

精度保証付き制御系解析・設計

管野 政明

MASAAKI KANNO

CREST 独立行政法人 科学技術振興機構

CREST, JAPAN SCIENCE AND TECHNOLOGY AGENCY*

1 はじめに

他の科学・工学の分野と違わず、制御工学の分野でも数値計算が多用されており、特に、数値線形代数の成果から大きな恩恵を受けている。その一方、通常の計算ルーチンからの結果がどうも精度良く計算されていないようであるが、結果の妥当性を確認したい、とか、大きな問題に対し計算された結果の誤差を評価したい、などという際の有効な計算手段の一つとして、精度保証付き計算というものに注目が集まってきている [1, 2].

本講究録は、いくつかの制御問題に対する精度保証付きアルゴリズムを紹介することを目的とする。本講究録の理解の一助となるように、2 節にて制御工学に関して簡潔に述べる。3 節では、本講究録で用いられる精度保証の意味を定義する。制御問題を精度保証付きで解く際に用いられる基本計算ツールを 4 節で述べる。そして、制御の解析問題であるノルムの計算アルゴリズムを 5 節で、制御器の設計問題の一つを 6 節で紹介する。

2 制御工学

本節では、本講究録で考える制御問題に関連する事項を簡潔に述べる。プラントと一般的に呼ばれる制御対象の入出力が、物理モデルなどよりプラントに対する入力信号 $u(t)$ とプラントからの出力信号 $y(t)$ に関する微分方程式の形で与えられるとする。一般の場合、この微分方程式は非線形であるが、解析・設計を容易にするため、線形近似されることが多い。線形微分方程式に対しラプラス変換を施すことにより、プラントの入出力関係が有理関数の形で記述することができる。

$$U(s) := \mathcal{L}[u(t)] = \int_{0+}^{\infty} u(t)e^{-st} dt$$
$$P(s) = Y(s)/U(s)$$

なお、これはシステムの周波数領域での表現とみなせる。というのは、周波数 ω の正弦波入力 $u(t) = \sin(\omega t)$ が与えられたとき、(システムが安定であるという仮定のもと) 定常状態での出力の振幅は $|P(j\omega)|$ 、位相のずれは $\angle P(j\omega)$ となるからである。(ここで、 j は虚数単位である。)

*M.Kanno.99@cantab.net

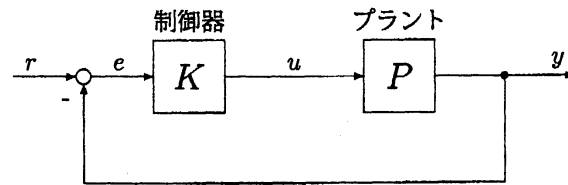


図 1: 直結フィードバック制御系

また、与えられた高次線形微分方程式を連立一次線形微分方程式の形で記述する状態空間表現というものも現代制御と呼ばれる制御理論では多用される。

$$P: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

ここで、 $x(t)$ は状態と呼ばれる。なお、この状態は、位置・速度など物理的な意味を持っていることもあるが、特に数値計算の際、数値上安定となるように、座標変換が行なわれることが多く、通常は物理的な意味はもたない。また、上記の状態空間表現は以下のように簡略表現される。

$$P(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

状態空間表現では、 $y(t)$ など時間に依存した値が陽に現れているので、時間領域での表現とみることができ、この表現方法は時間領域での最適化という問題の定式化において有用となっている。実際には、プラントが状態空間表現で与えられたとき、伝達関数（行列）と容易に関連付けられる。

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

制御の目的は、プラント $P(s)$ が与えられたとき、制御器 $K(s)$ を設計し、閉ループ系（図 1）を安定化し、かつ制御入力 $r(t)$ の変化に対してプラント出力 $y(t)$ が速やかに追従するなどの性能要求を満足させるということである。より詳細に述べると、プラントと（何らかの方法で設計された）制御器が与えられたとき、閉ループ系が安定でかつ要求された性能を満たしているかをチェックする解析問題と、プラントが与えられたとき、閉ループ系を安定化し、要求性能を達成する制御器を見つける設計問題とがある。

