

ジャンプ拡散過程上のアメリカン・プット・オプションに対する マルチレベル・モンテカルロシミュレーション

住本 賢吾^{*1}, 穴太 克則^{*2}

^{*1}: 芝浦工業大学大学院 理工学研究科 システム理工学専攻 数理科学部門

^{*2}: 芝浦工業大学 システム理工学部 数理科学科

Kengo Sumimoto^{*1}, Katsunori Ano^{*2}

^{*1}: Graduate School of Engineering and Science, Shibaura Institute of Technology

^{*2}: Department of Mathematical Sciences, Shibaura Institute of Technology

概要

マルチレベル・モンテカルロ (Multilevel Monte Carlo, MLMC) 法は, Giles(2008) が標準的なモンテカルロ (Standard Monte Carlo, SMC) 法において計算コストが掛かる問題を解消するために発案された手法である. そして, Giles(2008) の論文発表以降, 現在もコンピュータ・ファイナンス, 応用確率論の領域で主に海外で活発に研究が行われている. ここでは, 本当に MLMC 法は SMC 法よりも有効なのかどうかをジャンプ拡散過程上のアメリカン・プット・オプションによって検証する.

1 マルチレベル・モンテカルロ法

MLMC 法と SMC 法の異なる点は, 時間幅の取り方である.

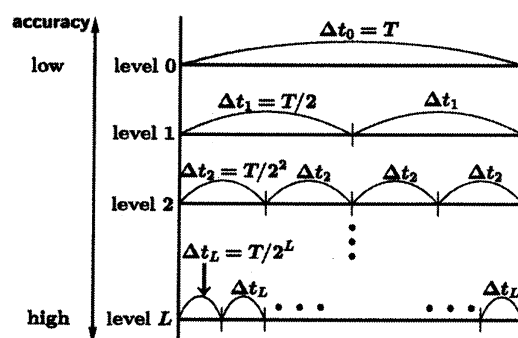


図 1: MLMC 法での時間幅の取り方

サンプルパスを発生させる際, SMC 法で扱う時間幅は 1 種類だけなのに対して, MLMC 法では $L+1$ 種類の時間幅を扱う (図 1 参照). また, MLMC 法での各レベルの時間幅の長さ Δt_ℓ は次で与える.

$$\Delta t_\ell = \frac{T}{2^\ell}, \quad \ell = 0, 1, \dots, L (< \infty) \quad (1)$$

このように $L+1$ 種類の時間幅を扱うことで, SMC 法よりも少ない計算コストで同等の精度のシミュレーションを行うことが出来る.

MLMC 法は SMC 法よりも計算コストや分散の観点で理論的に優れていることは Giles(2008) 論文によって既に示されているが, 本論文では, シミュレーションを用いて MLMC 法と SMC 法を比較して, 本当に MLMC 法は SMC 法よりも優れているのかということを示す.

- オプション: アメリカン・プット・オプション,
- アルゴリズム: Longstaff-Schwartz Method(LSM),
- サンプルパス: ジャンプ拡散過程に従うもの

を用いて検証する.

また, シミュレーションにおいて平均二乗誤差 (Mean Square Error, MSE) を $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ に抑えるときにどれだけの低計算コストで効率よくそれを実現出来るかが課題になるが, Giles(2008) の論文でもこの課題について考察されている. SMC 法での計算コストは $\mathcal{O}(\epsilon^{-3})$ だが, MLMC 法では $\mathcal{O}(\epsilon^{-2}(\log \epsilon)^{-2})$ に計算コストを削減出来ることを示している. 以下が Giles(2008) の主定理である.

定理 1.1 *Let P denote a function of the solution of $\{S_t\}_t$, and, let $\hat{P}_\ell$ denote the corresponding level ℓ numerical approximation using a numerical discretisation with time step $h_\ell = \frac{T}{M_\ell}$.*

