

Paul Lévyの確率論

-伊藤清・飛田武幸の視点から-

Probability Theory of Paul Lévy

-From the point of view of Kiyoshi Itô and Takeyuki Hida-

田中紀子

Noriko Tanaka*

Abstract

Paul Lévy (1886—1971) had left a rich and deep performance in probability theory. Paul Lévy's probability theory included a novelty that was not in the previous stochastic theory, and inspired the two mathematicians of Japan, Kiyoshi Itô (1915-2008) and Takeyuki Hida (1927—2017). I would like to glimpse some of Paul Lévy's charms and his mathematical charms from the materials such as the words that the two Japanese mathematicians spoke about Lévy, what Lévy himself wrote, and the letters exchanged by Lévy and Hida. I feel the insight of Paul Lévy's mathematical approach to the Brownian movement, and I would like to close to the source.

§1. Paul Lévyの確率論に魅せられて

1) 伊藤清氏のことばから

伊藤氏は東京帝国大学卒業後、内閣統計局に勤めながら、確率論の分野で現

Received December 3, 2017. Revised January 20, 2019.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 01A27, 01A60

Key Words: Paul Lévy, History of Japanese Mathematics, Kiyoshi Itô, Takeyuki Hida

*RIMS Long-term visiting researcher

Aichi Prefectural Toyota-nishi Senior High School, 14-65 Kosaka-cho, Toyota, Aichi, 471-0035, Japan. e-mail: tanaka-nagoya@y5.dion.ne.jp

在「レヴィ・伊藤の定理」と呼ばれる定理に関わる最初の論文である博士論文「On stochastic processes」(1941年8月1日受理, 1942年 Japanese Journal of Mathematics 発表, 1945年10月3日東京帝国大学より博士号授与)[10]を書き上げている. その頃伊藤清氏は「Compact 群上ノ Markoff Process」[8]や「マルコフ過程を定める微分方程式」[9]など数本の論文を大阪大学理学部数学教室が発行していた「全国紙上数学談話会」[16]に掲載していた. 「全国紙上数学談話会」は, ガリ版を刷って謄写版を使って印刷されていたもので, 月に2回程度のかなり高い頻度で出版されていた. 1934年6月に発刊され, 1949年9月に廃刊となるまでの間, 新進気鋭の研究者がその成果を発表する場所であり, 数学のアイデアの交換に大きな影響を与えていた.

確率論に関する最初の論文を書き上げた当時のことを, 伊藤清氏は第十四回京都賞記念講演会挨拶文[12]のなかで次のように語っている.

「統計力学から次第に確率論に近づいていったのですが, その頃の日本には, 確率論を専門に研究している数学者は誰もいなかったばかりか, 私自身も『確率論が厳密な意味で数学と言えるかどうか』という疑問を持っていたのです.」

「確率論の内容に改めて直観的な興味を覚えたのは, フランスの数学者, ポール・レヴィ (Paul Lévy) が1937年に発表した『独立確率変数の和の理論』(Théorie de l'addition des variables aléatoires)を読んだときです. これは微分積分学の関数に対応する確率論的概念としての確率過程の研究において大きな第一歩を踏み出したもので, 私はここに新しい確率論の本質を見いだし, そこに見える一筋の光の中を歩いて行こうと思ったのです. 1938年の秋のことでした.

私は, レヴィの理論における確率過程の見本関数の中に, 数学理論の名にふさわしい美しい構造を見いだただけでなく, ウィーナー過程, ポアソン過程, 独立増分過程などの確率過程をここで学びました. そして特に, この本の核をなす独立増分過程の分解定理に興味を持ちました. しかし, 多くの開拓者の仕事がそうであるように, レヴィの記述は直観的な把握にもとづく部分が多く, その議論の展開を追うことが困難でした.」

また数学の研究を始めたころ, Kolmogorovの確率論の基礎概念に接し, それは確率変数を確率空間の上の関数として定義し, 測度論の言葉で確率論を体系化しようという試みで, この立場に立ったとき, 今まで朦朧としていたものが, 霧が晴れるように明らかになり, これで確率論が現代数学の一分野と言えることを確信したと述べている. また確率の内容について, 次のように語っている.

「当時の研究の大部分は, 統計法則の数学的解明を念頭において独立確率変数数列の行動を調べるというものであった. 微分積分学でいえば, 級数論に相当する部分である. むろんそれよりも難しく, また内容も豊かなものであったが, 数学の他の分野に較べると, 貧弱に思われ, これに打ち込むという気は起らなかった.

確率論の内容に真に興味を覚えたのは, 昭和12年にでたフランスの数学者ポール・レヴィの独立確率変数の和の理論を読んだ時である. これは, 確率過程

Probability Theory of Paul Lévy
-From the point of view of Kiyoshi Ito and Takeyuki Hida-

(微分積分学の関数に対応する確率論的概念)の本格的な研究の大きい第一歩を踏み出したもので、私はこの中に真に新しい確率論の本質を見出し、これなら精魂傾けて深く研究したいと思った。」(「確率論と私」から「数学の研究を始めた頃」[13])

さらに「つれづれなるままに」(関西確率論セミナー講演[23])のなかでこのようにも述べている。

「ウィーナーとレヴィだけは全然違う。つまり、確率論という新しい科学、新しい数学の文化があって、それには新しいタイプのおもしろさがあるのだ。そのおもしろさを研究するために、いろいろな他の技術を使うのである。——そういうふうに見えるようなものを、レヴィのものを読んで感じたわけです。」



図1 晩年のPaul Lévy (飛田氏撮影)

またPaul Lévy : *Processus stochastiques et mouvement brownian*について、この本は伊藤氏の名古屋大学における卒業研究の大学ゼミに飛田氏がゼミ学生として参加したときに読んだ本でもあるが、伊藤清氏による書評には