3 精度保証の意味

以下でも見る通り、制御の解析・設計問題は往々にして純粋な数学の問題として定式化される。説明を簡単にするため、ここではスカラの値を計算する問題を考え、その問題を関数 f と表現する。また、 f の入力を P （たとえば、伝達関数）とする。そして、 $f(P)$ の値を計算するために、計算機上にアルゴリズム（ここでは A と呼ぶ）を構築する。このアルゴリズム A が精度保証付きであると聞けば、ユーザは $f(P)$ の値が計算機を用いて所望の精度で計算できることを期待するであろう。すなわち、入力として P と許容誤差 ϵ が与えられたとき、純粋数学的に計算される厳密に真の値 $f(P)$ に対し、それを含みかつ幅が ϵ 以下である区間が A を用いることにより得られる、すなわち、

$$[f, \bar{f}] \ni f(P), \bar{f} - f \leq \epsilon$$

となる区間 $[f, \bar{f}]$ が A を使って求められることを期待するであろう。このような要求を満足するアルゴリズムをここでは精度保証付きアルゴリズムと呼ぶ。ただし、ここで留意すべきことは、アルゴリズム A は計算機上に実装されるため、入力・出力としては計算機上で表現可能な数に限られるということである。

以上をふまえると以下の様な定義ができる [3, 4].

定義 1 関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は well-defined とする (必ずしも連続でなくて良い). また, A は実行可能な形式のアルゴリズムとし, well-defined な関数 $A: (\mathbb{F}^n, \mathbb{F}_{>0}) \rightarrow \mathbb{F}^2$ を定義するものとする. ここで, $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$ は計算機上で表現できる数の集合であり, $\mathbb{F}_{>0}$ は $\mathbb{F}$ に属する要素のうち, 厳密に正のものの集合である. $A(P, \epsilon) = (f_\ell, f_r)$ としたとき (ただし, $f_\ell \leq f_r$), もし任意の $P \in \mathbb{F}^n$ と $\epsilon \in \mathbb{F}_{>0}$ に対し, 真の $f(P)$ が閉区間 $[f_\ell, f_r]$ に属し, かつ $f_r - f_\ell \leq \epsilon$ であるならば, A は $\mathbb{F}$ 上の精度保証付きアルゴリズムと呼ぶ.

上記では f をスカラ関数としたが, 正否や自然数などの離散の値を取る問題や, ベクトルや行列などを計算する問題などへの拡張は容易であるので, ここでは議論しない. また, 本講義録で紹介するアルゴリズムは計算機代数システム Maple 上に実装され, よって上記定義中の $\mathbb{F}$ は $\mathbb{Q}$ となる.

工学の問題に対してこの様な精度保証を達成するアルゴリズムを構築する意義に関する議論は [5] を参照されたい.

4 基本計算ツール

制御問題に対して前節で定義された精度保証を満足するようなアルゴリズムを実現するためには, さまざまな基本となる計算ツールを用いる必要がある. 本節では, そのような基礎ツールについて簡単に触れる.

4.1 精度保証付き多項式の根の計算

数多くの科学の分野において現れる, もっとも重要な数値計算問題の一つは一変数多項式の根の計算である. この問題に対して, 無数の数値計算アルゴリズムが考案されている. 制御の分野でも, この問題は, 例えば固有値の計算のような形で頻繁に現れるので, 多項式の根の計算が精度保証付きで行なえることは, 制御問題に対して精度保証付きアルゴリズムが構築できるための必要条件となっている.

多項式の実根を求めるためには, 古くからあるスツルム列やデカルトの符号律などのアイディアを用いることが可能であり, それらを用いることにより実根を実軸上の区間として近似することができる. 具体的なアルゴリズムに関しては, [6]などを参照されたい. また, 複素根に関しては, 各根を複素平面上の長方形で近似するという手法が提案され, 長方形を任意の大きさにすることができるという意味で, 複素根も精度保証付きで計算することが可能である. これもアルゴリズムの詳細に関しては, [7]などを参照されたい.

