

半空間 D の system $\{P(b), B_j(b), j=1, \dots, p\}$ に対する Liouville type theorem について

筑波大学 数学系 柴田 良弘

§1. Introduction. Rellich [11] の classical theorem によれば, reduced wave eq $\Delta u + u = 0$ outside a ball in $\mathbb{R}^n$ の解は $u(x)|x|^{n-1/2} \rightarrow 0$ as $|x| \rightarrow \infty$ であれば, $u \equiv 0$ である. この結果の拡張はより広い class の operators に対してなされた. S. Agmon [1, 2], W. Littman [5, 6], F. Trèves [12] (これらの論文の references を参照) の仕事の後, 村田 [7, 8], Hörmander [3] により 荒く言って次の事が示された. $P(b)$ を $D = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$ に関する定数係数の多項式 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ とする.

(1) $P(b)u = 0$ in $\mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{S}' \cap L^2_{loc}$ ならば u は

$$(1.1) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R^{-d} \int_{T_R} |u(x)|^2 dx = 0$$

を満たせば $u \equiv 0$ である. ここで d は $A = \{\xi \in \mathbb{R}^n; P(\xi) = 0\}$ の codimension. T は $\mathbb{R}^n$ の open cone であって T の A に含まれる多様体の normal plane と交わる. また $T_R = \{x \in T; R < |x| < 2R\}$.

(2) (1) の条件に加えて P の各 irreducible factor が real

hypersurface 上で 0 となり, Γ はあるそのような矢の両側の normal directions を含むとする。このとき $u \in \mathcal{S}' \cap L^2_{loc}$ が $P(b)u \in \mathcal{E}'$ であれば u が

$$(1.2) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R^{-1} \int_{\Gamma_R} |u(x)|^2 dx = 0$$

を満たせば $u \in \mathcal{E}'$ である。

(2) は Rellich theorem の拡張となっている。即ち $P(b)u=0$ なる方程式を compact set の外側で考えたとき, u が (1.2) を満たせばその領域で $u \equiv 0$ となる。次に unbounded domain の外部領域で $P(b)u=0$ なる方程式を考えたとき、やはり (1.2) の形で解の一意性が判定できる為の領域と $P(b)$ に対する条件がどのようなものであるかが問題となる。考える領域 Ω がある paraboloid of revolution の外部を含む場合, $L = -\Delta + f(x)$ に対して $(L - \lambda)u = 0$ in Ω が $u \in L^2(\Omega)$ であれば $u \equiv 0$ in Ω なる結果が 今野 [4] により得られた。また Γ を closed convex proper cone として $\Omega = \mathbb{R}^n - \Gamma$ とおくと、 $P(b)$ が適当な Γ によって決まる幾何的条件を満たす場合, $P(b)u=0$ in Ω , $u \in \mathcal{S}' \cap L^2_{loc}$ なる u について, u が (1.2) を満たせば $u \equiv 0$ in Ω であることが 村田-柴田 [9] で得られた。一方 Ω が half-space に含まれる様な unbounded domain の場合, S. Agmon [1] により, Schrödinger op の homogeneous equations の Ω での解で Dirichlet zero boundary condition を満たすもの u について

$$(4.3) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R^{-1} \int_{R < |x| < 2R} |u(x)|^2 dx = 0$$

を満せば" $u \equiv 0$ であることが知られている。更に Dirichlet zero 条件をおかなければならないことも知られている。我々はここで特に Ω が半空間の場合、任意の定数係数作用素 $P(D)$ と $P(b)$ から決まる条件をみたす boundary operators $\{B_j(b), j=1, \dots, p\}$ に対して、 $\{P(b), B_j(b), j=1, \dots, p\}$ に対する homogeneous boundary problem の解 $u \in \mathcal{S}'(\bar{\Omega}) \cap L^2_{loc}(\bar{\Omega})$ が $\{P(b), B_j(b), j=1, \dots, p\}$ から決まる自然数 d について

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-d} \int_{R < |x| < 2R} |u(x)|^2 dx = 0$$

を満せば" $u \equiv 0$ であることを得たことを表わす。更に境界条件が $P(b)$ から決まる条件を満たさない場合は $\mathbb{R}^n$ の急減少関数の Ω への制限によって得られる関数で homogeneous boundary value problem の解があることが示される。(詳しくは、Y. Shibata [10] を参照)。

§ 2. 問題と結果. § 1 とは記号を変え、 $\mathbb{R}^{n+1} \ni (x, y) = (x_1, \dots, x_n, y)$, $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}; y > 0\}$, $D = (D_x, D_y) = i^{-1}(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n, \partial/\partial y)$ とする。 $\{P(D), B_j(D), j=1, \dots, p\}$ を定数係数偏微分作用素の系とする。この system について、次の有次境界値問題を考える。

$$(2.1) \quad P(D)u = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$$

$$(2.2) \quad B_j(b)u|_{y=0} = 0, \quad j=1, \dots, p \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

ここで $u \in C^\infty([0, \infty); \mathcal{S}'(\mathbb{R}_x^n)) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_x^{n+1}); \langle u|_{\mathbb{R}_x^n(0, \infty)}, \varphi(t) \rangle_x \in C^\infty([0, \infty)) \text{ for } \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^n)\}$ ($n > 0$) なるもののみを考える事にする。今 $\{B_j(b), j=1, \dots, p\}$ の満たす可成条件を示す。その為には $P(b) = P(D_x, D_y) = \sum_{j=0}^m a_j(D_x) D_y^j$ とおく。ここで $a_m(\xi) \neq 0$ when $\xi \in \mathbb{R}^n$ とする。 $m \geq 1$ の場合次の条件 (A.1) をおく。これは個数 p に関する条件である。

(A.1) The number of roots with positive imaginary part of the equation $P(\xi, \lambda) = 0$ in λ is less than or equal to p whenever $\xi \in \mathbb{R}^n$.

