

対称行列又はエルミート行列の固有根 の導関数と多変量解析への応用

広島大 理 杉 浦 成昭

§ 1. 序

S を Wishart 分布 $W_p(n, \Sigma)$ に従う正值対称行列とする。 S の α 番目に大きい固有根を l_α とおく。 l_1 の exact な分布は Sugiyama[11], Muirhead[9] により次のように求わられている。

$$\begin{aligned} P(l_1 < x) &= C(p, n) |\Sigma|^{-n/2} x^{pn/2} {}_1F_1\left(\frac{n}{2}; \frac{n+p+1}{2}; -\frac{x}{2} \Sigma^{-1}\right) \\ (1.1.) \quad &= C(p, n) |\Sigma|^{-n/2} x^{pn/2} e^{\text{tr}(-\frac{1}{2} x \Sigma^{-1})} \\ &\quad {}_1F_1\left(\frac{p+1}{2}; \frac{n+p+1}{2}; \frac{x}{2} \Sigma^{-1}\right) \end{aligned}$$

$$\text{ただし } C(p, n) = \Gamma_p\left(\frac{p+1}{2}\right) \left\{ 2^{np/2} \Gamma_p\left(\frac{n+p+1}{2}\right) \right\}^{-1}$$

最小根 l_p の exact な分布について Khatri[7] は $(n-p-1)/2$ が非負の整数であるとき次の式を与えた。

$$(1.2.) \quad P(l_p < x) = 1 - e^{\text{tr}(-\frac{x}{2} \Sigma^{-1})} \sum_{k=0}^{p(n-p-1)/2} \sum_{\kappa}^* x^{\kappa} c_{\kappa}(\Sigma^{-1}) / k!$$

ただし $\sum_{\kappa}^*$ は $(-n+p+1)/2, \kappa \neq 0$ なる κ の分割 κ についての和を表わす。一般の場合は Hirakawa[5] により Laguerre 多項式を用いて次のように与えられている。

$$\begin{aligned}
 P(l_p < x) &= 1 - \Gamma_p\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \left\{ \Gamma_p(p+1) \Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right) |\Sigma|^{\frac{n}{2}} 2^{np/2} \right\}^{-1} \\
 (1,3) \quad & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\kappa} \frac{L_{\kappa}^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2} \Sigma^{-1}\right)}{k! \left(\frac{1}{2}(n+p+1)\right)_{\kappa} C_{\kappa}(I_p)} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{\kappa_1} \frac{\left(\frac{1}{2}(p+1)\right)_{\kappa_1}}{k_1! (p+1)_{\kappa_1}} \\
 & \sum_{\nu} g_{\kappa \kappa_1}^{\nu} \left(\frac{n+p+1}{2}\right)_{\nu} C_{\nu}(I_p) x^{\frac{np}{2} + k} (1+x)^{-\frac{1}{2}p(n+p+1) - k - k_1}
 \end{aligned}$$

ただし $g_{\kappa \kappa_1}^{\nu}$ は $C_{\kappa}(S) C_{\kappa_1}(S) = \sum_{\nu} g_{\kappa \kappa_1}^{\nu} C_{\nu}(S)$ より定まる底数とする。

$\Sigma=1$ のとき S が *noncentral Wishart* 分布のときについては他にいくつかの結果がある。

筆者は数年前よりこれらの結果を用いて l_n の分布の n が大きいときの漸近展開を求めようと試みたが現在のところ成功していない。ここでは別の方法、すなわち l_n の S についての *Taylor* 展開を求めることにより Σ の α 番目に大きい固有根 λ_{α} が単根であれば 任意の α について l_n の分布の漸近展開が求まることを示す。

これの応用として対称行列の空間での微分 operator を固有値の空間での微分 operator に変換することが可能となり、Fujikoshi [2], Hayakawa [4] が求めた zonal 多項式 $C_{\kappa}(S)$ に関する微分関係式が実は James [6] が *metric* $tr(S^{-1}dS)^2$ に関する Laplace-Beltrami operator の固有値を計算することから求めた偏微分方程式に対応していることが示される。すなわち漸近展開の方から James の偏微分方程式が導ける。さらにこの方法で zonal 多項式に対する新しい偏微分方程式も得られる。