「本書は直感的過ぎて分かり難いところもあるが、著者がいかにして新しい発見をして行ったかということが窺われ、原始林を開拓していく人の楽しい姿が目に見えるようである。」

と書かれている。

Lévyの本や論文は極めて難解であり、その難解さのため、フランスですら広く認められる状況ではなかった。飛田氏によると、この事情について、1987年にLévy生誕100年を記念して開催されたシンポジウムで、彼の女婿であるLaurent Schwartzが詳しく話していたという。またDaniel Stroockは、Paul Lévyは伊藤という解釈者を得たという幸運により、今日の名声を享受できたと述べている(Daniel Stroock「伊藤清の見たマルコフ過程」[23])。伊藤清氏自身、LévyやKolmogorovのやっていることをよく理解したいとだけ思っていたのであって、何か新しいものをしようと考えていたわけではなく、Lévyのものをきちんとやろうとしたのだと語っている(「つれづれなるままに」関西確率論セミナー講演[23])。

2) 飛田武幸氏のことばから

名古屋大学数理科学同窓会は、優秀な学生らを奨励する目的で、1980年に中日文化賞を受賞した飛田武幸氏の名を冠した「飛田賞」を創設している。飛田氏

は長年にわたり、名古屋大学において「確率論セミナー（ホワイトノイズセミナー）」を2016年3月までほぼ毎週開講しており、筆者は最後の約3年間聴講していた。なお、ホワイトノイズはアメリカ数学会から2000年にMath. Subject Classification 60H40を与えられている。

名古屋大学理学部・大学院理科学研究科広報誌「理philosophia」(spring-summer[15])は「飛田武幸博士—ホワイトノイズ解析の創始者—」という記事を掲載しておりPaul Lévyについても触れている。論文やセミナーの中で、何度も飛田氏が述べたPaul Lévyへの思いとその数学の一端を紹介したい。

「P. レヴィの数学は、連続無限変数の関数解析に基づく。そこから変数をランダムにして、自然に確率解析へと導かれる。それは時空のパラメータに依存し科学の中で重要な位置を占める。」(飛田武幸, [7])

学生時代に伊藤清ゼミでProcessus stochastiques et mouvement brownianを読んだときのエピソードとして「レヴィの数学とホワイトノイズ理論」[7]には「一見平易そうに見える主張も、証明はもとより、その内容に重厚さがあり、著者による深い内容の記述、それらにすっかり圧倒されてしまった。レヴィにとっては当然で、しかし我々にとっては難解な主張の例が多い。今では当然と思われるブラウン運動の強マルコフ性にあたる事実が手短な言葉で説明されているのは驚きであった」。「本質的なことを見抜く直感と洞察力には敬服するのみであるが、それが人によっては誤解を招くこともあった。」と書かれている。

卒業後、飛田氏はPaul Lévy氏に強い憧れを持ち、思い切って手紙を出した。1954年頃のことである。お返事が来て文通が開始した。折にふれて、主として数学の話で手紙を出すと親切な返事が返ってきていた。論文のdraftを送ったら数式の訂正をした返事を貰ったこともあった。(図2は飛田

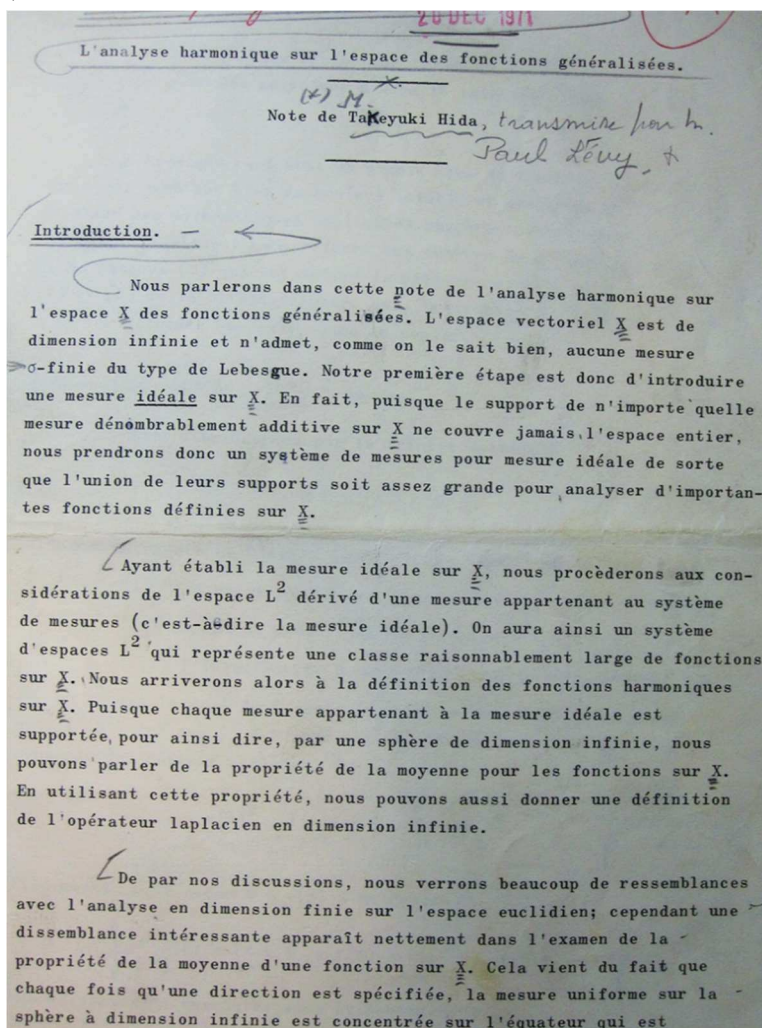


図2-1 飛田氏の論文をLévy氏が修正したもの

Probability Theory of Paul Lévy
-From the point of view of Kiyoshi Ito and Takeyuki Hida-