ここで $m=0$ の場合は任意の $\{B_j(b), j=1, \dots, p\}$ に対して (A.1) は満たされているとする。次に $\{B_j(b), j=1, \dots, p\}$ のある意味での 1 次独立性に関する条件を述べる。その為には少し準備をする。 $P(\xi, \lambda) = \prod_{j=1}^R P_j(\xi, \lambda)^{k_j}$, $\tilde{P}(\xi, \lambda) = \prod_{j=1}^R P_j(\xi, \lambda)$ とおく。ここで $P_j(\xi, \lambda)$ は irreducible polynomial である。 Ω は $\mathbb{R}^n - \{\xi \in \mathbb{R}^n; Q(\xi) \cdot a_m(\xi) = 0\}$ の connected component を表わすとする。但し $Q(\xi)$ は $\tilde{P}(\xi, \lambda)$ と $\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \lambda}(\xi, \lambda)$ の総結式とする。 Ω の中の十分小なる任意の open set を U と表わすことにする。 $\xi \in U$ のとき $P(\xi, \lambda) = 0$ の λ についての根を $\lambda_j(\xi)$, $j=1, \dots, m$ と表わせば、 $\lambda_j(\xi)$ は real analytic func in U である。 二つして

その imaginary part を $\text{Im } \lambda_j(\xi)$ で表ゆせば、これ等も又 real analytic fun in Γ である。こうして $\text{Im } \lambda_j(\xi) \neq 0$ in Γ , $j=1, \dots, \mu$. $\text{Im } \lambda_j(\xi) \equiv 0$ in Γ $j=\mu+1, \dots, m$ とし一般性を失なわない。但し $\mu=0$ のときはすべての j について $\text{Im } \lambda_j(\xi) \equiv 0$ in Γ と解釈する。今 $A_{\Gamma, \text{Im}} = \{ \xi \in \Gamma; \text{Im } \lambda_t(\xi) = 0 \text{ for some } t \in \{1, \dots, \mu\} \}$ とおくと $A_{\Gamma, \text{Im}}$ は空又は real analytic set である。 $\Gamma - A_{\Gamma, \text{Im}}$ の各 connected component を W_{Γ} で表ゆすことにする。 $\xi \in W_{\Gamma}$ のとき, $P(\xi, \lambda) = 0$ の λ についての根は次の通りに分類される。
 $\lambda_j^0(\xi)$, $j=1, \dots, a$, $\text{Im } \lambda_j^0(\xi) \equiv 0$ in W_{Γ} ,
 $\lambda_j^+(\xi)$, $j=1, \dots, b$, $\text{Im } \lambda_j^+(\xi) > 0$ in W_{Γ} , $\lambda_j^-(\xi)$, $j=1, \dots, c$, $\text{Im } \lambda_j^-(\xi) < 0$ in W_{Γ} . 更にこれらは全て実解析関数であり constant multiplicity をもつ。こうして $\xi \in W_{\Gamma}$ のとき,

$$P(\xi, \lambda) = a_m(\xi) \prod_{j=1}^a (\lambda - \lambda_j^0(\xi))^{\alpha_j} \cdot \prod_{j=1}^b (\lambda - \lambda_j^+(\xi))^{\beta_j} \cdot \prod_{j=1}^c (\lambda - \lambda_j^-(\xi))^{\gamma_j}$$
と書ける。ここで $P^0(\xi, \lambda) = \prod_{j=1}^a (\lambda - \lambda_j^0(\xi))^{\alpha_j}$, $P^+(\xi, \lambda) = \prod_{j=1}^b (\lambda - \lambda_j^+(\xi))^{\beta_j}$, $P^-(\xi, \lambda) = \prod_{j=1}^c (\lambda - \lambda_j^-(\xi))^{\gamma_j}$, $\hat{a} = \sum_{j=1}^a \alpha_j$, $\hat{b} = \sum_{j=1}^b \beta_j$, $\hat{c} = \sum_{j=1}^c \gamma_j$ とおく。(A-1) の条件から $\hat{b} \leq p$ である。 $L_{W_{\Gamma}}^+ \sigma(\xi) = \det ((2\pi i)^{-1} \oint B_{\sigma_j}(\xi, \lambda) \lambda^{p-1} (P^+(\xi, \lambda))^{-1} d\lambda)_{j,k=1, \dots, \hat{b}}$ とおく。ここで $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{\hat{b}})$ を $\{1, \dots, p\}$ の $\hat{b}$ 個の元からなる subset とした。以下の準備の下で $\hat{b} > 0$ なる Γ について次の条件を課する。

(A.2) 任意の $\delta > 0$ なる Γ に対して, ある $\sigma \in \{1, \dots, p\}$ が存在して, $L_{W\Gamma}^+(\xi)$ は $W\Gamma$ で恒等的には 0 にならない。

$m = 0$ のときは, (A.2) は自動的に満たされているとする。
このとき次の結果を得る。

Main Theorem (1) $\{P(b), B_j(b), j=1, \dots, p\}$ を (A.1), (A.2) を満たす定数係数偏微分作用素の系とする。

$\Rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ の open cone Γ と自然数 N での性質をみたすものが $\{P(b), B_j(b), j=1, \dots, p\}$ に依りて決まる。