H を複素 Wishart 分布 $\tilde{W}_p(n, \Sigma)$ に従う正值 Hermite 行列とする。

$\tilde{\lambda}_\alpha$ を H の α 番目に大きい固有根とする。 $\tilde{\lambda}_\alpha$ の分布の漸近展開および H に対する zonal 多項式 $\tilde{C}_\alpha(H)$ に関する偏微分方程式も同様な議論で求まる。ここでは簡単のため order の低い場合のみ述べるが 詳しい内容は筆者 [10] にある。

§ 2 固有根 $\lambda_\alpha, \tilde{\lambda}_\alpha$ の Taylor の展開

$f(l, S) = |S - lI|$ を考えれば f は l および S の元 $s_{ij} (i \leq j)$ について無限回微分可能である。よって陰関数の定理により $f(l, S) = 0$ より定まる λ_α は S の関数とみたとき $\partial f / \partial l \neq 0$ なる点において無限回微分可能である。 $S = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ での微分について次の結果が成り立つ。

Lemma 2.1. λ_α が単根のとき。

$$(2,1) \quad \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial s_{\alpha\alpha}} = 1, \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial s_{ij}} (i=j=\alpha \text{ を除く}) = 0, \frac{\partial^2 \lambda_\alpha}{\partial s_{ij}^2} = \frac{2}{\lambda_\alpha - \lambda_j} (j \neq \alpha) \\ \frac{\partial^2 \lambda_\alpha}{\partial s_{ij} \partial s_{kl}} = 0 \quad (\text{上の場合を除く})$$

これより $\lambda_\alpha(S)$ の $\frac{1}{n}S = \Lambda$ での Taylor 展開が次のように求まる。

$$(2,2) \quad \frac{1}{n} \lambda_\alpha = \lambda_\alpha + \left(\frac{s_{\alpha\alpha}}{n} - \lambda_\alpha \right) + \frac{1}{2!} \sum_{j \neq \alpha} \frac{2}{\lambda_\alpha - \lambda_j} \left(\frac{s_{\alpha j}}{n} \right)^2 + \dots$$

H を Hermite 行列としその (r, s) 要素について実数部と虚数部に分けて $h_{rs} = h_{rs}^R + i h_{rs}^I$ とおく。当然 $h_{rs}^I = 0$ である。 H の α 番目に大きい固有根 $\tilde{\lambda}_\alpha$ についても $H = \Lambda$ での微分が Lemma 2.1. と同様な形で成り立つ。

Lemma 2.2. λ_α が単根のとき

$$(2,3) \quad \frac{\partial \ell_\alpha}{\partial h_{\alpha\alpha}} = 1, \quad \frac{\partial \ell_\alpha}{\partial h_{jk}^R} = \frac{\partial \tilde{\ell}_\alpha}{\partial h_{jk}^I} = 0 \quad (j=k=\alpha \text{ を除く})$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\ell}_\alpha}{\partial (h_{\alpha j}^R)^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\ell}_\alpha}{\partial (h_{\alpha j}^I)^2} = \frac{2}{\lambda_\alpha - \lambda_j} \quad (j \neq \alpha)$$

その他の2階微分=0

これより次のTaylor展開が成り立つ。

$$(2,4) \quad \frac{\tilde{\ell}_\alpha}{n} = \lambda_\alpha \left(\frac{h_{\alpha\alpha}}{n} - \lambda_\alpha \right) + \frac{1}{2!} \sum_{j \neq \alpha} \frac{2}{\lambda_\alpha - \lambda_j} \left\{ \left(\frac{h_{\alpha j}^R}{n} \right)^2 + \left(\frac{h_{\alpha j}^I}{n} \right)^2 \right\} + \dots$$

§3 固有根の分布の漸近展開

S を Wishart 分布 $W_p(n, \Sigma)$ に従う行列とする。 $\Delta \in \text{correction factor}$ として $m = n - 2\Delta$ ($\Delta = O(1)$) とおく。 $(S/m - \Sigma)\sqrt{m}$ が $m \rightarrow +\infty$ のとき平均0の正規分布に従うことから $f(S/m)$ の Taylor 展開

$$(3,1) \quad f(S/m) = [\text{etr}(\frac{S}{m} - \Sigma) \partial] f(\Gamma) \Big|_{\Gamma = \Sigma}$$