氏の論文をLévy氏が加筆修正したもの。)しばらく宛名は“Miss T. Hida”となっていた。Paul Lévy氏は飛田氏をフランス人に多いHildaと思い、女性と勘違いしていたようである。1969年12月14日のお手紙(図3)では、Paul Lévyはご家族のことをしたためている。飛田氏はLévy氏の自宅にも何度か訪れている。初めての訪問は1968年3月ところは38Av. Théophile, Gautier Paris 16^e. 2人の数学者の交流は公私に渡って続いた。

飛田氏の確率論セミナーでは、ホワイトノイズ理論研究の進捗や、様々な分野との関連などのお話が多くあったが、Paul Lévyの確率論や交流の折の思い出を話されることもあった。2013年10月23日の確率論セミナーでは、Mandelbrotの言葉として「Lévyが創造した数学の内容に、彼の名を冠することの少なさに驚いている」と紹介した。また飛田氏は「この巨人をよく知り、しかも彼のfamilyに属さない(しかし近い)生存者の中で、私(飛田)は最年少と思う」と述べた。

次章で手紙文の紹介をする。図2, 図3の掲載については、飛田氏とご家族の許可を得ている。

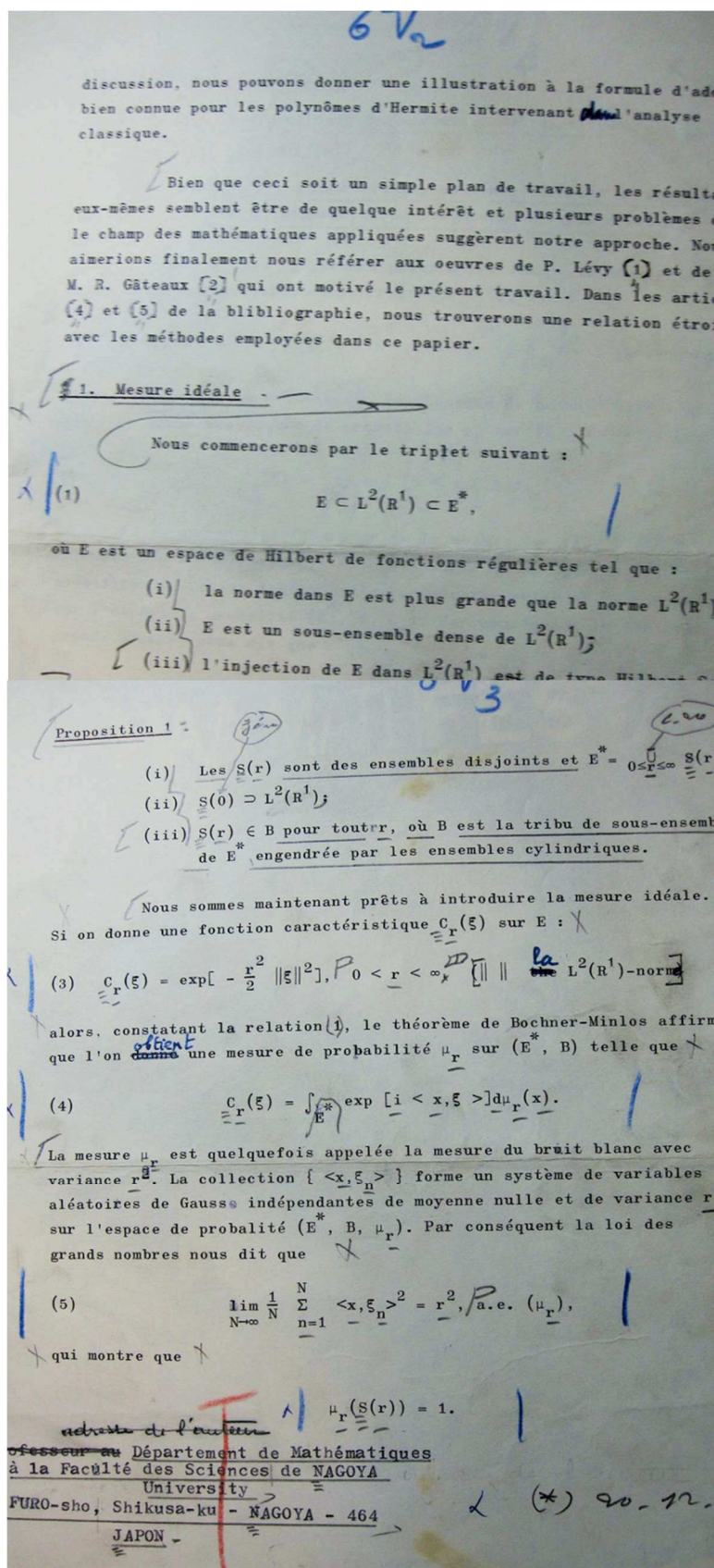


図2-2 飛田氏の論文をLévy氏が修正したもの

§ 2. Paul Lévy⇒Hida 手紙文 (仏文訳出)

私の父親について

父リュシアン・レヴィ (Lucien Lévy) は、1853年にパリに生まれ、1912年に亡くなりました。父はエコール・ポリテクニク (1872—74) の卒業生で、数学のアグレジエ (教授資格agrégé)を持っていました。彼は数学教授(professeur)で、最初はレンヌのリセでそれからパリにあるリセ・ルイ・ル・グランで教鞭をとりました。また、彼のキャリアの多くは、エコール・ポリテクニクにおける審査官 (試験官) でした。