//

$u(x, y) \in L_{loc}^2(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}) \cap C^\infty([0, \sigma); \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x^n))$ ($\sigma > 0$) が (2.1), (2.2) の解とする。もし $u(x, y)$ が

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-N} \int_{T_R} |u(x, y)|^2 dx dy = 0$$

を満たせば, $u \equiv 0$ である。”

ここで $T_R = \{(x, y) \in \Gamma; y \geq 0, R < |(x, y)| < 2R\}$ 。

(2) (A.1), (A.2) の仮定の少なくとも1方を満たさない系 $\{P(b), B_j(b), j=1, \dots, p\}$ については, $\mathcal{D}'(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$ の non-trivial な元で (2.1), (2.2) の解が存在する。□

Remark N はおおまかに言って $P(\xi)$ の real characteristic の codimension, Lopatinski determinant の zero pt の codimension から決まる. また Γ は $\{\xi \in \mathbb{R}^n; P(\xi) = 0\}$ 又は Lopatinski determinant の zero 点に含まれる任意の多様体の各 normal plane と交わる様な $\mathbb{R}^{n+1}$ の open cone である. 特に $N=1$, $\Gamma = \mathbb{R}^{n+1}$ にとれば (1) は任意の (A.1), (A.2) を満たす system についてなりたつ. また N, Γ のとり方は (1) の場合 ある意味で最小にできることも知られている. 詳しくは Y. Shibata [10] を参照.

§ 3. Main Theorem の証明の概容. $u \in C^\infty([0, \infty), \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x^n)) \cap L^2_{loc}(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$ を (2.1), (2.2) を満たし, 更に u の x に関する partial Fourier transform $\hat{u}(\xi, y)$ についてある $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ fun $\varphi(\xi)$ について $\varphi(\xi)\hat{u}(\xi, y)$ の台が $M \times \overline{\mathbb{R}_+}$ に含まれる場合をまず考える. ここで M は $\xi'' = \mu(\xi')$, $\xi' \in \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^{n-r}$ で定義される実解析的多様体であり, $\mu(\xi')$ は $\tilde{\Omega}$ で定義された実解析関数とする. 但し $r=n$ の場合は, M は $\mathbb{R}_x^n$ の open set と解釈する. ここで $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-r})$, $\xi'' = (\xi_{n-r+1}, \dots, \xi_n)$ とする.

Lemma 3.1. $f(\xi, y) \in C^\infty([0, \infty); \mathcal{D}'(\mathbb{R}_\xi^n))$ とする. もし f の support が $\xi'' = 0$ の plane に含まれていれば.

$$f(\xi, y) = \sum_{|\alpha| \leq q} f_\alpha(\xi', y) \otimes D_{\xi''}^\alpha \delta$$

なる形をもつ。ここで $f_\alpha(\xi', y) \in C^\infty([0, \infty); \mathcal{D}'(\mathbb{R}_{\xi'}^{n-r}))$

δ は $\mathbb{R}_{\xi''}^r$ の原点での Dirac measure であり $\alpha = (\alpha_{n-r+1}, \dots, \alpha_n)$

$D_{\xi''}^\alpha = i^{-|\alpha|} (\partial/\partial \xi_{n-r+1}, \dots, \partial/\partial \xi_n)$ である。

この lemma 3.1 により $\phi(\xi) \hat{u}(\xi, y) = \sum_{|\alpha| \leq S} v_\alpha(\xi', y) \otimes D_{\xi''}^\alpha \delta$ と

表わされる。そこで $\alpha \in |\alpha| = S$ に $\forall \alpha$ して $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{\xi''}^r)$

function で $(D^\alpha \chi)(0) = 1$, $(D^\beta \psi)(0) = 0$, $\alpha \neq \beta$, $|\beta| \leq S$ とすれば

$$(3.1) \quad \langle L(\xi', \mu(\xi'), D_y) v_\alpha(\xi', y), \chi(\xi') f(y) \rangle$$

$$= \langle L(\xi, D_y) \phi(\xi) \hat{u}(\xi, y), \chi(\xi') \psi(\xi'' - \mu(\xi')) f(y) \rangle = 0$$

$$(3.2) \quad \langle B_j(\xi', \mu(\xi'), D_y) v_\alpha(\xi', y)|_{y=0}, \chi(\xi') \rangle$$

$$= \langle B_j(\xi, D_y) \phi(\xi) \hat{u}(\xi, y)|_{y=0}, \chi(\xi') \psi(\xi' - \mu(\xi')) \rangle = 0$$

を任意の $\chi(\xi') \in C_0^\infty(\hat{\Omega})$, $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^1)$ について得る。従って

で $L(\xi', \mu(\xi'), D_y) = a_0(\xi', \mu(\xi'))$ と なる場合に

は Hörmander [3] の結果から次のことを得る。

Proposition 3.2. $u \in C^\infty([0, \infty); \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)) \cap L_{loc}^2(\mathbb{R}_+^{n+1})$

を (2.1), (2.2) の解とする。ある $\phi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ について supp

$\phi(\xi) \hat{u}(\xi, y) \subset \{ \xi \in \mathbb{R}^n; a_j(\xi) = 0, j = 1, \dots, m \} \times \mathbb{R}_+^1$ と仮定する

N_1 を $\{ \xi \in \mathbb{R}^n; a_j(\xi) = 0, j = 0, 1, 2, \dots, m \} \times \mathbb{R}_+^1$ の $\mathbb{R}^{n+1}$ での

codimension. $T_1 \in \mathbb{R}^{n+1}$ の open cone で $\{\xi \in \mathbb{R}^n; a_j(\xi) = 0, j = 0, \dots, m\} \times \mathbb{R}^1$ に含まれる任意の real analytic manifold の normal と交わるものとする。もし u が