If there exists independent estimators $\hat{Y}_\ell$ based on N_ℓ Monte Carlo samples, and positive constants $\alpha, \beta, \gamma, c_1, c_2, c_3$, s.t. $\alpha \geq \frac{1}{2} \min(\beta, \gamma)$ and

$$(i) \quad |\mathbb{E}[\hat{P}_\ell - P]| \leq c_1 h_\ell^\alpha,$$

(ii)

$$\mathbb{E}[\hat{Y}_\ell] = \begin{cases} \mathbb{E}[\hat{P}_0] & (\ell = 0), \\ \mathbb{E}[\hat{P}_\ell - \hat{P}_{\ell-1}] & (\ell > 0), \end{cases}$$

$$(iii) \quad V[\hat{Y}_\ell] \leq c_2 N_\ell^{-1} h_\ell^\beta,$$

$$(iv) \quad C_\ell \leq c_3 N_\ell h_\ell^{-1}, \text{ where } C_\ell \text{ is the computational complexity of } \hat{Y}_\ell,$$

then there exists a positive constant c_4 such that for any $\epsilon < e^{-1}$ there are values L and N_ℓ for which the multilevel estimator

$$\hat{Y} = \sum_{\ell=0}^L \hat{Y}_\ell$$

has a mean-square-error with bound

$$\text{MSE} \equiv \mathbb{E} \left[(\hat{Y} - \mathbb{E}[P])^2 \right] < \epsilon^2$$

with a computational complexity C with bound

$$C \leq \begin{cases} c_4 \epsilon^{-2} & (\beta > 1), \\ c_4 \epsilon^{-2} (\log \epsilon)^2 & (\beta = 1), \\ c_4 \epsilon^{-2 - (\gamma - \beta)/\alpha} & (0 < \beta < 1). \end{cases}$$

2 シミュレーション

シミュレーションの回数やジャンプの強度 λ , ジャンプの大きさの分散等を変化させて SMC 法と MLMC 法の価格付けの結果とそのときの分散の大きさを比較して, MLMC 法は SMC 法よりも優れているか検証する.

また, シミュレーションの条件として次を与える.

- 原資産 S の連続項は幾何ブラウン運動 $dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$ に従う.
- SMC 法での時間幅の長さは $\Delta t = 1/2^7$.
- MLMC 法での最小レベルは 1, 最大レベルは 7.
- 基底関数 (LSM で使用) は Laguerre 関数 $L_n(x) = \frac{e^{-x}}{n!} e^x (x^n e^{-x})^{(n)}$ ($n = 0, 1, \dots, 4$) を使用する.

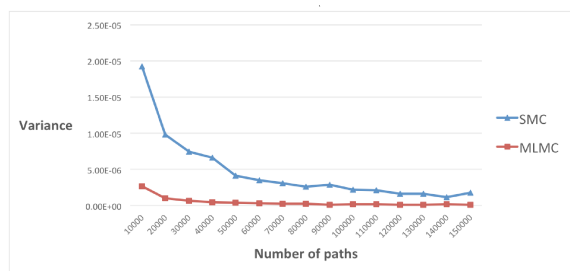
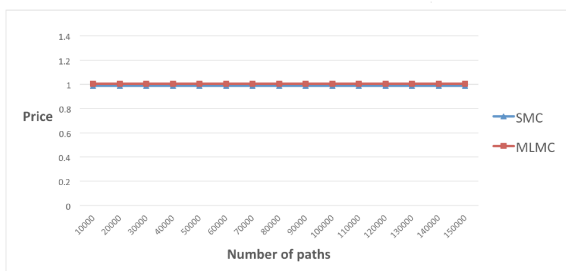
2.1 ITM(In The Money) ケース

2.1.1 シミュレーション回数 N を変化したとき

シミュレーションでは, 次のインプットを与えて検証した.

$$S(0) = 1, r = 0.05, \sigma = 1, T = 1, K = 1.5, \lambda = 1,$$

$$\text{ジャンプの大きさ} : J_i = -S(t)(1 - e^{Y_i}), Y_i \sim N(-\log 2, 0.3^2).$$



• オプション価格

当然のことながら, SMC 法と MLMC 法の価格はシミュレーション回数に関係なく一致した.