彼は、楕円函数論 (パリ, Gauthiers-Villar, 1898) の著者で、また、ウジューヌ・ルーシェと共著で無限小解析の専門書 (Gauthiers-Villar, 初版は1900年, 第2版は1902年) を執筆しました (ルーシェは1/4を書き終わったところで病気になったため、リュシアン・レヴィがそれを完成させたのです)。

彼は1911年のフランス数学会総裁でした。

私自身の紹介 (私の1935年のNoticeに含まれない部分)

パリのリセで学びました (1895—98はリセ・モンターニュ ; 1898—1902はリセ・ルイ・ル・グラン ; 1902—1904はリセ・サン・ルイ) ⁽¹⁾。

最初の年を除いて、私はいつも数学ではクラスで一番でした。他の教科については、良い生徒だったけれど、一番ではありませんでした。

1903—1904の数学特別講義において、私は傑出した教授であるエミール・ブリュッテルから学びました。

私はまた、エコール・ポリテクニクで素晴らしい教授、ジョルジュ・アンペールに出会いました。彼の講義は、とてもクリアで簡単に理解することができました。物理学の教授は、放射能を発見したアンリ・ベクレルでした。彼は、理論家というより実践家であり、彼の講座の授業のいくつかは、熱意に満ちていました。ポワンカレは、天文学の教授で、3つの講義だけを行いました。ほかの教授については、特出すべきことはございません。私には特に、解析学、幾何学、応用力学の講座が役立ちました。私は物理学では「良い成績」をとったのですが、化学ではそうではありませんでした。

エコール・ド・ミーヌでは、ソルボンヌとコレージュ・ド・フランスの数学の講義に参加するために多くの講義に参加できませんでした。私はコレージュ・ド・フランスで3年間、アンペールの講義に参加しました。アンペールは驚異的な計算力 (計算の分野における並外れた直観力) を持つことで知られ、古典的数学の進歩に貢献しました。私は、特に近代数学の研究に向かっていきました。それはもっとも傾聴していたアンペールの講義とも違っていました。それはまた、4, 5回のレクチャーに出て止めてしまったボレルの講義とも違いました。(彼は自明なことに多くの時間を費やしていたのです。) 一方、私は1年間参加したエミール・ピカールの講義や、3年間参加したアダマールの講義から多大な影響を受けたと思います。私が (博士) 論文のトピックスを見つけたのは、

(1)私はルイ・ル・グランで文学を学び、サン・ルイで科学を学びました。

Probability Theory of Paul Lévy
-From the point of view of Kiyoshi Ito and Takeyuki Hida-

1910年のアダマールの講義においてでした。

私は3年間、セント・エティエンヌで過ごしました。3年間のうちの最初の年に、私は（博士）論文を書き上げ、1911年の終わりに発表しました（審査員：エミール・ピカル、委員長：アンリ・ポアンカレ、書記：アダマール）。私は1913年にパリに戻りました。

1913年から1935年の間は、私のNoticeに加えるものは何もありませんし、また、1935-1939についても特出すべきことはありません。第2次世界大戦の間、私の年齢と健康は、私に激務をこなすことを許しませんでした。エコール・ポリテクニクは1940年から1942年の間、（戦禍から逃れるため）リヨンに移っていましたが、私は私の講義を続けることができました。しかし、パリに戻ると、非占領地域に留まらなければならず、ただ、幸いなことに解放まで身を隠すことができました（最初はグルノーブルで、その後ロワールで）。

戦後、私は1951年までエコール・ド・ミヌで、そして、1959年までエコール・ポリテクニクで私の講義を続けました；深刻な病気によって、途中長い期間の中断がありました。（結核；私は1952年に私の左の肺の半分を失いました。そして1957-1958に再び病にかかりました。）

1944年、エミール・ボレルに、アカデミシャンとしての地位を得るために、アカデミー（学士院会員）に立候補するよう勧められました。私は、彼のおかげで、4度ノミネートされたのですが、選ばれることはありませんでした。私はついに5度目の1964年4月20日に、数理科学分野で選出されました。私はすでに科学アカデミーからトータルで8つの賞をもらっていたのです。

家族について

私は1913年に結婚しました。私の妻はポール・レヴィ（Paul Lévy）の娘（はい、同じ名前）です。ポール・レヴィは貿易商をしており、1901年に亡くなっています。妻はアンリ・ヴェーユの孫娘で、ギリシャ文学者として知られ、フランス学会のメンバーでした。

私には3人の子供がいます。そのうちの一人、マリー・エレーヌは、数学者（学位論文1953年）で、リル大学の教授であり、ローラン・シュワルツ教授の妻です。彼ら夫婦には2人の子供がいます。

デニスは、パリにあるリセ・モリエールのドイツ語の教授で、1939年にアグレジェ(agrégé)になり、エンジニアであるロバート・ピロン(ソシエテ・メタルジックSOLLACの管理職の一人)の妻になりました。彼ら夫婦には4人の子供がいて、そのうち3人は結婚し、彼らには4人の孫がいます。

ジャン・クロードは、海軍のエンジニアで、エコール・ポリテクニクとグルノーブルの理工科研究所の卒業生です。彼は結婚(そして最初の妻の死後に再婚)し、合わせて6人の子供がいます。

まとめると、私の妻と私には、3人の子供がいて、みな結婚し、12人の孫がいます。孫のうち3人は結婚し、1969年時点で4人のひ孫がいます。

1969年12月14日

P. Lévy

Renseignements concernant mon père

Lucien Lévy, né à Paris en 1853; mort en 1912. Il était ancien élève de l'École Polytechnique (1872-74) et agrégé de mathématiques. Il a été professeur de mathématiques, d'abord au Lycée de Rennes; ensuite à Paris, au Lycée Louis le Grand; puis, pendant la plus grande partie de sa carrière, examinateur à l'École Polytechnique.