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-N_1} \int_{T_{1,R}} |u(x, y)|^2 dx dy = 0$$

を満たせば, $\phi(\xi) \hat{u}(\xi, y) \equiv 0$ である。ここで $T_{1,R} = \{(x, y) \in T_1; y \geq 0, R < |(x, y)| < 2R\}$ とおいた。

次に $P(\xi', \mu(\xi'), dy) = a_e(\xi', \mu(\xi')) dy^e + \dots + a_0(\xi', \mu(\xi'))$ $1 \leq e \leq m$ かつ $a_e(\xi', \mu(\xi')) \neq 0$ when $\xi' \in \hat{\Omega}$ の場合を考える。次の lemma を必要とする。(see S. Wakabayashi [13])

Lemma 3.3. $P(\xi, \lambda) = \lambda^d + a_1(\xi) \lambda^{d-1} + \dots + a_d(\xi)$ とする。ここで $a_k(\xi)$ は connected open set $V \subset \mathbb{R}^n$ で定義された real analytic function とする。このとき real analytic function $D(\xi) (\neq 0)$ in V で次の性質を満たすものが存在する。

" $P(\xi, \lambda) = 0$ の λ についての根は ξ が $V - \{\xi \in V; D(\xi) = 0\}$ の各 connected component に属するとき, constant multiplicities をもち, かつ real analytic function である。" $\square$

こうして, この lemma 3.3 から §2 の条件 (A.2) を述べる
 前に行, たのと同様の議論である $\hat{\Omega}$ の real analytic set $A\hat{\Omega}$
 があり, $\hat{\Omega} - A\hat{\Omega}$ の各 connected component ω に対して
 $\xi' \in \omega$ のとき $P(\xi', \mu(\xi'), \lambda) = 0$ の λ についての根は次の
 3 通りに分類される constant multiplicities をもつ real analytic
 functions in ω となる。 $\lambda_j^0(\xi')$, $j=1, \dots, a$, $\text{Im } \lambda_j^0(\xi')$
 $\equiv 0$, $\lambda_j^+(\xi')$, $j=1, \dots, b$, $\text{Im } \lambda_j^+(\xi') > 0$, $\lambda_j^-(\xi')$, $j=1, \dots, c$
 $\text{Im } \lambda_j^-(\xi') < 0$, $P(\xi', \mu(\xi'), \lambda) = a_e(\xi', \mu(\xi')) \prod_{j=1}^a (\lambda - \lambda_j^0(\xi')) \cdot$
 $\prod_{j=1}^b (\lambda - \lambda_j^+(\xi'))^{\beta_j} \prod_{j=1}^c (\lambda - \lambda_j^-(\xi'))^{\gamma_j}$, $\xi' \in \omega$. 但し,
 $\sum_{j=1}^a \alpha_j + \sum_{j=1}^b \beta_j + \sum_{j=1}^c \gamma_j = e$. $P^0(\xi', D_y) = \prod_{j=1}^a (D_y - \lambda_j^0(\xi'))^{\alpha_j}$
 $P^+(\xi', D_y) = \prod_{j=1}^b (D_y - \lambda_j^+(\xi'))^{\beta_j}$, $P^-(\xi', D_y) = a_e(\xi', \mu(\xi')) \prod_{j=1}^c (D_y - \lambda_j^-(\xi'))^{\gamma_j}$
 $\xi' \in \omega$ とおく。 $P^-(\xi', D_y)$ については次の lemma を得る。

Lemma 3.4. 記号は今まで述べたままとする。 $|d| = s$ とし

$$\langle P^0(\xi', D_y) P^+(\xi', D_y) v_\alpha(\xi', y), w(\xi', y) \rangle = 0$$

for $\forall w(\xi', y) \in \mathcal{D}_0(\omega \times \overline{\mathbb{R}_+^1})$. ここで以下 $\mathcal{D}_0(\omega \times \overline{\mathbb{R}_+^1})$
 $= \{ \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}) ; \text{supp } \varphi \subset \omega \times \overline{\mathbb{R}_+^1} \}$ とする。

こうして荒く言, て $P^0(\xi', D_y) P^+(\xi', D_y) v_\alpha(\xi', y) = 0$, $y > 0$
 $B_j(\xi', \mu(\xi'), D_y) v_\alpha(\xi', y)|_{y=0} = 0$, $j=1, \dots, p$ と $\xi' \in \omega$ のときもた
 す。このとき $D_y^j v_\alpha(\xi', y)|_{y=0} = 0$, $j=0, \dots, e-\alpha-1$ となる。

りたては", $v_\alpha(\xi', y) \equiv 0$ $\xi' \in \omega$ であることは常微分方程式の解の一意的から推察されよう。次の lemma はそのことを裏付けるものである。

Lemma 3.5. 記号は今までと同じとする。 $v_\alpha(\xi', y)$ が

$$(3.3) \quad \begin{aligned} & \langle L^0(\xi', D_y) L^+(\xi', D_y) v_\alpha(\xi', y), w(\xi', y) \rangle \\ &= \langle v_\alpha(\xi', y), L^0(\xi', -D_y) L^+(\xi', -D_y) w(\xi', y) \rangle \end{aligned}$$

for any $w \in \mathcal{D}_0(\Gamma \times \overline{\mathbb{R}_+^1})$ を満たせば",

$$\langle v_\alpha(\xi', y), X(\xi') \rho(y) \rangle = 0$$

for any $X(\xi) \in C_0^\infty(\Gamma)$ and $\rho \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^1})$ である。