4.2 区間演算

制御問題は通常, なんらかの方程式を解き, その解を次の計算に用いるというような, 多段階アルゴリズムにより解かれる. 例えば, 行列の最大固有値を求め, それを以降の計算に用いるなどである. この場合, 精度保証付きアルゴリズムでは固有値は厳密な値としてではなく区間として求められるので, 以降の計算ではその区間に対してさまざまな演算を行っていく必要がある. そのような場合, 区間演算 [8]を用いることができる.

さらに, 区間演算に関する結果のなかで, クラフチック作用素 [8]と呼ばれるものが重要である. これは, ニュートン法の区間演算版であるが, 連立非線形方程式の解を精度保証付きで求める際に有効である.

4.3 精度保証付き多項式スペクトラル分解

以上2つの道具を組み合わせることにより、多項式スペクトラル分解を精度保証付きで行なうことが可能となる。すなわち、 $A(s) = A(-s)$ かつ $A(j\omega) > 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$ であるような実多項式 $A(s)$ に対して、先頭係数が正で、全ての根を左開半面に持ち、かつ $A(s) = f(s)f(-s)$ を満たすような（唯一の）実多項式 $f(s)$ を求めるという問題に対し、 $f(s)$ の係数を精度保証付きで求めることが可能となる。具体的には、 $A(s)$ の左開半面内の根を精度保証付きで求め、実根に関しては係数に幅を持つ1次式、共役複素根に関しては2次式で表現し、 $f(s)$ をそれらの積で表わし、最後に展開して、 $f(s)$ の真の係数を含む区間を求める。もしその区間の幅が大きい場合は、 $f(s)$ の係数が連立代数方程式の解であるという事実を用いて、クラフチック作用素を利用して幅を小さくすることができる [9]。

5 制御系解析の例

本節では、精度保証付き制御系解析の例として、2つのシステム・ノルムの精度保証付き計算アルゴリズムについて述べる。

5.1 $\mathcal{H}_2$ ノルムの計算

システム $G(s)$ に対して、その $\mathcal{H}_2$ ノルムは以下のように定義される。

$$\|G\|_2 := \sqrt{\sup_{\sigma > 0} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \{ G^*(\sigma + j\omega) G(\sigma + j\omega) \} d\omega \right\}} \left(= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \{ G^*(j\omega) G(j\omega) \} d\omega} \right)$$

この値の2乗はシステムのインパルス応答のエネルギーに等しいことが知られている。すなわち、例えば、システムにインパルス外乱が入ったとき、システムにより外乱がどの位迅速に抑えられるかの指標となっており、システムの応答速度を示すものである。

システム $G(s)$ が状態空間表現

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right]$$

で与えられたとき、その $\mathcal{H}_2$ ノルムは以下のように計算できることが知られている [10]。

$$\|G\|_2 = \sqrt{\text{tr} \{ B^* L_o B \}}, \quad (1)$$

$$A^* L_o + L_o A + C^* C = 0 \quad (2)$$

すなわち、(2) のリアプノフ方程式を可観測 Gramian L_o に関して解き、その結果を用いて (1) を計算する。また、これと双対な

$$\|G\|_2 = \sqrt{\text{tr} \{ C L_c C^* \}}, \quad A L_c + L_c A^* + B B^* = 0$$

を用いて、可制御 Gramian L_c を求め、 $\|G\|_2$ を計算することも可能である。

システムの $\mathcal{H}_2$ ノルムを計算するという問題に対して、精度保証付き計算アルゴリズムを構築することを考える。ここで、システムの状態空間表現を与える行列 A, B, C の全要素が有理数であると仮定する。リアプノフ方程式 (2) は、実際には、 L_o の要素に関する連立一次方程式であり、さらに方程式の係数はそれぞれ有理数であることが分かる。（なお、 L_o は対称行列となることが知られている。）よって、その連立一次方程式は Maple などの上で厳密に解くことが可能であり、その解 L_o は要素が有理数である行列として厳密に得ることができる。また、(1) の計算も、平方根の内側は単純な四則演算であり、これも厳密に行なうこ