- 分散

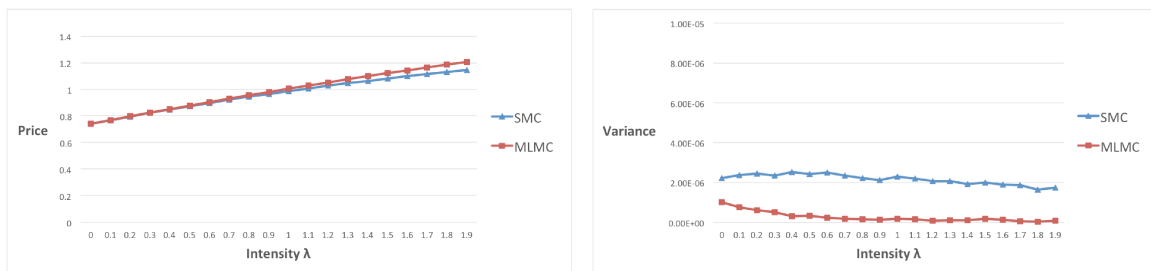
同じシミュレーション回数だと常に MLMC 法の分散の方が SMC 法の分散よりも小さくなった。この結果より、MLMC 法は SMC 法よりも分散が減少したことが示された。

具体的に、MLMC 法の分散の大きさは SMC 法の分散の 1/10 前後まで抑えられており、シミュレーション回数が MLMC 法で 2 万回の時点で SMC 法で 14 万回るときより分散が小さくなった。

2.1.2 λ を変化させたとき

シミュレーションでは、次のインプットを与えて検証した。

$$S(0) = 1, r = 0.05, \sigma = 1, T = 1, K = 1.5, N = 10^5, J_i = -S(t)(1 - e^{Y_i})(Y_i \sim N(-\log 2, 0.3^2)).$$



- オプション価格

λ が大きくなるにつれて SMC 法, MLMC 法共にオプション価格は上昇。また, $\lambda > 1$ となった辺りで SMC 法と MLMC 法のオプション価格の間に誤差が発生した。

- 分散

λ を変化させても、常に MLMC 法の分散の方が SMC 法の分散よりも小さくなった。 $\lambda = 0$ のときは MLMC 法の分散は SMC 法の分散の 1/2 弱程度までしか抑えられていないが、 $\lambda = 1.9$ ときは 1/20 以下まで抑えられた。

また、 λ が大きくなるにつれて SMC 法, MLMC 法共に分散は減少傾向にあった。

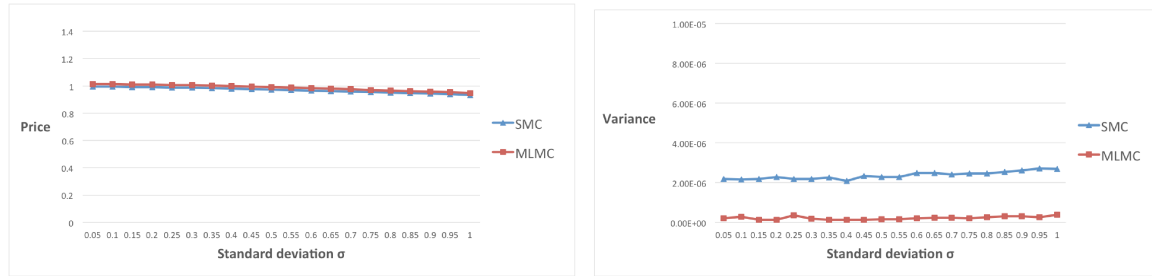
2.1.3 ジャンプの大きさの分散 σ_{Jump} を変化させたとき

インプット : $S(0) = 1, r = 0.05, \sigma = 1, T = 1, K = 1.5, N = 10^5, \lambda = 1$

$$J_i = -S(t)(1 - e^{Y_i})(Y_i \sim N(-\log 2, \sigma_{Jump}^2)).$$

- オプション価格

当然のことながら、 σ_{Jump} が変化しても SMC 法と MLMC 法のオプション価格は一致した。また、 σ_{Jump} が大きくなるにつれてオプション価格は SMC 法, MLMC 法共に若干減少した。