ただし $\partial = (\frac{1}{2}(1 + \delta_{rs}) \frac{\partial}{\partial \gamma_{rs}})$ を用いて次の展開が成り立つ。

Lemma 3.1. $T = (S/m - \Sigma)\sqrt{m}$ とおく。 A を任意の p 次対称行列とすると

$$(3.2.) \quad E[\text{etr}(itAT) f(S/m)] = \text{etr} \{ -t^2(A\Sigma)^2 \} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^2 d_{2j-1} (it)^{2j-1} + \frac{1}{m} \sum_{j=0}^2 g_{2j} (it)^{2j} + O\left(\frac{1}{m\sqrt{m}}\right) \right] f(\Gamma) \Big|_{\Gamma = \Sigma}$$

ただし $d_1 = \text{tr}(2\Sigma A \Sigma \partial + 2\Delta \Sigma A)$

$$d_3 = \frac{4}{3} \text{tr}(\Sigma A)^3$$

$$(3.3.) \quad g_0 = \text{tr}(\Sigma \partial)^2 + 2\Delta \text{tr}(\Sigma \partial)$$

$$g_2 = 4\text{tr}(\Sigma A)^2 \Sigma \partial + 2\Delta \text{tr}(\Sigma A)^2 + \frac{1}{2} d_1^2$$

$$g_4 = 2\text{tr}(\Sigma A)^4 + d_1 d_3$$

$$g_6 = \frac{1}{2} d_3^2$$

さて $\ell_\alpha(S)$ の分布を考えるには $\Sigma = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ としてよい。
 λ_α が単根のとき Taylor 展開 (2.2.) より

$$(3.4.) \quad (\ell_\alpha(S)/m - \lambda_\alpha)\sqrt{m} = \sqrt{m}(\frac{S_{\alpha\alpha}}{m} - \lambda_\alpha) + \frac{\sqrt{m}}{2!} \sum_{j \neq \alpha} (\frac{S_{\alpha j}}{m})^2 \frac{2}{\lambda_\alpha - \lambda_j} + O_p(\frac{1}{m})$$

であるから $(\ell_\alpha(S)/m - \lambda_\alpha)\sqrt{m}$ の特性関数は

$$(3.5.) \quad E[\exp\{it\sqrt{m}(\frac{1}{m}S_{\alpha\alpha} - \lambda_\alpha)\} \cdot \{1 + \sqrt{m} \sum_{j \neq \alpha} (\frac{S_{\alpha j}}{m})^2 \frac{1}{\lambda_\alpha - \lambda_j}\}] + O(m^{-1})$$

Lemma 3.1. で $A = \text{diag}(0, \dots, 0, \alpha, 0, \dots, 0)$ ととれば

$$(3.6.) \quad E[\exp\{it\sqrt{m}(\frac{1}{m}S_{\alpha\alpha} - \lambda_\alpha)\}] = e^{-t^2\lambda_\alpha^2} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{m}} \{2\Delta\lambda_\alpha it + \frac{4}{3}\lambda_\alpha^3(it)^3\} \right] + O(\frac{1}{m})$$

$f(\Gamma) = \sum_{j \neq \alpha} \lambda_{\alpha j}^2 / (\lambda_\alpha - \lambda_j)$ とおくことにしよう

$$(3.7.) \quad E\left(\sum_{j \neq \alpha} \frac{S_{\alpha j}^2}{m} \frac{1}{\lambda_\alpha - \lambda_j}\right) \exp\{it\sqrt{m}(\frac{S_{\alpha\alpha}}{m} - \lambda_\alpha)\} \\ = e^{-t^2\lambda_\alpha^2} \sum_{j \neq \alpha} \frac{\lambda_\alpha \lambda_j}{\lambda_\alpha - \lambda_j} + O(\frac{1}{\sqrt{m}})$$