とが可能である。最後の平方根の計算は多項式の実根を求める問題であるので、これは精度保証付きで計算することができる。以上より、 $\mathcal{H}_2$ ノルムの計算問題に対し精度保証付きアルゴリズムを構築することが可能であることが分かる。

5.2 $\mathcal{H}_\infty$ ノルムの計算

$\mathcal{H}_2$ ノルムがシステムの時間応答の指標として見られるのに対し、本項で扱う $\mathcal{H}_\infty$ ノルムは周波数領域での性能指標として捉えられる。近年では、システムのロバスト性の指標として重要視され、 $\mathcal{H}_\infty$ 制御と呼ばれるロバスト制御の一分野が精力的に研究され、理論面での成果に加えて、実システムに対して適用され実用面での実績も挙げている。システム $G(s)$ の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムは以下のように定義される。

$$\|G\|_\infty := \sup_{\operatorname{Re}(s) > 0} \bar{\sigma}\{G(s)\} \quad \left(= \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}\{G(j\omega)\} \right)$$

ただし、 $\bar{\sigma}\{\cdot\}$ は行列の最大特異値を表す。前項で述べた $\mathcal{H}_2$ ノルムの計算は比較的容易であったが、 $\mathcal{H}_\infty$ ノルムの計算はやや煩雑である。まず、以下の事実が知られている [10]。

定理 1 システムが状態空間表現

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

で与えられるとし、また $\gamma > 0$ であるとする。ハミルトン行列を以下のように定義する。

$$H_\gamma := \left[\begin{array}{cc} A + BR^{-1}D^*C & BR^{-1}B^* \\ -C^*(I + DR^{-1}D^*)C & -(A + BR^{-1}D^*C)^* \end{array} \right]$$

ここで、 $R := \gamma^2 I - D^*D$ である。このとき、 $\gamma > \|G(s)\|_\infty$ であることは、 $\gamma > \bar{\sigma}(D)$ かつ H_γ が虚軸上に固有値を持たないことと等価である。

上記の定理を用いることにより、 $\mathcal{H}_\infty$ ノルムの計算という問題を、 γ を変化させながら虚軸上の固有値の有無を調べるという問題に変換することが可能である。また、通常用いられている数値計算アルゴリズムもこの定理に基づき実装されている。しかしながら、通常の数値計算では固有値が虚軸上にあるかどうかを判断するのが難しく、たいていの場合、虚軸に十分近いときに虚軸上に乗っていると判断している。また、 γ を変化させて、固有値がちょうど純虚数になる γ の値では、固有値が重根になるため、固有値を精度良く計算するのが難しい。数値的に安定になるように H_γ を座標変換してから固有値を求めるため、たいていの場合、実用上は問題ない精度で計算できているものの、上記のような理由から、通常の数値計算アルゴリズムの精度の評価は難しい。

計算機代数システムを用いることにより、上記の H_γ が虚軸上に固有値を持つかのチェックを、多項式の非正の根の有無を判断する問題に変更できることは知られている [11]。この事実を用いて二分法アルゴリズムを構築し、精度保証付きでシステムの $\mathcal{H}_\infty$ ノルムを計算することは可能である。しかしながら、上の定理よりもさらに強い結果を用いることにより、 $\mathcal{H}_\infty$ ノルムを（実）根の一つとする多項式を求めることが可能である。さらには、多項式のどの（実）根が真の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムの値であるかを調べる方法がある。すなわち、 $\mathcal{H}_\infty$ ノルムの計算を多項式の実根の計算問題とすることが可能である。多項式の実根は精度保証付きで計算することができるため、 $\mathcal{H}_\infty$ ノルムを計算する精度保証付きアルゴリズムの構築が可能である。