(Paris, Gauthier-Villars, 1893)

Il est l'auteur d'une théorie des fonctions elliptiques, et, en collaboration avec Eugène Rouché, d'un traité d'analyse infinitésimale (Gauthier Villars; 1^{re} vol., 1900; 2^{ème} vol. 1902). (En fait, Rouché étant malade, c'est lui qui a achevé l'ouvrage dont à peine le quart était fait).

Il a été président de la Société mathématique de France en 1911

Renseignements ne concernant, non contenus dans ma notice de 1935.

Études au Lycée à Paris (Lycée Montaigne, 1895-98; Lycée Louis le Grand, 1898-1902; Lycée Saint Louis, 1902-1904). ⁽¹⁾ Jusque la première année, j'ai toujours été à la tête de ma classe en mathématiques. Pour les autres matières, j'étais bon élève, mais pas à la tête de la classe.

En « Spéciales » (1903-1904), j'ai eu un professeur remarquable, Emile Bachelard.

À l'École Polytechnique, j'ai eu aussi un admirable ^{d'analyse} professeur, Georges Humbert. Son cours était très clair, et facile à suivre. Pour la physique, le professeur était Henri Becquerel, celui qui a découvert la radioactivité. Il était plus expérimentateur que théoricien, ce qui fait que quelques leçons du cours laissaient à désirer. Poincaré était professeur d'astronomie, mais n'a en fait fait que 3 leçons. Les autres professeurs étaient moins remarquables. J'ai surtout bien profité des cours d'analyse, de géométrie, et de mécanique. J'ai eu aussi de « bonnes notes » en physique, mais pas en chimie.

À l'École des Mines, j'ai négligé plusieurs des cours pour pouvoir suivre des cours de mathématiques à la Sorbonne, ^{et} au Collège de France. J'ai suivi trois ans celui d'Humbert au Collège de France. Comme on sait, il était un merveilleux calculateur, et a contribué au progrès des mathématiques classiques. J'étais surtout porté vers l'étude des mathématiques modernes, et ce n'est pas du cours d'Humbert dont j'ai le plus profité. Ce n'est pas non plus de celui de Borel, que j'ai renoncé à suivre après 4 ou 5 leçons, parce qu'il passait trop de temps à développer des choses évidentes. J'ai par contre tiré un grand profit du cours d'Émile Picard que j'ai suivi un an et de celui d'Hadamard, que j'ai suivi trois ans. C'est dans ce dernier qu'en 1910 j'ai trouvé mon sujet de thèse.

(1) À Louis le Grand, j'ai fait mes études littéraires, et à Saint Louis mes études scientifiques.

図3-1 1969年12月14日のP. Lévyの手紙1枚目

Probability Theory of Paul Lévy
-From the point of view of Kiyoshi Ito and Takeyuki Hida-

J'ai passé 3 ans à S^t Etienne. C'est pendant la première de ces trois années que j'ai rédigé ma thèse, soutenue à la fin de 1911 (Jury: Émile Picard, président; Henri Poincaré; Hadamard, rapporteur). Je suis revenu à Paris en 1913.

Rien à ajouter à ma Notice pour la période de 1913 à 1935, et rien de spécial à dire pour 1935-1939. Pendant la seconde guerre, mon âge et ma santé ne m'ont guère permis de rendre de grands services. L'École Polytechnique s'est réfugiée à Lyon de 1940 à 1942, j'ai pu y faire mon cours. Mais quand elle est rentrée à Paris, j'ai dû rester dans la zone non occupée; et, quand elle a été occupée à son tour, j'ai eu la chance de pouvoir me cacher jusqu'à la libération (d'abord dans la région de Grenoble, puis à T et ensuite dans la Loire).

Après la guerre, j'ai continué mon cours à l'École des Mines jusqu'en 1951 et à l'École Polytechnique jusqu'en 1959; une grave maladie avait nécessité de longues interruptions (tuberculose; on m'a enlevé en 1952 la moitié du poumon gauche. J'ai été le nouveau malade en 1957-1958).

En 1944, Émile Borel m'a conseillé de me présenter à l'Académie, pour une place d'Académicien libre. J'ai, grâce à lui, été présenté 4 fois en première ligne, sans être élu. J'ai fini par être élu à la Section de géométrie le 20 avril 1964. J'avais auparavant eu, en tout, huit prix de l'Académie des Sciences.

Situation de famille.

Je me suis marié en 1913. Ma femme est la fille de Paul Lévy (oui, le même nom), commerçant décédé en 1901, et petite-fille de Henri Weil, helléniste connu, membre de l'Institut de France.

(thèse en 1953)

J'ai trois enfants: Marie-Hélène, mathématicienne, professeure à l'Université de Lille, épouse du professeur Laurent Schwartz; ils ont 2 enfants.

Danièle, professeure d'allemand au lycée Molière (Paris), agrégée (1939), épouse de Robert Piron, ingénieur (un des Directeurs de la Société métallurgique SOLLAC). Ils ont 4 enfants, dont 3 mariés, et 4 petits enfants.

Jean Claude, ingénieur dépendant des services de la marine; ancien élève de l'École Polytechnique et de l'Institut Polytechnique de Grenoble. Il est marié (et remarié après la mort de sa première femme) et a en tout 6 enfants.