これより ℓ_α の分布の漸近展開が次のように求まる。

Theorem 2.1. $T = \sqrt{2}\lambda_\alpha$ とおく。 $\Phi(x)$ を標準正規分布の分布関数、
 $\Phi^{(j)}(x)$ をその導関数とする。 Σ の固有根 λ_α が単根のとき

$$(3.8.) \quad P(\sqrt{m}(\frac{\ell_\alpha}{m} - \lambda_\alpha)/c < x) = \Phi(x) - \frac{1}{\sqrt{m}} \left[\{2\Delta\lambda_\alpha \right. \\ \left. + \sum_{j \neq \alpha} \frac{\lambda_\alpha \lambda_j}{\lambda_\alpha - \lambda_j}\} \Phi^{(1)}(x)/c + \frac{4}{3}\lambda_\alpha^3 \Phi^{(3)}(x)/c^3 \right] + O(m^{-1})$$

H を複素 Wishart 分布 $\tilde{W}_p(n, \tilde{\Sigma})$ に従う正値 Hermite 行列とする。

$T = \sqrt{m}(H/m - I)$ とおく。 Hermite 行列 $\Gamma = (\gamma_{rs}^R + i\gamma_{rs}^I)$ に対し微分 operator を (3.9.) $\tilde{\partial} = (\frac{1}{2}(1 + \delta_{rs})\frac{\partial}{\partial \gamma_{rs}^R} + \frac{i}{2}(1 - \delta_{rs})\frac{\partial}{\partial \gamma_{rs}^I})$ とおく

このとき $f(H/m)$ の Taylor 展開は Hayakawa [4] により次のように

$$(3.10.) \quad [e^{\text{tr}(H - \Lambda)\tilde{\partial}}] f(\Gamma) \Big|_{\Gamma = \Lambda}$$

Lemma 3.1. に対応して

Lemma 3.2. $m=n-\Delta'$, A を任意の P 次 Hermite 行列とすると
 き (3.11.) $E[\text{etr}(itAT)f(H/m)] = \text{etr}\{-\frac{1}{2}t^2(A\tilde{\Sigma})^2\}$

$$\left[1 + \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^2 d_{2j-1}(it)^{2j-1} + \frac{1}{m} \sum_{j=0}^2 q_{2j}(it)^{2j} + O\left(\frac{1}{m\sqrt{m}}\right)\right] f(\Gamma)_{\Gamma=\tilde{\Sigma}}$$

ただし d_j, q_j は Lemma 3.1. において $\Delta \rightarrow \Delta/2$, $\Sigma A \rightarrow \tilde{\Sigma} A/2$, $\Sigma \Rightarrow \tilde{\Sigma}/2$, $t \rightarrow 2t$ とおきかえたものである。

$\tilde{\Sigma}$ の α 番目に大きい固有根を λ_α としそれが単根とする。

$\sqrt{m}(\tilde{\mathcal{L}}_\alpha(H)/m - \lambda_\alpha)$ の特性関数を考えて Lemma 3.2. を使えば次の漸近展開が得られる。

Theorem 3.2. H を複素 Wishart 分布 $\tilde{W}_p(n, \tilde{\Sigma})$ に従う Hermite 行列とする。 H の α 番目に大きい固有根を $\tilde{\mathcal{L}}_\alpha$ とする。 $\tilde{\Sigma}$ の固有根 λ_α が単根のとき

$$(3.12) \quad P(\sqrt{m}(\frac{\tilde{\mathcal{L}}_\alpha}{m} - \lambda_\alpha)/c < x) = \Phi(x) - \frac{1}{\sqrt{m}} \left[\Delta' \lambda_\alpha + \sum_{j \neq \alpha} \frac{\lambda_\alpha \lambda_j}{\lambda_\alpha - \lambda_j} \right] \Phi^{(1)}(x)/c + \frac{1}{3} \lambda_\alpha^3 \Phi^{(3)}(x)/c^3 + O(m^{-1})$$