• 分散

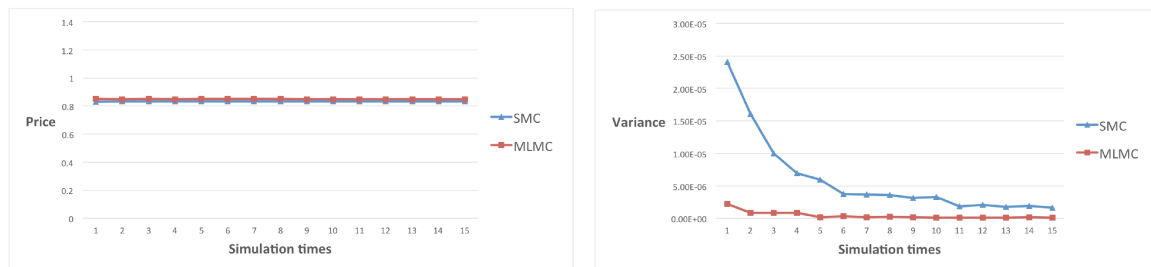
σ_{Jump} を変化させても、常に MLMC 法の分散の方が SMC 法の分散よりも小さくなった。
 σ_{Jump} の大きさに関わらず、MLMC 法の分散は SMC 法の分散の 1/10 前後まで抑えられた。
 また、 σ_{Jump} が大きくなるにつれて SMC 法、MLMC 法共に分散が若干上昇傾向にあった。

2.2 ATM(At The Money) ケース

2.2.1 シミュレーション回数を変化させたとき

インプット : $S(0) = 1.5, r = 0.05, \sigma = 1, T = 1, K = 1.5, \lambda = 1,$

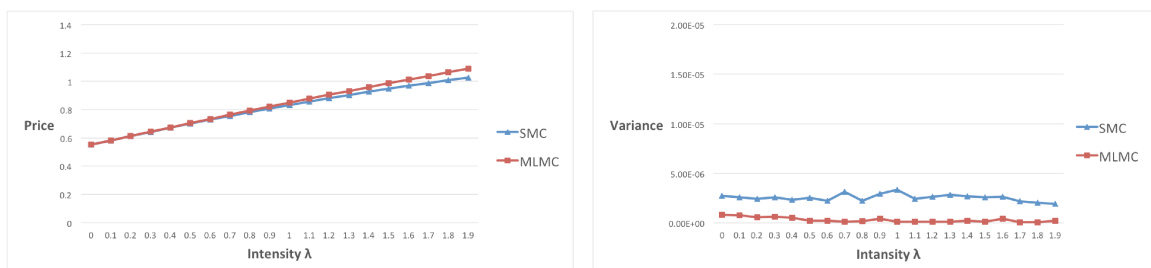
$$J_i = -S(t)(1 - e^{Y_i})(Y_i \sim N(-\log 2, 0.3^2)).$$



2.2.2 λ を変化させたとき

インプット : $S(0) = 1.5, r = 0.05, \sigma = 1, T = 1, K = 1.5, N = 10^5,$

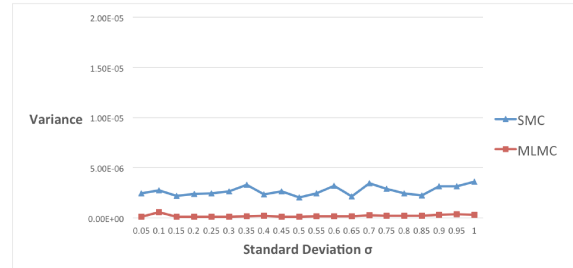
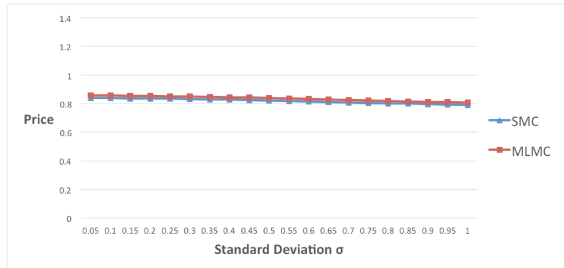
$$J_i = -S(t)(1 - e^{Y_i})(Y_i \sim N(-\log 2, 0.3^2)).$$