ここで Γ は ω の任意の open subset である。

Lemma 3.6. 記号は今までと同じとする。 $M_j = \{(\xi', \mu(\xi'), \lambda_j^0(\xi')) \mid \xi' \in \omega\}$, δ_j , $j=1, \dots, a$ は non-negative integer で

$\delta_j \leq \alpha_j$ なるものとする。 $\theta_j = (\theta_1^j, \dots, \theta_n^j, \theta_{n+1}^j) \in \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ は

M_j の $(\xi_0', \mu(\xi_0'), \lambda_j^0(\xi_0'))$ での normal とする。また $\varepsilon > 0$ とする。もし $u \in L_{loc}^2(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$ が (2.1) を満たし更に,

$$(3.4) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R^{-(2(\alpha_j - \delta_j) + r + 1)} \int_{|x, y|/R - \theta_j| \leq \varepsilon, y \geq 0} |u(x, y)|^2 dx dy = 0$$

for $\delta_j \geq 1$ を満たせば", ξ_0 の十分小さな open n.b.d

$\tilde{\omega} \subset \omega$ があって

$$\left\langle \sum_{i=0}^d \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(i-1-k)!}{(i-1-k-v)!} b_i(\xi') \lambda_j^0(\xi')^{i-1-k-v} D_y^k Q(\xi', p_y) u_d(\xi', y) \Big|_{y=0}, \chi(\xi') \right\rangle = 0$$

for any $\chi(\xi') \in C_0^\infty(\tilde{\omega})$ and $0 \leq v \leq \delta_j - 1$ を満たす。
 ここで $i-1-k-v < 0$ のときは $\lambda_j^0(\xi')^{i-1-k-v} \equiv 0$ と解釈する。
 また $d = \sum_{j=1}^a \delta_j$, $\prod_{j=1}^a (\lambda - \lambda_j^0(\xi'))^{\delta_j} = \sum_{j=0}^d b_j(\xi') \lambda^j$,
 $b_d(\xi') = 1$, $Q(\xi', \lambda) = \prod_{j=1}^a (\lambda - \lambda_j^0(\xi'))^{\delta_j - \beta_j} p^+(\xi', \lambda)$, $\xi' \in \omega$
 とおいた。

次の一般化した Green's formula が必要である。

Lemma 3.7. (Green formula) $\Gamma \subset \mathbb{R}^k$ の open set. 3
 1. $\Gamma' \subset \subset \Gamma$ とする。 $\lambda_j(\xi)$, $j=1, \dots, a \in C^\infty$ functions
 in Γ で " $\lambda_j(\xi) \neq \lambda_{j'}(\xi)$, if $j \neq j'$ " when $\xi \in \Gamma$ "
 なるものとし α_j , $j=1, \dots, a$ を自然数とする。 $p(\xi, \lambda) =$
 $\prod_{j=1}^a (\lambda - \lambda_j(\xi))^{\alpha_j} = \sum_{j=0}^m p_j(\xi) \lambda^j$, $\xi \in \Gamma$ とおく。 β_j , $j=1,$
 $\dots, a$ を non-negative integers で $\beta_j \leq \alpha_j$, $j=1, \dots, a$ とす
 る。 $Q(\xi, \lambda) = \prod_{j=1}^a (\lambda - \lambda_j(\xi))^{\alpha_j - \beta_j}$, $m' = \sum_{j=1}^a \alpha_j - \beta_j$,
 $\prod_{j=1}^a (\lambda - \lambda_j(\xi))^{\beta_j} = \sum_{j=0}^{m-m'} q_j(\xi) \lambda^j$ とおく。 $B_j(\xi, \lambda)$, $j=$
 $1, \dots, m'$ を λ について order r_j の多項式としその係数が
 Γ で定義された C^∞ function とする。 4

$$\det((2\pi i)^{-1} \oint B_j(\xi, \lambda) \lambda^{k-1} (Q(\xi, \lambda))^{-1} d\lambda)_j, k=1, \dots, m' \neq 0 \text{ in } \Gamma$$

て"あれば", 次の関係式を成り立たせる. 係数が Ω で定義された C^∞ function である ordinary differential operators $C_j(\xi, D_y)$, $j=0, \dots, t-m$, $E_j(\xi, D_y)$, $j=1, \dots, m'$, $F_{v,j}(\xi, D_y)$, $v=0, \dots, \beta_j-1$, $j=1, \dots, a$ が存在する。

$$\begin{aligned} & \langle P(\xi, D_y)u(\xi, y), v(\xi, y) \rangle = \langle u(\xi, y), P(\xi, -D_y)v(\xi, y) \rangle \\ & = \sum_{j=0}^{t-m} \langle D_y^j P(\xi, D_y)u(\xi, y)|_{y=0}, C_j(\xi, D_y)v(\xi, y)|_{y=0} \rangle \\ & + \sum_{j=1}^{m'} \langle B_j(\xi, D_y)u(\xi, y)|_{y=0}, E_j(\xi, D_y)v(\xi, y)|_{y=0} \rangle \\ & + \sum_{j=1}^a \sum_{v=0}^{\beta_j-1} \left\langle \sum_{i=0}^{m-m'} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(i-1-k)!}{(i-1-k-v)!} g_i(\xi) \lambda_j(\xi)^{i-1-k-v} D_y^k Q(\xi, D_y)u(\xi, y)|_{y=0}, \right. \\ & \quad \left. F_{v,j}(\xi, D_y)v(\xi, y)|_{y=0} \right\rangle, \end{aligned}$$

for $\forall u(\xi, y) \in C^\infty([0, \infty); \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k))$ and $\forall v(\xi, y) \in \mathcal{S}_0(\Omega' \times \mathbb{R}_+^l)$, but $t = \max \{r_j; 1 \leq j \leq m'\}$.