$\mathcal{L}_\alpha(S)$ および $\tilde{\mathcal{L}}_\alpha(H)$ の 3 次の導関数を求め漸近展開の $O(m^{-1})$ の項を求める計算が筆者 [10] にある。 $\mathcal{L}_\alpha(S)$ の漸近正規性は Girshick [3] により求められている。 λ_α が単根でないとき、上のように正規分布で漸近展開できないことは $p=2$ で $\Sigma=I$ のときを考えることによりわかる。このとき $(t_{11}) = \sqrt{n}(S/n - I)$ により (3.13.) $\sqrt{n}(\mathcal{L}_1/n - 1) = \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) + \frac{1}{2}\{(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}^2\}^{\frac{1}{2}}$ と表わされ $n \rightarrow +\infty$ のとき t_{11}, t_{22} は $N(0, 2)$ に t_{12} は $N(0, 1)$ にそれぞれ独立に従うことから $\sqrt{n}(\mathcal{L}_1/n - 1)$ の極限分布が

$$(3.14.) \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} (e^{-\frac{1}{2}u^2} + u e^{-\frac{1}{4}u^2} \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}u} e^{-t^2} dt) \quad (-\infty < u < +\infty)$$

となることがわかる。P=2の場合 Sugiyama[12] は(1,1)を用いて n, Σ を与えたとき $P(l_1/n < x)$ の正確な値を計算している。Theorem 3.1より 漸近展開から近似値を求めて比較すると 次のようになる。 $m=n=40$ のとき l_1/n の上側 5% 点は Sugiyama[12] より 1.575473 である。

$$P\left(\frac{1}{n}l_1 > 1.575473\right)$$

	$\lambda_1 = 1.5$	$\lambda_1 = 1.2$	$\lambda_1 = 1.1$	$\lambda_1 = 1.5$
	$\lambda_2 = 0.5$	$\lambda_2 = 0.8$	$\lambda_2 = 1.0$	$\lambda_2 = 1.4$
$O(1)$ の項	0.4109	0.0809	0.0266	0.4110
$O(n^{1/2})$ の項	-0.0058	0.0442	0.0814	0.5813
$O(n^{-1})$ の項	-0.0006	-0.0121	-0.0688	-0.1053
Total	0.4045	0.1130	0.0392	0.8870
exact value	0.4045	0.1177	0.0920	0.6802

§ 4 Zonal 多項式に対する偏微分方程式

S を $P \times P$ 正値対称行列とする。正整数 k の分割 $K = \{k_1, \dots, k_p\}$ $k_1 \geq \dots \geq k_p \geq 0$, $k_1 + \dots + k_p = k$ に対応する S の zonal 多項式を $C_K(S)$ とする。 S の固有根を $y_1 \geq \dots \geq y_p$ とし $Y = \text{diag}(y_1, \dots, y_p)$ とおく。 James [6] は $C_K(S) = C_K(Y)$ が次の偏微分方程式を満たすことを示した。

$$(4) \quad \left\{ \sum_{i=1}^p y_i^2 \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \sum_{i \neq j} \frac{y_i y_j}{y_i - y_j} \frac{\partial}{\partial y_i} - a_1(X) \right\} C_X(Y) = 0$$

ただし $a_1(X) = \sum_{\alpha=1}^p k_\alpha(k_\alpha - \alpha)$ これは後に Muirhead [8] らによる超幾何関数の偏微分方程式を導くのに基礎となった方程式である。James [6] は metric $tr(S^{-1}dS)^2$ に対する Laplace-Beltrami operator の固有値を計算することにより上の方程式を得ている。筆者は昨年の変量解析シンポジウムで James の方法を modify することにより Hermite 行列に対する zonal 多項式 $\tilde{C}_X(Y)$ について

$$(4.2) \quad \left\{ \sum y_i^2 \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + 2 \sum_{i \neq j} \frac{y_i y_j}{y_i - y_j} \frac{\partial}{\partial y_i} - \tilde{a}_1(X) - k \right\} \tilde{C}_X(Y) = 0$$