Ma femme et moi avons donc 3 enfants, tous mariés, 12 petits enfants, dont 3 mariés, et, pour le moment (1969), 4 arrière petits enfants.

le 14-X-1969

P. Lévy

図3-2 1969年12月14日のP. Lévyの手紙2枚目

飛田氏はその後Lévy氏だけではなく、そのご家族とも親しく交流を続けておられた。Lévy生誕100年記念のシンポジウムでは、Lévy氏の3人のお子様や親族と一緒に記念撮影なされた写真が残されている ([4]に一部掲載)。

§3. ブラウン運動

筆者は、アダマールのもとで関数解析を研究していたPaul Lévyが、ブラウン運動を数学的に表現しようとしたところに、その洞察の凄さ（直観）を感じている（Lévy自身“直感”については語っている。Paul Lévy[22]）。

Brownの時代には植物の新種を求める探検が国家的事業であった。Brown自身も1801年から始まったオーストラリアとタスマニアへの探検旅行に加わり、膨大な数の新種を収集した。この整理のために大英博物館で任にあたったのがBrownの研究生活の始まりである。そこで顕微鏡に関する観測技術を磨き、1826年から27年にかけて水中におかれた花粉の微粒子が不規則な運動を行うこと—当時としては驚異的な1ミクロン程度の微粒子の動き—を確認した。

このブラウン運動のような“ゆらぎ”や“ノイズ”の典型的なものでかつ重要なものはガウス型をしている。それらを記述するガウス型の確率場が与えられたとして、その汎関数を数学的に扱うこととした。微粒子の運動から生まれた数学がPaul Lévyの数学、そして伊藤氏・飛田氏の研究の流れの真ん中に位置している。

1) ブラウン運動

ブラウン運動の確率的定義について述べる。時間のパラメータ t は実数全体を動くこととし、簡単のためにとる値を1次元として話を進める。偶然を表すパラメータ ω は適当な集合 Ω の上を動き、 Ω には確率測度 P が導入されているとする。 Ω 上の確率変数の系 $\{B(t, \omega); t \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega\}$ がブラウン運動であるとは（飛田氏表記）

i) ガウス型確率変数系

ii) $E(B(t)) \equiv 0$,

$$E(B(t), B(s)) = (1/2)(|t| + |s| - |t - s|),$$

iii) $B(0, \omega) = 0$

をみたすものである。（ $B(t, \omega)$ における ω は省略することが多い。）

ブラウン運動の汎関数は $f(B(t), t \in \mathbb{R}) \cdots \textcircled{1}$

と書ける。

$\dot{B}(t) = dB(t)/dt$ として $\{\dot{B}(t)\}$ を用いれば $\textcircled{1}$ は

$\Phi(\dot{B}(t), t \in \mathbb{R}) \cdots \textcircled{2}$

と書ける。この $\dot{B}(t)$ は超関数となる。

Paul Lévyの表記では、

ガウス過程 $X(t), t \geq 0$ が与えられたとする。平均値は0とする。この $X(t)$ からブ

Probability Theory of Paul Lévy
-From the point of view of Kiyoshi Ito and Takeyuki Hida-

ラウン運動 $B(t)$ を構成して

$$X(t) = \int_0^t F(t, u) dB(u)$$

と表現する.

($dB(u)$ は現在では $\dot{B}(u)du$ とあらわす.)

Paul Lévyの興味深い例として $B(t)$ をブラウン運動とすると、それから定義される2つのガウス過程

$$X_1(t) = \int_0^t (2t - u) dB(u)$$

$$X_2(t) = \int_0^t (3t - 4u) dB(u)$$

は同じガウス過程である (飛田氏表記) .

Lévy自身、この結果に大変驚いたと言っている. 「しかしこの結果によって私はGauss型確率関数を深く研究するようになり、一般論を確立することができた」(Paul Lévy,[22])と述べている.

2) ブラウン運動の源

ブラウン運動についての問題の解決には、軌道の丹念な研究が必要である. ただ、Paul Lévyにはこの研究に対しては十分な備えがあった. 彼は10代の頃から接線を持たない曲線があるとか、またそのような曲線を構成している屈曲路は奇妙なもので、曲線の弧が無限に伸びていなくても必然的に無限の長さを持つようになってしまうという事実に興味を持っていた. ブラウン運動の曲線はほとんど確実に接線を持たない曲線である.

Paul Lévy自身、Saint-Louisにいた18歳前後が、開花の時期だったと述べ、「一確率論研究者の回想」[22]の中には次のような例が書かれている.

「私は紙の上に太いペンで描かれている一つの曲線 C_0 を考えてみた. 実際には幅 l を持つ帯 S_0 が描かれるわけで、 C_0 はその中心の曲線である. つぎに、その10倍細いペンで S_0 の内部に幅 $1/10$ の帯 S_1 を入れて、正弦曲線が二つの直線の間を振動するのと同じように、交互に S_0 の縁に接してその中心線 C_1 が C_0 を 45° の角で切るようにする. さらに10倍細いペンで同様に S_1 の内部に帯 S_2 を入れ、このようにして限りなく続けていく. これらの線は次第に細く、次第にねじれて、極限では接線を持たない、長さ無限大の連続曲線を定義する. 」

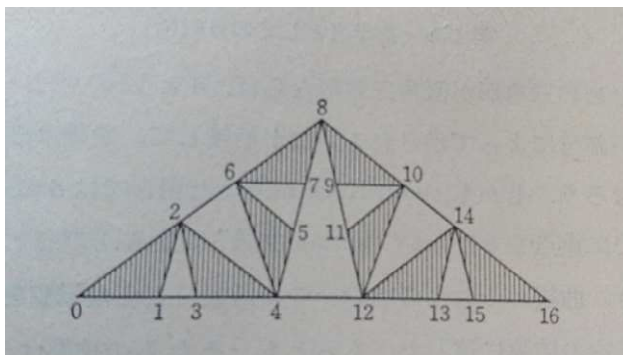


図4「一確率論研究者の回想」中の挿絵

やがてこの考えを精緻化して、今日 von Kochの曲線と呼ばれる一つの曲線を定義している (1903年). この件について数学者であった父に説明したところ、

父親には“それは曲線ではない”といわれ、それはどうしてもあきらめきれないことであったが、父には分からなかったんだと思い、その場を立ち去ったと語っている。発表していれば von Kochの発表(1902年)に先んずることはなかったがCesaroの発表(曲線がそれらの点の周期でどんな挙動をするかを問題にしたもの)には先んじていただろうと振り返っている[22]。