具体的には、 $G(s)$ の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムの値は以下の 3 つの値のうちの一つである [3]。

- (i) $\bar{\sigma}\{G(0)\}$
- (ii) $\bar{\sigma}\{G(j\infty)\}$
- (iii) $h_\gamma^s(x)$ の (x に関する) 判別式の実根の一つ

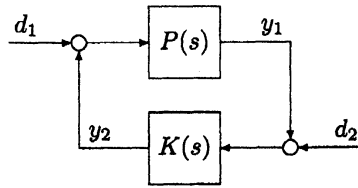


図 2: フィードバック制御系

ただし, $h_\gamma^s(x)$ は以下のように計算される. まず, $\Phi_\gamma(s) := \gamma^2 I - G^T(-s)G(s)$ とし, $\det \Phi_\gamma(s)$ の s^2 を x に置き換えたものを $g_\gamma(x)$ とする (すなわち, $g_\gamma(s^2) = \det \Phi_\gamma(s)$ である). さらに, $g_\gamma(x) = \frac{n_\gamma(x)}{d_\gamma(x)}$ と書く. ただし, $n_\gamma(x)$ と $d_\gamma(x)$ は x と γ に関する, 互いに素な多項式である. 以上のとき, $h_\gamma^s(x)$ を以下のように計算する.

$$h_\gamma^s(x) = \frac{n_\gamma(x)}{\text{GCD}(n_\gamma(x), \frac{\partial}{\partial x} n_\gamma(x))}$$

(i) 及び (ii) の値は, それぞれ λ に関する多項式 $\det(\lambda^2 I - G^*(0)G(0))$, $\det(\lambda^2 I - G^*(j\infty)G(j\infty))$ の根の一つである. また, $h_\gamma^s(x)$ の判別式は γ に関する多項式となるので, (iii) も多項式の根であることが分かる. 上記は, $G(s)$ の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムの候補が精度保証付きで求まることを示しているが, この候補の中より真の $\|G(s)\|_\infty$ の値が次の (スツルム列を用いて確認可能な) 条件によって選び出すことが可能であることが示せる [3]: $\gamma > \|G(s)\|_\infty$ であることの必要十分条件は, $\gamma > \sigma\{G(j\infty)\}$ かつ $h_\gamma^s(x)$ が $-\infty < x \leq 0$ に根を持たないことである. 上記の方法により, システムの $\mathcal{H}_\infty$ ノルムは精度保証付きで計算可能であることが示せる. アルゴリズムの詳細に関しては [3] を参照されたい.

6 制御系設計の例

この節では, 図 2 のフィードバック系において, 一入力一出力の n 次の制御対象 $P(s)$ が与えられたとき, 閉ループ系を安定化し, かつ $w = (d_1 \ d_2)^T$ から $z = (y_1 \ y_2)^T$ への伝達関数 $T_{wz}(s)$ の $\mathcal{H}_2$ ノルムを最小にする制御器 $K_{\text{opt}}(s)$ を精度保証付きで求めるという問題を考える. より具体的には, 入力として伝達関数

$$P(s) = \frac{a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0} =: \frac{P_N(s)}{P_D(s)}$$

($P_N(s), P_D(s)$ は互いに素な多項式) の係数 a_i, b_j と指定された許容誤差 ϵ が与えられたとき, $K_{\text{opt}}(s)$ の伝達関数

$$K_{\text{opt}}(s) = \frac{\alpha_{n-1}s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \dots + \alpha_0}{s^n + \beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \dots + \beta_0}$$

の係数 α_i, β_j を含む, 幅 ϵ 以下の区間, すなわち

$$\begin{aligned} [\underline{\alpha}_i, \overline{\alpha}_i] &\ni \alpha_i, \quad \overline{\alpha}_i - \underline{\alpha}_i \leq \epsilon, \\ [\underline{\beta}_j, \overline{\beta}_j] &\ni \beta_j, \quad \overline{\beta}_j - \underline{\beta}_j \leq \epsilon \end{aligned}$$

を求めるという問題である. これは以下のように計算することでアルゴリズムを実現できる [9].