を導いた。ただし $\tilde{a}_1(X) = \sum_{\alpha=1}^p k_\alpha(k_\alpha - 2\alpha)$ とする。ここでは漸近展開の立場からこれらの方程式の別証明を与える。 $f(S)$ の Taylor 展開 (3.1) を用いて

$$(4.3) \quad n^{p/2} \left\{ |\Sigma|^{n/2} \Gamma_p\left(\frac{1}{2}n\right) 2^{\frac{np}{2}} \right\}^{-1} \int_{S>0} |S|^{(n-p-1)/2} e^{tr(-\frac{n}{2}\Sigma^{-1}S)} f(S) dS \\ = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} tr(\Lambda)\right)^2 + \frac{1}{6n^2} \{3(tr(\Lambda))^2 + 8tr(\Lambda)\}^3 \right\} f(\Gamma) \Big|_{\Gamma=1} + O(n^{-3})$$

ただし $\Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, λ_α は Σ の α 番目に大きい固有根とする。 $f(S) = C_X(S)$ とおけば Constantine [1] による Γ 型積分公式

$$(4.4) \quad |R|^t \int_{S>0} e^{tr(-RS)} |S|^{t-\frac{p+1}{2}} C_X(ST) dS = \Gamma_p(t, X) C_X(TR^{-1})$$

を用いて (4.3) の左辺は $(\frac{1}{2}n)_X C_X(\frac{1}{n}\Lambda)$ となる。これを n について展開すると (4.1) Fujikoshi [2] は

$$(4.5) \quad tr(\Lambda)^2 C_X(\Gamma) \Big|_{\Gamma=1} = a_1(X) C_X(\Lambda) \\ \{3(tr(\Lambda))^2 + 8tr(\Lambda)\}^3 C_X(\Gamma) \Big|_{\Gamma=1} = \{3a_1(X)^2 - a_2(X) + k\} C_X(\Lambda)$$

を得た。ただし $a_2(\kappa) = \sum_{\alpha=1}^p k_{\alpha} (4k_{\alpha}^2 - 6\alpha k_{\alpha} + 3\alpha^2)$ $\Gamma = (\gamma_{ij})$

$$\text{とすれば (4.6.) } a_2(\Lambda)^2 = \sum_{i=1}^I \lambda_i^2 \frac{\partial^2}{\partial \gamma_{ii}^2} + \frac{1}{4} \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j \frac{\partial^2}{\partial \gamma_{ij}^2}$$

$C_X(\Gamma)$ は Γ の固有根 $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ の関数とみなせるから Lemma 2.1.

$$\begin{aligned} \text{より (4.7.) } \frac{\partial}{\partial \gamma_{ij}} &= \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial \gamma_{\alpha}}{\partial \gamma_{ij}} \frac{\partial}{\partial \gamma_{\alpha}} \\ \frac{\partial^2}{\partial \gamma_{ij}^2} &= \sum_{\alpha=1}^I \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha}}{\partial \gamma_{ij}^2} \frac{\partial}{\partial \gamma_{\alpha}} + \sum_{\alpha, \beta=1}^p \frac{\partial \gamma_{\alpha}}{\partial \gamma_{ij}} \frac{\partial \gamma_{\beta}}{\partial \gamma_{ij}} \frac{\partial^2}{\partial \gamma_{\alpha} \partial \gamma_{\beta}} \end{aligned}$$

$$\Gamma = \Lambda \text{ として } \frac{\partial}{\partial \gamma_{ij}} = 0 \quad (i \neq j) \quad \frac{\partial}{\partial \gamma_{ii}} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{(4.8.) } \frac{\partial^2}{\partial \gamma_{ij}^2} &= \frac{2}{\lambda_i - \lambda_j} \frac{\partial}{\partial \gamma_i} + \frac{2}{\lambda_j - \lambda_i} \frac{\partial}{\partial \gamma_j} \quad (i \neq j) \\ \frac{\partial^2}{\partial \gamma_{ii}^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \gamma_i^2} \end{aligned}$$