コッホ曲線については、精密な作り方によって、曲線が再度同じ点を通過することはない。ブラウン運動のランダムな性格は、平面上のブラウン運動の曲線のどんな弧も無限個の2重点をもつといった全く新しい事情を生み出している。ただコッホ曲線についての思索がのちのブラウン運動に関する研究の源となったことは事実であろう。

最近のT. Hida, SiSiのLectures on White Noise Functionalsには、確率空間におけるブラウン運動の図(図5)が表紙を飾っている。

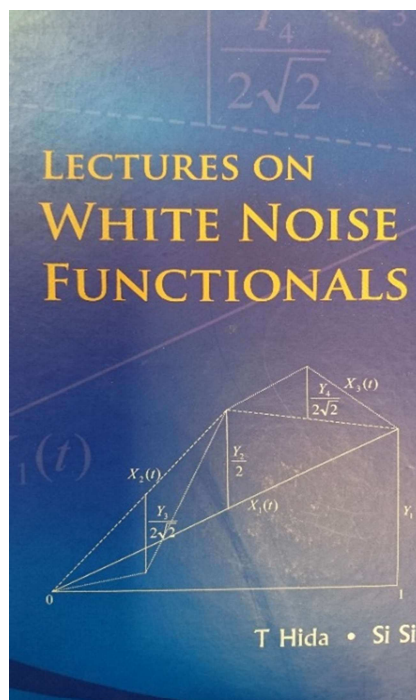


図5 ブラウン運動の図

§4. まとめ・考察

伊藤氏も飛田氏もブラウン運動のようなある条件を満たすクラスを、基本的な確率過程を用いて実現して研究する方向を一貫してとっている。私は、2人の数学者伊藤清氏と飛田武幸氏が直感的な記述が多いレヴィの数学に難解さを感じつつも惹かれていったのは、やはり、自然界の不思議な動きであるブラウン運動に着目し—物理学ではアインシュタインが着目したように—、その源に戻るようなまた芯を捉えるような確率的手法のよさに気付いたからではないかと考えている(伊藤氏は、Lévyの著書の中に真に新しい確率論の本質を見い出したと表現している[13])。

ブラウン運動の確率的表現のよさについて、ひとつの例を示したい。Lévyは1955年の第3回バークレー・シンポジウムで“A special problems of Brownian motion and a general theory of Gaussian random functions”と題して講演した。ここでLévyはガウス過程の標準表現を提唱している。前章でも述べたが、ガウス過程 $X(t), t \geq 0$ が与えられ、平均値は0としたときに、この $X(t)$ からブラウン運動 $B(t)$ を構成して

$$X(t) = \int_0^t F(t, u) dB(u)$$

と表現した。 $X(t)$ は t の動きに従って変化する偶然量であり、それは相互に複雑

Probability Theory of Paul Lévy
-From the point of view of Kiyoshi Ito and Takeyuki Hida-

に関連しあって変化するため簡単にその行動を規定することはできない．共分散関数を計算したとしても多次元の同時分布をみることになるだけで， t の動きに応じた変化の様子は簡単には分らない．しかし上述のように表現すると，ブラウン運動が時間の変化に応じて逐次独立な偶然量を加えていき，しかもガウス分布に従う．その変化量はランダムでない係数 $F(t, u)$ のウエイトがかかって時間進行に応じた $X(t)$ の変化の様子が明らかになる．偶然量 $\{X(t)\}$ から独立な確率系 $\{B(t)\}$ を選んでその関数で表されたことになる．

飛田氏はこの第3回バークレー・シンポジウムのLévyの論文に，極めて大きな興味を持った．その後飛田氏は第5回バークレー・シンポジウムで非線形解析に関するHida-Ikedaの論文を発表し，独立還元論（Reductionism）の考えに触れている．独立現象を表す確率変数や確率過程など，独立確率変数系を構成し，その関数として元の偶然現象を記述して，統一的方法で解析を行い，また，この独立変数系は元の確率変数や確率過程と同じ情報を持たなければならないという考えである．Lévyの関数解析の方法が，ホワイトノイズ解析に繋がるパイロット的な存在となり，また飛田氏の思想である独立還元論（Reductionism）に至るといえる．

さらに，連続パラメータの場合には，Lévyは1953年のカリフォルニア大学バークレー校での講演記録において，確率過程 $X(t)$ について

$$\delta X(t) = \Phi(X(s), s \leq t, Y, t, dt)$$

を提唱している．Innovation（この言葉をLévy自身は使用していない）に相当するものである．

飛田氏はReductionという考えに至ってやっとLévyのInnovationと同じ目線に並ぶことができたと言っている．Lévyをフォローするなら，同じ出発点に立たせてもらって，自分の考えで，新しく出発することではなければならない．それがLévyを師と仰ぐ所以であるとも述べている．

伊藤は，Lévy は透徹した理論を構築したと述べるとともに，そのLévyの叙述は極めて直観的であって，定式化も証明も必ずしも明確ではなかったと述べている．その後のKolmogorovやDoobによって確率過程論を築くのに都合のよい測度論的基盤が与えられたので，その線に沿ってLévyの思想を説明することに成功している[11]．

レヴィ - 伊藤の結果が示されてから半世紀以上過ぎた1999年にイタリアで女性数学者たちが主催した「3000年紀へ向けての数学」と題する集会が行われ，D. Mumfordは「確率時代の夜明け」の表題で講演した．その中で彼の考えを反映する典型的な例として加法過程におけるレヴィ - ヒンチンの標準形について述べている．^{*1}

$$p(x) = e^{iax - bx^2 - c \int (e^{ixy} - 1 - \frac{ixy}{1+y^2}) du(y)}$$

また

$$x \sim a + b \text{normal} + c \sum (X_i - \text{収束係数} C_i)$$

を取り上げている*2. (これらはともにレヴィ - ヒンチン理論を表している.)