Lemma 3.8. $\lambda \in \mathbb{C}^1$; $k(\lambda) = \lambda^\mu + a_{\mu-1}\lambda^{\mu-1} + \dots + a_0$
 $g_v(\lambda)$, $v=1, \dots, \mu$ are constant coefficients of polynomials とする。 $\det(\frac{1}{2\pi i})^{-1} \oint g_v(\lambda) \lambda^{\sigma-1} (k(\lambda))^{-1} d\lambda$, $v, \sigma=1, \dots, \mu$
 $\neq 0$ を仮定する。 $g_v(\lambda) = Q_v(\lambda)k(\lambda) + g'_v(\lambda)$, $v=1, \dots, \mu$,
 $\deg g'_v(\lambda) \leq \mu-1$ とおけば, $\{ \lambda^{\nu-1} k(\lambda), v=1, \dots, \mu \}$
 $\{ g'_v(\lambda) \ v=1, \dots, \mu \}$ は order σ $\mu+\mu$ 以下の多項式環の基底となる。

以上の4つの lemma を用いて以下の propositions が証明される。

Case 1. ω において $\alpha = 0$ and $\beta > 0$ の場合.

$\beta \leq p$ が仮定から従うから $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_\beta) \in \{1, \dots, p\}$ に対して $L_\sigma(\xi') = \det (k\pi i)^{-1} \oint B_{\sigma_j}(\xi', \lambda) \lambda^{k-1} (P^+(\xi', \lambda))^{-1} d\lambda$ $j=1, \dots, \beta$, $\xi' \in \omega$, $A_\sigma = \{\xi' \in \omega; L_\sigma(\xi') = 0\}$ とおく。

$B = \bigcap_\sigma A_\sigma$ とおく。 $r=0$ のときは B は空集合又は, real analytic set であることが条件 (A2) から従う。また, $1 \leq r \leq n$ の場合には, B は空集合であるか, real analytic set であるか, $B = \omega$ であるかの1つが成り立つ。 $1 \leq r \leq n$, $B = \omega$ のときは Hörmander [3] の結果から次のことを得る。

Proposition 3.9. 記号は今迄のものとする。 Case 1 の条件が ω で成り立ち, $1 \leq r \leq n$, $B = \omega$ を仮定する。 $T_R^{(III)} = \{(x, y) \in T^{(III)}; y \geq 0, R < |(x, y)| < 2R\}$ とおく。 ここで $T^{(III)}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の open cone で $(n(\xi'), 0)$ をすべて $\xi' \in \omega$ に対して含む。 ここで $n(\xi')$ は $\{(\xi', \mu(\xi')) ; \xi' \in \omega\}$ の $(\xi', \mu(\xi'))$ での normal を表わす。 もし u が $L^2_{loc}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}})$ であり

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-n} \int_{T_R^{(\text{II})}} |u(x, y)|^2 dx dy = 0$$

$$\Rightarrow v_\alpha \equiv 0$$

Proposition 3.10 記号は今まで通りとする。ここで case 1 の条件が満たされているとする。

$$(1) \quad B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad v_\alpha \equiv 0$$

(2) B が ω の real analytic set とする。 $u \in L^2_{loc}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}})$ であり

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-(n+r)} \int_{T_R^{(\text{II})}} |u(x, y)|^2 dx dy = 0$$

を満たす。 $\Rightarrow v_\alpha \equiv 0$ 。

ここで $T^{(\text{II})}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の open cone であり、その n 次元の real analytic manifold $C \subset B$ と $\xi' \in C$ に対して $(n(\xi'), 0)$ を含む。ここで $n(\xi')$ は $\{(\xi', \mu(\xi')) ; \xi' \in C\}$ の $(\xi', \mu(\xi'))$ でのある normal を示した。また $T_R^{(\text{II})} = \{(x, y) \in T^{(\text{II})}; y > 0, R < |(x, y)| < 2R\}$ 。また N_r は B の $\mathbb{R}_{\xi'}^{n-r}$ での codimension である。

次に $\alpha > 0$ 即ち real な変数が出てくる場合を考える。

$$L^{(p, \delta, \alpha)}(\xi') = \det(2\pi i)^{-1} \oint_{B_{\sigma_j}(\xi', \lambda)} \lambda^{R-1} \times R$$

$G \times \left(\left(\prod_{j=1}^a (\lambda - \lambda_j^0(\xi)) \right)^{\alpha_j - \delta_j} \lambda^{b+1}(\xi, \lambda) \right)^{-1} d\lambda, \xi' \in \omega$
 とおく。ここで $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_a) (0 \leq \delta_j \leq \alpha_j)$, $b+1 \leq p' \leq p$.
 また $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{p'}) (c \in 1, \dots, p')$ とする。

Case 2. ω において $\alpha > 0$ でありさらに次の性質を満たすある p', δ, σ について $L^{(p', \delta, \sigma)}(\xi')$ は ω で恒等的に 0 にならないとする。