これを (4.6.) に代入すれば (4.5.) より James の方程式 (4.1.) を得る。
Hermite 行列 $\tilde{\Gamma}$ に対する zonal 多項式についても同様の議論
により Hayakawa [4] は

$$\begin{aligned} \text{(4.9.) } a_2(\Lambda \tilde{\alpha})^2 \tilde{C}_X(\tilde{\Gamma})|_{\tilde{\Gamma}=\Lambda} &= (\tilde{a}_1(\kappa) + k) \tilde{C}_X(\Lambda) \\ &\quad [3\{a_2(\Lambda \tilde{\alpha})^2\}^2 + 8a_2(\Lambda \tilde{\alpha})^3] \tilde{C}_X(\tilde{\Gamma})|_{\tilde{\Gamma}=\Lambda} \\ &= \{3\tilde{a}_1(\kappa)^2 - 2\tilde{a}_2(\kappa) + 6\tilde{a}_1(\kappa)(k-1) + 3k^2 - 2k\} C_X(\Lambda) \end{aligned}$$

を得ている。ただし $\tilde{a}_2(\kappa) = 2 \sum_{\alpha=1}^I k_{\alpha} (k_{\alpha}^2 - 3\alpha k_{\alpha} + 3\alpha^2)$, Λ は $\tilde{\Gamma}$ の固有根 λ_{α} を対角元にもつ対角行列とする。

$$a_2(\Lambda \tilde{\alpha})^2 = \sum_i \lambda_i^2 \frac{\partial^2}{\partial \gamma_{ii}^2} + \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j \left\{ \frac{\partial^2}{\partial (\gamma_{ij}^R)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (\gamma_{ij}^I)^2} \right\}$$

および $\tilde{\Gamma} = \Lambda$ のとき Lemma 2.2. から (4.8.) が γ_{ij} の代りに γ_{ij}^R を使
っても γ_{ij}^I を使っても成り立つことから方程式 (4.2.) を得る。

(4.5.) の右の微分式および (4.9.) の右の微分式を同様の論法
でかきかえると折々は新しい 4 階の偏微分方程式を得るが

それには $\mathcal{L}_\alpha(S)$, $\tilde{\mathcal{L}}_\alpha(H)$ の 3 次微分と 4 次微分の一部が必要になり Lemma 2.1. および Lemma 2.2. をもっと詳しくしなければならぬ。計算が少し面倒になり、得られた方程式もやや長いものになる。これらのことは 筆者 [10] に述べてあるのでここでは省略する。

References

- [1] Constantine, A.G. (1963). Some non-central distribution problems in multivariate analysis.
Ann.Math.Statist. 34 1270-1285.
- [2] Fujikoshi, Y. (1970). Asymptotic expansions of the distributions of test statistics in multivariate analysis.
J.Sci.Hiroshima Univ.Ser.A-I 34 73-144.
- [3] Girshick, M.A. (1939). On the sampling theory of roots of determinantal equations.
Ann.Math.Statist. 10 203-224.
- [4] Hayakawa, T. (1970). The asymptotic distributions of the statistics based on the complex gaussian distribution. Mimeo Series NO.654 Univ.of North Carolina
- [5] Hirakawa, F. (1973). Note on the distribution of the minimum latent root. Ann.Inst.Statist.Math. 25 165-172.
- [6] James, A.T. (1968). Calculation of zonal polynomial coefficients by use of the Laplace-Beltrami operator.
Ann.Math.Statist. 39 1711-1718.

- [7] Khatri, C.G. (1972). On the exact finite series distribution on the smallest or the largest root of matrices in three situations. J. Multivariate Analysis 2 201-207.
- [8] Muirhead, R.J. (1970). Systems of partial differential equations for hypergeometric functions of matrix argument. Ann. Math. Statist. 41 991-1001.
- [9] Muirhead, R.J. (1970). Asymptotic distributions of some multivariate tests. Ann. Math. Statist. 41 1002-1010.
- [10] Sugiura, N. (1973). Derivatives of the characteristic root of a symmetric or a Hermitian matrix with two applications in multivariate analysis. Communications in Statist. 1 393-417.
- [11] Sugiyama, T. (1967). On the distribution of the largest root of the covariance matrix. Ann. Math. Statist. 38 1148-1151.
- [12] Sugiyama, T. (1972). Percentile points of the largest latent root of a matrix and power calculations for testing hypothesis $\Sigma=1$. J. Japan Statist. Soc. 3 1-8.