Lévyは“私はこの建物の一つの階を築いた. これを他の人たちで続けてほしい”と述べている.

確率論を構築する過程ではその汎用性が現在のように広範に及ぶとは想定もしていなかったであろうが, ただ, その微量で不規則な変化を捉える手法としての魅力, そして古典的確率論 (伊藤氏が微分積分学でいえば級数論に相当すると感じた[13]) とは違うランダムな動きを捉えることのできる可能性に魅せられたのだろう. Malliavinは「伊藤の方程式はランダムな世界におけるNewtonの方程式である」としばしば述べている. また, 飛田氏は常々「根本に立ち戻って考えること」の重要性を説く. それがすなわちレヴィの数学—レヴィの確率論—そのものではないかと感じている.

*1それはフーリエ変換の上手な変形にあたる. レヴィは $X_{n1} + X_{n2} + \dots + X_{nm}$ のすべての n に分け, そのリミットを考えて, 独立増分 (independent increment) ということ, そしてsample path $X(t, \omega)$ を考えている.

*2「確率時代の夜明け」を読んで, 飛田氏はD. Mumford氏が確率論においても信頼できると語った.

附記:

- 1) ホワイトノイズ解析の創始者である飛田武幸氏は2017年12月29日に90歳にてその生涯を閉じられました. 謹んでご冥福をお祈りいたします.
- 2) 本論文に掲載されている図1のPaul Lévy (飛田氏撮影) 写真は筆者が飛田氏から譲り受けたものです. この写真と飛田氏の論文, お手紙等の掲載は, 飛田氏がご健在のときに了承を得ており, そしてこのたびご家族である飛田史和氏にご快諾いただきました. 心からの謝意を表します.

本研究は科学研究費奨励研究17H00283の助成を受けています.

参考文献

- [1]D. Mumford 著, 荒川薫訳, 確率時代の夜明け, 数学の最先端 21 世紀への挑戦 v. 6, シュプリンガー・ジャパン, 2006
- [2]Glenn Shafer and Laurent Mazliak, Juin “An autobiographical note by Paul Lévy, written for Takeyuki Hida in 1969”, Journal Electronique d’Histoire des Probabilités et de la Statistique Vol5,n°1, 2009
- [3]飛田武幸, 確率場の理論—特にホワイトノイズの超汎関数について, The Physical Society of Japan, P606-P613, 1975
- [4]飛田武幸, ブラウン運動とレヴィの関数解析 (上) (下), 現代数学史のひ

Probability Theory of Paul Lévy
-From the point of view of Kiyoshi Ito and Takeyuki Hida-

- とこま, 日本評論社 1988
- [5] 飛田武幸, 「Paul Lévy の遺したもの」, RIMS 研究集会数学史の研究, 2000
 - [6] T. Hida, SiSi, Lectures on White Noise Functionals, World Scientific, 2008
 - [7] 飛田武幸, レヴィの数学とホワイトノイズ理論, 第 25 回数学史シンポジウム, 2014
 - [8] 伊藤清, Compact 群上ノ Markoff Process, 大阪大学数学教室, 全国紙上数学談話会, 1940
 - [9] 伊藤清, マルコフ過程を定める微分方程式, 大阪大学数学教室, 全国紙上数学談話会, 1942
 - [10] Kiyoshi Itô, On stochastic processes (1) (infinitely divisible laws of probability), Japanese Journal of Mathematics 18, 1942.
 - [11] 伊藤清, 確率論, 岩波基礎数学選書, 1991
 - [12] 伊藤清, 確率論と歩いた 60 年, 第 14 回京都賞記念講演抄録, 1998
 - [13] 伊藤清, 確率論と私, 岩波書店, 2010
 - [14] Marc Barbut, Bernard Locker, Laurent Mazliak, “Paul Lévy and Maurice Fréchet” 50 Years of Correspondence in 107 Letters, Springer, 2004
 - [15] 名古屋大学理学部・大学院理学研究科, 「飛田武幸博士—ホワイトノイズ解析の創始者—」 名古屋大学理学部・大学院理学研究科広報誌「理 philosophia」(spring-summer2017), 2017
 - [16] 大阪大学数学教室, 全国紙上数学談話会, 1934-1949
<http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/shijodanwakai/index.html>
 - [17] Paul Lévy, Notice sur les travaux scientifiques de M. Paul Lévy, Hermann, Paris, 1935
 - [18] Paul Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris, Gauthier-Villars, 1937
 - [19] Paul Lévy, Processus stochastiques et mouvement brownien, Gauthier-Villars, 1948
 - [20] Paul Lévy, A special problems of Brownian motion and a general theory of Gaussian random functions, Univ. of Californian, 1955, pp133-175
 - [21] Paul Lévy 著, 木村・飛田武幸訳, Paul Lévy の科学上の研究の新しい紹介, (訳出論文, 未発表), 1964
 - [22] Paul Lévy 著, 飛田武幸・山本喜一訳, 「一確率論研究者の回想」, 1973
 - [23] 高橋陽一郎, 伊藤清の数学, 日本評論社, 2011
 - [24] 田中紀子, Paul Lévy “INSTITUT DE FRANCE ACADEMIE DES SCIENCES TROISIÈME CENTENAIRE 1666-1966” Gauthier-Villars editeur 1967 飛田武幸先生から教わったこと—確率論ことはじめ—, 第 26 回数学史シンポジウム, 2016
 - [25] 田中紀子, Paul Lévy の自叙伝的な手記, 第 27 回数学史シンポジウム, 2017