2.2.3 ジャンプの大きさの分散 σ_{Jump} を変化させたとき

インプット : $S(0) = 1.5, r = 0.05, \sigma = 1, T = 1, K = 1.5, N = 10^5, \lambda = 1$

$$J_i = -S(t)(1 - e^{Y_i})(Y_i \sim N(-\log 2, \sigma_{Jump}^2)).$$



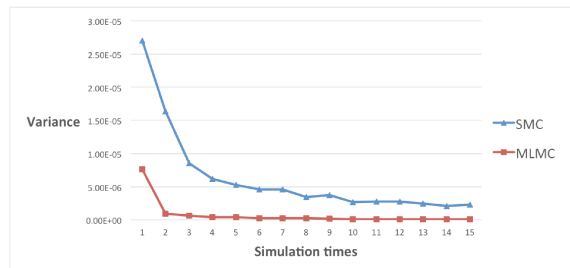
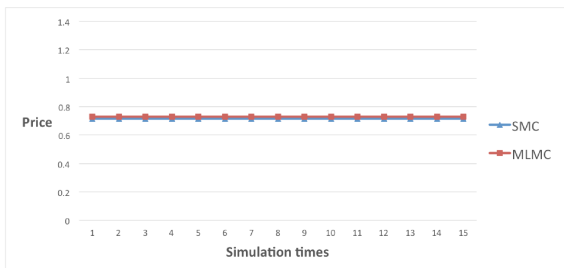
どのシミュレーション結果も、オプション価格・分散共に ITM ケースと同じような傾向が見られ、ATM ケースでも MLMC 法は SMC 法よりも分散が減少したことが示された。

2.3 OTM(Out of The Money) ケース

2.3.1 シミュレーション回数を変化させたとき

インプット : $S(0) = 2, r = 0.05, \sigma = 1, T = 1, K = 1.5, \lambda = 1,$

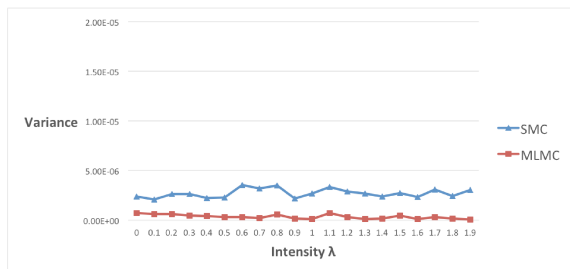
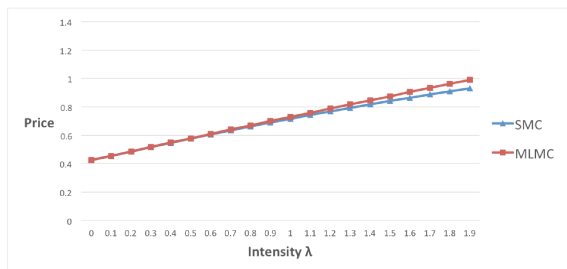
$$J_i = -S(t)(1 - e^{Y_i})(Y_i \sim N(-\log 2, 0.3^2)).$$



2.3.2 λ を変化させたとき

インプット : $S(0) = 2, r = 0.05, \sigma = 1, T = 1, K = 1.5, N = 10^5,$

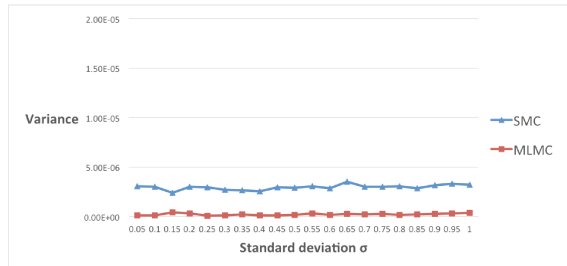
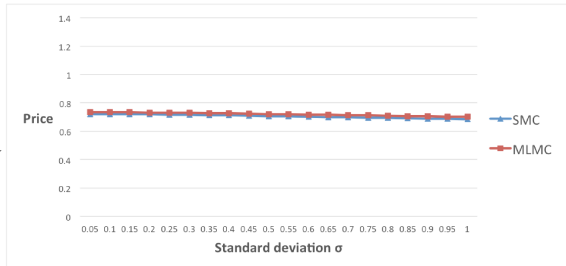
$$J_i = -S(t)(1 - e^{Y_i})(Y_i \sim N(-\log 2, 0.3^2)).$$