(I) $b+1 \leq p' \leq p$

(II) $\sum_{j=1}^a (\alpha_j - \delta_j) + b = p'$

(III) もし $p' < p$ であれば, 任意の $p'' (p'+1 \leq p'' \leq p)$
 $\sigma' = (\sigma'_1, \dots, \sigma'_{p''}) (c \in 1, \dots, p'')$, $\delta' = (\delta'_1, \dots, \delta'_a) (0 \leq \delta'_j \leq \alpha_j, j=1, \dots, a, \sum_{j=1}^a (\alpha_j - \delta'_j) + b = p'')$ について $L^{(p'', \delta', \sigma')}(\xi')$ は恒等的に ω で 0 である。

$B = \{\xi' \in L^{(p', \delta, \sigma)}(\xi') = 0\}$ とおく。 B は空集合又は ω の real analytic set である。

Proposition 3.11. 今までの記号を用いる。 $\sum_{j=1}^a \alpha_j + b = p'$

として, (Case 2 の仮定が ω でなりたっているとする。

$\Rightarrow \text{supp } v_a(\xi', y) \subset B \times \overline{\mathbb{R}_+^1}$.

Proposition 3.12. 今までの記号を用いる。 ω において Case 2

の仮定がある $\delta_j > 0$ について成り立つとする。 それら δ_j

> 0 , $j=1, \dots, k$ とする。 $T_{j,R} = \{(x, y) \in T_j; y \geq 0, R < |(x, y)| < 2R\}$ として T_j は $\forall \tau$ の $\xi' \in \omega - B$ に対して $M_j = \{(\xi', \mu(\xi'), \lambda_j^0(\xi')) ; \xi' \in \omega - B\}$ の $(\xi', \mu(\xi'), \lambda_j^0(\xi'))$ のある normal を含む open connected cone とする。 $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ が

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-\{2(\alpha_j - \beta_j) + n + 1\}} \int_{T_{j,R}} |u(x, y)|^2 dx dy = 0, \quad j=1, \dots, k$$

$$\Rightarrow \text{supp } v_\alpha(\xi', y) \subset B \times \overline{\mathbb{R}^n_+}$$

Case 3. ω において $\hat{\alpha} > 0$, $\hat{\beta} = 0$ であり, さらに任意の p', δ, σ について $L^{(p', \delta, \sigma)}(\xi')$ が 恒等的に ω で 0 になる。

Proposition 3.12. 記号は今までのものを用いる。 u が

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-(n+1)} \int_{\Gamma_{j,R}} |u(x, y)|^2 dx dy = 0, \quad j=1, \dots, a$$

$$\Rightarrow v_\alpha(\xi', y) \equiv 0$$

但し $T_{j,R}$ は Prop 3.12 と同じ。

Case 4. ω において $\hat{\alpha} > 0$, $\hat{\beta} > 0$. 更に, 任意の p', δ, σ について $L^{(p', \delta, \sigma)}(\xi')$ が ω で恒等的に 0 である。 $B \in$ Case 1 と同じものにする。

Proposition 3.14. 記号を今までと同じとする。ω の case 4 の仮定が満たされるに $1 \leq r \leq n$, $B = \omega$ とする。 $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ が

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-n} \int_{T_R^{(III)}} |u(x, y)|^2 dx dy = 0$$

$\Rightarrow \forall \alpha (\xi, y) \equiv 0$, 但し $T_R^{(III)}$ は Prop 3.9 と同じもの。

Proposition 3.15. 今までと記号は同じとする。ω の case 4 の仮定が満たされているとする。

(1) $B = \emptyset$ とする。もし $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ が

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-(n+1)} \int_{T_{j,R}} |u(x, y)|^2 dx dy = 0, \quad j=1, \dots, a,$$

を満足せば, $\Rightarrow \forall \alpha (\xi, y) \equiv 0$.

(2) B は real analytic set とする。もし $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ が

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-(n+1)} \int_{T_{j,R}} |u(x, y)|^2 dx dy = 0, \quad j=1, \dots, a$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-(N+n)} \int_{T_R^{(II)}} |u(x, y)|^2 dx dy = 0$$

を満足す。 $\Rightarrow \forall \alpha (\xi, y) \equiv 0$. 但し $T_{j,R}, T_R^{(II)}$ は Prop 3.12, Prop 3.10 とそれぞれ同じものとする。

Main Theorem (1) の証明 $m=0$ の場合は Prop 3.2 からすぐ従う。 $m \geq 1$ とする。 u は (2.1), (2.2) の解で $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^{n+1}) \cap C^\infty([0, \infty); \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ ($n > 0$) とする。 section 2 で述べた W_Γ をまず考える。 ここでは section 3 の Case 1~4 のいずれかの仮定が成り立っている。 従ってその後について Propositions を成り立たせることができるだけ N を小さく P を大きくとってあげれば, W_Γ の real analytic set B があって ($B = \emptyset$ も含む) $(W_\Gamma - B) \times \overline{\mathbb{R}^+}$ には $\hat{u}(\xi, y)$ の台がないことがわかる。 こうして $\mathbb{R}^n$ の real analytic set A_1 of codimension ≥ 1 があって $\text{supp } \hat{u}(\xi, y) \subset A_1 \times \overline{\mathbb{R}^+}$ となる。 次に $\phi(\xi) \in C_0^\infty(\{\xi \in \mathbb{R}^n; a_m(\xi) \neq 0\})$ なるものを任意にとりてきて, 更に $\text{supp } \phi(\xi)$ を適当に小さく取れば, $\phi(\xi)\hat{u}(\xi, y)$ の台はある real analytic manifold M について $M \times \overline{\mathbb{R}^+}$ に含まれる。 さらに $M \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n; a_m(\xi) \neq 0\}$ となる。 こうして Case 1~4 のいずれかにより, N, P とその後について続く Propositions を成り立たせる様にとれば, ある real analytic set A_M of codimension ≤ 2 で $A_M \subset M$ なるものがあって, $\text{supp } \phi(\xi)\hat{u}(\xi, y) \subset A_M \times \overline{\mathbb{R}^+}$ がいえる。 以下同様にして $\text{supp } \hat{u}(\xi, y) \subset \{\xi \in A; a_m(\xi) = 0\} \times \overline{\mathbb{R}^+}$ がわかる。 こうして; 次に $\phi(\xi) \in C_0^\infty(\{\xi \in \mathbb{R}^n; a_{m-1}(\xi) \neq 0\})$ ととりてきて, $\phi(\xi)\hat{u}(\xi, y)$ について考えれば, 同様の議論

