, $\frac{1}{\|\phi\|} B_t(\phi)$ は, 一次元 Brown 運動

であるようなもの。

のとき, D. Dawson: Stochastic evolution equations and related measure processes. J. Multivariate Anal. 5 (1975) によつて, 方程式 (4) の

$$\sup_{t \in [0, T]} E[\|X_t\|^2] < \infty \quad (\forall T < \infty), \quad X_t \in C([0, \infty), \mathcal{H}) \quad (a.s.)$$

を満たす解の存在と一意性加示されている。

(I) まず, §2 の一般化として, 方程式 (4) の解 $X_t = X_t^{(K)}$ の, $K \rightarrow \infty$ での極限を考える。== 2' は, 次のような仮定をおく。

$$\|a^*(X)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq K, \quad \|b(X)\| \leq K \quad \text{for } \forall X \in \mathcal{H}$$

次のように, 四通りの場合に分けて, 結論が得られる。

(i) A の最小固有値 $\lambda_1 = 0$ のとき,

P_r を, λ_1 に属する固有空間への直交^射影として, 次の方程式を考える。

$$\begin{cases} dY_t = P_r a(Y_t) dB_t + P_r b(Y_t) dt \\ Y_0 = P_r X_0 \end{cases}$$

この方程式の解は, 例えば, M. Yor: Existence et unicité de diffusions à valeurs dans un espace de Hilbert. Ann. Inst. Poincaré 10 (1974) によつて, 一意的に存在し

$$Y_t \in C([0, \infty), P_r \mathcal{H}) \quad (a.s.)$$

であることがわかる。 $X_t^{(K)}$ は, $K \rightarrow \infty$ のとき, 次の意味で,

Y_t に近づく。 : 確率 1 で,

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \|X_t^{(K)} - Y_t\| = 0, \quad t \in (0, \infty) \text{ について広義一様}$$

が成立する。

(ii) $\lambda_1 > 0$ で, $a(0) \neq 0$ のとき,

$\{Y_t, t \geq 0\}$ を, 次の特性汎関数をもつ独立正 $\mathcal{H}$ -値確率変数系とする。

$$E[e^{i\langle Y_t, \phi \rangle_{\mathcal{H}}}] = e^{-\frac{1}{2} \| \phi \|^2}$$

$$\| \phi \|^2 = \sum_{j,k=1}^{\infty} \frac{\langle a_{(0)}^* \phi_j, a_{(0)}^* \phi_k \rangle}{\lambda_j + \lambda_k} \langle \phi, \phi_j \rangle \langle \phi, \phi_k \rangle$$

このとき, $\sqrt{K} X_t^{(K)}$ は, 次の意味で Y_t に近づく。

$$: \forall n, \quad 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n, \quad \forall \psi_i \in \mathcal{H} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

に対し,

$$\sum_{i=1}^n \langle \sqrt{K} X_{t_i}^{(K)}, \psi_i \rangle \xrightarrow{K \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \langle Y_{t_i}, \psi_i \rangle \quad (\text{in law})$$

(iii) $\lambda_1 > 0$ で, $a(0) = 0$, $b(0) \neq 0$ のとき,

確率 1 で,

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \| \sqrt{K} X_t^{(K)} - A^{-1} b(0) \| = 0, \quad t \in (0, \infty) \text{ について広義一様}$$

が成立する。

(iv) $\lambda_1 > 0$ で, $a(0) = 0$, $b(0) = 0$ のとき,

a, b は, $X=0$ で Fréchet 微分可能でありと仮定し, 次の方程式を考へる。

$$\begin{cases} dY_t = P_r a'(0)(Y_t) dB_t + P_r b'(0)(Y_t) dt \\ Y_0 = P_r X_0 \end{cases}$$