まず, 4.3 項で述べた精度保証付き多項式スペクトラル分解より, $M_D(-s)M_D(s) = P_N(-s)P_N(s) + P_D(-s)P_D(s)$ を満たすモニックで, すべての根が左開半面にある多項式 $M_D(s)$ の係数を計算する. 次に, $U_N(s), V_N(s)$ をそれぞれ $n-1$ 次, n 次の (係数が未知の) 多項式とする. すると,

$$P_D(s)V_N(s) - P_N(s)U_N(s) = \{M_D(s)\}^2$$

の係数を比較することにより, $U_N(s), V_N(s)$ の係数に関する連立一次方程式が得られる. この連立一次方程式は唯一の解を持つことが示せる. その結果, $U_N(s), V_N(s)$ の係数を $M_D(s)$ の係数に関する多項式として表現できることが分かる. $M_D(s)$ の係数が精度保証付きで求めることが可能であるので, $U_N(s), V_N(s)$ の係数も精度保証付きで求められることが分かる. そして, 実際には, $K_{\text{opt}}(s) = U_N(s)/V_N(s)$ となるので, 最適制御器の係数が精度保証付きで計算することが可能であることが分かる.

7 おわりに

本講究録では, いくつかの制御問題に対する精度保証付きアルゴリズムについて簡単に述べた. 数多くの制御問題に対し通常の数値計算アルゴリズムが考案されているが, それ以上に多くの問題に対し実用上有効なアルゴリズムが未だ構築されていない. また, アルゴリズム考案されているとしても, それらのアルゴリズム全てが実用上常に十分な数値誤差範囲の結果を与えてくれている訳ではない. 記号計算の可能性は, 精度保証のみならず, 通常の数値計算では解くことの難しい問題に対しても, 広がっていると思われる. 今後も記号計算分野での成果の制御問題への応用に関して報告していきたい.

参 考 文 献

- [1] M. Kanno: *Guaranteed Accuracy Computations in Systems and Control*, PhD dissertation, University of Cambridge (2003)
- [2] 古賀雅伸, 廣木聡憲: 精度保証付き数値計算に基づく制御系設計, 第 5 回計測自動制御学会制御部門大会予稿集, 707/710 (2005)
- [3] M. Kanno and M. C. Smith: Validated numerical computation of the $\mathcal{L}_\infty$ -norm for linear dynamical systems, *Journal of Symbolic Computation*, 41-6, 697/707 (2006)
- [4] 菅野政明, 原 辰次: $\mathcal{H}_2$ 追従制御問題の精度保証付き計算, 第 34 回制御理論シンポジウム予稿集, 137/140 (2005)
- [5] 菅野政明: 精度保証付き計算を用いた制御系解析・設計, 計測と制御, 45-5, 455/462 (2006)
- [6] G. E. Collins and A. G. Akritas: Polynomial real root isolation using Descartes's rule of signs, In *Proceedings of the ACM Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, 272/275, New York (1976)
- [7] G. E. Collins and W. Krandick: An efficient algorithm for infallible polynomial complex root isolation, In P. S. Wang, editor, *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ISSAC '92*, 189/194, ACM Press, New York, NY (1992)
- [8] 大石進一: 精度保証付き数値計算, コロナ社 (2000)
- [9] M. Kanno and M. C. Smith: Guaranteed accuracy computations in systems and control, In *Proceedings of the European Control Conference ECC 2003*, Cambridge, U.K. (2003)
- [10] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover (劉康志, 羅正華訳): ロバスト最適制御, コロナ社 (1997)
- [11] S. Boyd, V. Balakrishnan, and P. Kabamba: A bisection method for computing the H_∞ norm of a transfer matrix and related problems, *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 2-3, 207/219 (1989)