2.3.3 ジャンプの大きさの分散 σ_{Jump} を変化させたとき

インプット : $S(0) = 2, r = 0.05, \sigma = 1, T = 1, K = 1.5, N = 10^5, \lambda = 1$

$$J_i = -S(t)(1 - e^{Y_i})(Y_i \sim N(-\log 2, \sigma_{Jump}^2)).$$



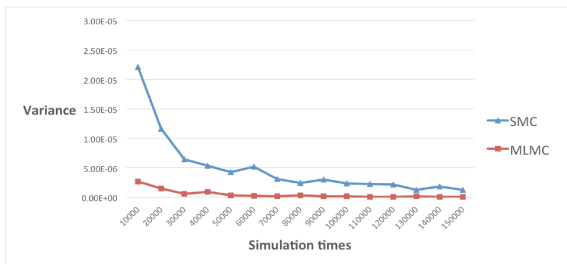
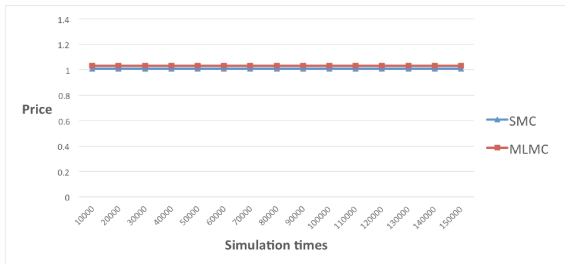
OTM ケースでもオプション価格・分散共に ITM ケース・ATM ケースと同じような傾向が見られ, MLMC 法は SMC 法よりも分散が減少したことが示された。

2.4 ジャンプ大きさが一様分布に従う場合

2.4.1 シミュレーション回数を変化させたとき

インプット : $S(0) = 1, r = 0.05, \sigma = 1, T = 1, K = 1.5, \lambda = 1,$

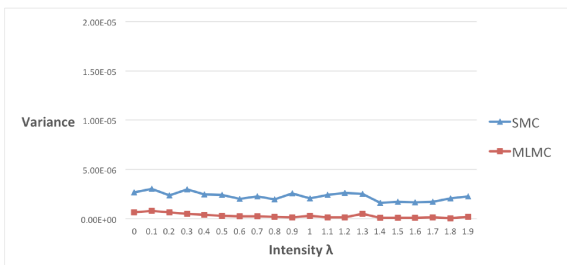
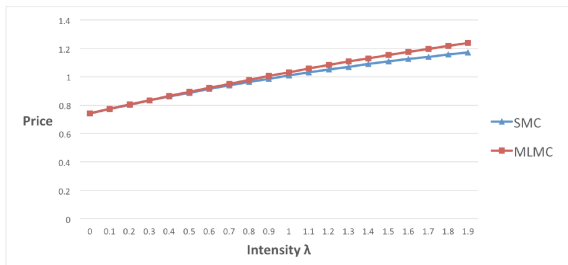
$$J_i = -S(t)Y_i(Y_i \sim U(0, 1)).$$



2.4.2 λ を変化させたとき

インプット : $S(0) = 1, r = 0.05, \sigma = 1, T = 1, K = 1.5, N = 10^5,$

$$J_i = -S(t)Y_i(Y_i \sim U(0, 1)).$$



ジャンプの大きさが一様分布に従う場合でも, オプション価格・分散共にジャンプが正規分布に従う場合と同じような傾向が見られ, MLMC 法は SMC 法よりも分散が減少したことが示された。

3 結論

結論として, 以上のシミュレーションの結果から,

- オプション: アメリカン・プット・オプション,
- アルゴリズム: Longstaff-Schwartz Method(LSM),
- サンプルパス: ジャンプ拡散過程に従うもの

を用いて SMC 法と MLMC 法を比較したシミュレーションでは, MLMC 法は SMC 法よりも分散が減少したことが示された. しかし, ジャンプの強度 λ を変化させたときに SMC 法と MLMC 法のオプション価格の間に誤差が生じたので, その原因を見つけて改善する必要がある.

参考文献

- [1] M. B. Giles, (2008), "Multilevel Monte Carlo Path Simulation", Operations Research, Vol. 56, No. 3, 607-617.
- [2] S. E. Shreve, (2004), 『ファイナンスのための確率解析 II』, シュプリンガー・ジャパン.
- [3] 赤間世紀, 山口喜博, (2006), 『R による統計入門』, 技報堂出版.
- [4] 乾仁, (2014), "マルチレベル・モンテカルロ法", 芝浦工業大学数理科学科談話会.