$= =$ で, $a'(0)(\cdot)$, $b'(0)(\cdot)$ は, それぞれ, a , b の, 0 での Fréchet derivative. やはり, $=$ の方程式の解 $Y_t \in C([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ (a.s.) の一意的存在が, 以下,

$$\lim_{K \rightarrow \infty} E[\|e^{\lambda_K t} X_t^{(K)} - Y_t\|^2] = 0,$$

$t \in (0, \infty)$ について広義一様

を示すことができよう。

(II) 次に, 方程式(2)の一般化, あるいは, 方程式(4)の特殊化として, 方程式(2)で, パラメータ σ のとり得る値の空間を $[0, 1]$ から, $\mathbb{R}^m$ 内のある有界領域 G に拡張する $=$ と考える。 $=$ で, G の境界は十分滑らかで, G は restricted cone property をもつとする。 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$, その上の作用素 A は, 次のようなものであるとする。

$$\mathcal{H} = L^2(G, \mathbb{R}^d) = \sum_{i=1}^d \oplus \tilde{\mathcal{H}}_i$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_i = \tilde{\mathcal{H}} = L^2(G) \quad (1 \leq i \leq d)$$

$$A = \sum_{i=1}^d \oplus A_i$$

各 A_i は, 次のようにして決まる $\tilde{\mathcal{H}}$ 上の作用素である。

$$(i) \quad \mathcal{D}(A_i) = \{u \in H^{2m}(G); B_j^i u = 0 \text{ on } \partial D, 1 \leq j \leq m\}$$

$m \in \mathbb{Z}^+$, $\{B_j^i\}_{j=1}^m$ は boundary operators の normal system.

(ii) $\mathcal{Q}(A_i) \perp$, A_i は G 上の uniformly elliptic differential operator で定義されている。

$(A_i, \mathcal{Q}(A_i))$ は, self-adjoint, non-negative op. であるとする。

a, b は, 先に述べたような条件を満たしているとする。従って, それぞれ,

$$a(X) = \{a_{ij}(X)\}_{1 \leq i, j \leq d}, \quad a_{ij}(X) \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}})$$

$$b(X) = \{b_i(X)\}_{1 \leq i \leq d}, \quad b_i(X) \in \tilde{\mathcal{H}}$$

と書ける。又, $\mathcal{H}$ 上の cylindrical Brownian motion B_t は, d 個の独立な $\tilde{\mathcal{H}}$ 上の cylindrical Brownian motions の系 $\{B_t^i\}_{i=1}^d$ であるから, 方程式 (4) は, 二の場合には,

$$(4)' \begin{cases} dX_t^i = \sum_{j=1}^d a_{ij}(X_t) dB_t^j + b_i(X_t) dt - \kappa A_i X_t^i dt, \\ \quad 1 \leq i \leq d \\ X_t = (X_t^i)_{i=1}^d \in \mathcal{H} \end{cases}$$

である。

R. Arima: On general boundary value problem for parabolic equations. J. Math. Kyoto Univ. 4 (1964) 1-5
 には, e^{-tA_i} の 基本解 $p(t, \sigma, \tau) \in L^2(G \times G)$ ($t: \text{fix}$)
 は, 次のように評価されることを知られている。

$$\left| \frac{\partial}{\partial \tau_i} p(t, \sigma, \tau) \right| \leq C t^{-\frac{n+1}{2m}} \exp \left\{ -C \left(\frac{|\sigma - \tau|^{2m}}{t} \right)^{\frac{1}{2m+1}} \right\}$$

$$(t, \sigma, \tau) \in (0, T) \times \bar{G} \times G, \quad 1 \leq i \leq n$$

この評価に注意すれば、方程式 (4)' の解の連続性について、次のような結果が得られる。

定理 $C(\bar{G}; \mathbb{R}^d)$ に属する初期関数 X_0 をもつ、方程式 (4)' の解 $X_{t(\sigma)}$ の (t, σ) について jointly continuous な version

$$X_{t(\sigma)} = X(t, \sigma) \in C([0, \infty) \times \bar{G}, \mathbb{R}^d) \quad (a.s.)$$

が存在する。