が成り立つ。以下続けて $\text{supp } \hat{u}(\xi, y) \subset \{\xi \in A; a_m(\xi) = \dots = a_1(\xi) = 0\} \times \overline{\mathbb{R}^+}$ がわかる。従って Proposition 3.2 から $\hat{u}(\xi, y) = 0$ が従う。

Main Theorem (2) の証明. (A.1) が満たされているものとする。即ち, ある $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ で $P(\xi_0, \lambda) = 0$ の λ についての根で positive imaginary part をもつものの個数 $> p$ である。

section 2 で述べた W_U のすべての union は $\mathbb{R}^n$ で dense であるから, 任意の open set $V \ni \xi_0$ はある W_U と交わる。こうして, ある W_U で $b > p$ である。 $A(\xi) =$

$(f_{j,k}(\xi))_{j=1 \dots p, k=1 \dots b}$ とおく。ここで $f_{j,k}(\xi) = (2\pi i)^{-1} \oint B_j(\xi, \lambda) \lambda^{k-1} (P^+(\xi, \lambda))^{-1} d\lambda$ とおいた。 $b > p$ であるから, $A(\xi)$ の rank は W_U で r ($0 \leq r \leq p$) である。

$r \neq 0$ のときは, 一般性を失うことなく, $\Delta(\xi) = \det(f_{j,k}(\xi))_{j,k=1 \dots r}$ が W_U で恒等的には 0 にならないとしてよい。

$q(\xi, y) = [-\sum_{j,k=1}^r \Delta_{j,k}(\xi) f_{j,k}(\xi)] (2\pi i)^{-1} \oint e^{-y\lambda} \lambda^{k-1} (P^+(\xi, \lambda))^{-1} d\lambda + \Delta(\xi) (2\pi i)^{-1} \oint e^{iy\lambda} \lambda^r (P^+(\xi, \lambda))^{-1} d\lambda] \phi(\xi)$ とおく。但し,

$\Delta_{j,k}(\xi)$ は $(f_{j,k}(\xi))_{j,k=1 \dots r}$ の (j,k) cofactor であり, $\phi(\xi) \in C_0^\infty(\{\xi \in W_U; \Delta(\xi) \neq 0\})$ 。また $r=0$ のときは,

$q(\xi, y) = (2\pi i)^{-1} \oint e^{iy\lambda} (P^+(\xi, \lambda))^{-1} d\lambda \cdot \phi(\xi)$, $\phi(\xi) \in C_0^\infty(W_U)$ とおく。 $q(\xi, y) \neq 0$ である。 $u(x, y) =$

$(2\pi)^{-n} \int G(\xi, y) \exp(i\xi \cdot x) d\xi$ とおけば, $u(x, y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ であり, さらに (2.1), (2.2) をみたす. (A.2) を満たさない場合も同様である。

References

- [1] S. Agmon, Lower bounds for solutions of Schrödinger type equations in unbounded domains, Proc. Inter. Conf. on Functional Analysis and Related Topics, Tokyo, 1969, 216-224.
- [2] ———, Spectral properties of Schrödinger operators, Actes Congr. Int. Math., Vol. 2, (1970) 679-683.
- [3] L. Hörmander, Lower bounds at infinity for solutions of differential equations with constant coefficients, Israel J. Math. 16 (1973), 103-116.
- [4] R. Konno, Non-existence of positive eigenvalues of Schrödinger operators in infinite domains, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec IA, 19 (1972), 393-402.
- [5] W. Littman, Decay at infinity of solutions to partial differential equations; removal of the curvature assumption, Israel J. Math. 8 (1970), 403-407.
- [6] ———, Maximal rate of decay of solutions of partial differential equations, Arch. Rational. Mech. Anal. 37 (1970), 11-20.
- [7] M. Murata, A theorem of Liouville type for partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec IA, 21 (1974), 395-404.
- [8] ———, Asymptotic behaviors at infinity of solutions of certain linear partial differential equations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec IA, 23 (1976), 107-148.
- [9] M. Murata and Y. Shibata, Asymptotic behaviors at infinity of solutions of partial differential equations in the exterior of a proper cone, to appear.
- [10] Y. Shibata, Liouville type theorem for a system $\{ P(D), B_j(D), j = 1, \dots, p \}$ of differential operators with constant coefficients in a half space, to appear.
- [11] F. Rellich, Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$ in unendlichen Gebieten, J. Ber. Dt. Math. Ver. 53 (1943), 57-65.

- [12] F. Trèves, Differential polynomials and decay at infinity, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 184-186.
- [13] S. Wakabayashi, Eigenfunction expansion for symmetric systems of first order in the half-space R_+^n , Publ. RIMS, Kyoto Univ. 11 (1975), 67-147.