

パラメトリック曲面として記述された極小曲面の形態創生手法

COMPUTATIONAL MORPHOGENESIS OF MINIMAL SURFACE
REPRESENTED AS PARAMETRIC SURFACE藤田 慎之輔^{*1}, 寒野 善博^{*2}, 大崎 純^{*3}

Shinnosuke FUJITA, Yoshihiro KANNO and Makoto OHSAKI

It is often that, to obtain a minimal surface, the surface area computed with triangular discretization is minimized by using some optimization methods. With this method, it is difficult to evaluate the error of the solution from the minimal surface, and accuracy of the solution depends on the fineness of triangulation which leads to increasing data size. In this paper, the surface is discretized by parametric surface to avoid such problems. The surface area of a B-spline surface is minimized by nonlinear programming and the error from the true minimal surface is measured by using the square of the mean curvature. The effectiveness of the proposed approach is confirmed through various examples, and the characteristics of the optimal solutions are discussed.

Keywords: *minimal surface, parametric surface, nonlinear programming, mean curvature*

極小曲面, パラメトリック曲面, 非線形計画法, 平均曲率

1 はじめに

空気膜構造やサスペンション膜構造は, 膜材やケーブル材などの曲げに抵抗しない柔部材によって構成され, その力学的な安定性は原型曲面の形状に大きく依存する。しわや弛みを起こすことのない力学的安定性を有する膜構造を設計するためには, 膜構造の設計原型曲面として, 等張力条件を満足する曲面形状である等張力曲面を採用することが一般的である¹⁾。

等張力曲面の創生方法は, 初期応力法²⁾と極小曲面法³⁾の2つの数値手法に大別される。前者の方法は, 面内に等応力が作用すると仮定し, エネルギー原理に基づいて曲面を求める手法であり, 理論的に明快であるが, 初期形状によっては解が収束しないという数値計算上の欠点がある。後者の方法は, 等張力曲面は極小曲面と同一であることを利用して, 適切な付帯条件の下で曲面積が極小となる曲面を求める方法であり, 前者の方法と比べ, 数値計算上の安定性が高いため, これまで多くの研究が行われている⁴⁻⁸⁾。ただし, これらの研究の多くは, 曲面を近似的に三角形要素に細かく分割をして三角形要素の面積の和を目的関数として最小化するものである。このため, 厳密な極小曲面との誤差は三角形分割の方法に大きく依存する。三角形分割を細かくすれば, より精度の高い極小曲面が得られる反面, 計算コストが増加し, 得られた極小曲面は多くの節点

情報の集合となる。

一方で, パラメータ表現による曲面の面積を用いると, 三角形要素に分割することなしに, 節点数よりも少ない数の制御点の情報を用いて, 曲面積を陽に計算できる。そのような表現は, パラメトリック曲面によって形状記述を行う機能が実装されている近年のCAD/CAEソフトウェアとの親和性も高いと考えられる。また, 極小曲面は, 平均曲率が至る所で0である曲面として知られている⁹⁾。平均曲率を計測することで, 解析により得られた極小曲面が, 厳密な極小曲面からどの程度誤差をもっているかを定量的に評価することができる。

パラメータ表現による曲面の面積最小化については, ベジエ曲面を対象とした研究がいくつかあるが^{10,11)}, 曲面を近似的に三角形要素に細かく分割をして三角形要素の面積の和を最小化する方法と比べると少なく, また, 両者の比較も行われていない。そこで本論文では, パラメータ表現による曲面に対し, 三角形分割によらず, 曲面積を目的関数とした最適化問題を解くことで, 陽に関数表現が可能で, かつデータ量の少ない極小曲面を創生することを試みる。得られた結果を三角形分割による方法の結果と比較し, 手法の有効性を確認する。また, 平均曲率を曲面全体で0とする方法によっても曲面を創生し, そのようにして得られた曲面が極小曲面となることを確認する。

^{*1} 東京工業大学科学技術創成研究院未来産業技術研究所 助教・博士(工学)

^{*2} 東京工業大学科学技術創成研究院未来産業技術研究所 准教授・博士(工学)

^{*3} 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 教授・博士(工学)

Assist. Prof., Laboratory for Future Interdisciplinary Research of Science and Technology, Tokyo Institute of Technology, Dr. Eng.

Assoc. Prof., Laboratory for Future Interdisciplinary Research of Science and Technology, Tokyo Institute of Technology, Dr. Eng.

Prof., Dept. of Architecture and Architectural Eng., Kyoto Univ., Dr. Eng.

2 曲面のパラメータ表現

本論文では、曲面の面積をパラメータ表現による曲面関数 (パラメトリック曲面) として陽に記述する。曲面上の位置を定めるパラメータを $u, v \in [0, 1]$ とする。パラメトリック曲面には様々な関数が存在するが、本論文では有理 B スプライン曲面 (Rational Basis Spline Surface: 以下, RBS 曲面) を取り扱う。 $(I+1) \times (J+1)$ の制御ネットを有する RBS 曲面上の 3 次元空間座標 $\mathbf{R}_{I,J}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]^T$ は、 u, v をそれぞれ変数とする基底関数の積として次のように表すことができる。

$$\mathbf{R}_{I,J}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J w_{ij} \mathbf{q}_{ij} N_{ik}(u) N_{jl}(v)}{\sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J w_{ij} N_{ik}(u) N_{jl}(v)} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{q}_{ij} = [q_{x,ij}, q_{y,ij}, q_{z,ij}]^T$ は制御点座標、 w_{ij} は重み、 $N_{ik}(u)$ 、 $N_{jl}(v)$ は、パラメータ u, v 方向の B スプライン基底関数である。 k, l は $N_{ik}(u)$ 、 $N_{jl}(v)$ それぞれの次数である。一般に、重み w_{ij} がすべて等しい RBS 曲面は特に一様有理 B スプライン曲面 (Uniform Rational Basis Spline Surface: 以下, URBS 曲面)、その他の曲面は非一様有理 B スプライン曲面 (Non-Uniform Rational Basis Spline Surface: 以下, NURBS 曲面) と呼ばれる。また、ノットベクトルを両端で位数分重複させ、 $I = k, J = l$ として区間 $[0, 1]$ を等分割した RBS 曲面は特に有理ベジエ曲面 (Rational Bézier Surface: 以下, RBe 曲面) と呼ばれ、RBe 曲面の基底関数はバーンスタイン基底関数となる¹²⁾。本論文では、URBS, NURBS, URBe, NURBe を総称して RBS 曲面と呼ぶことにする。なお、URBS 曲面および URBe 曲面は、通常の B スプライン曲面およびベジエ曲面と本質的に同じものである。

3 曲面の第 1 基本量と曲面積

パラメータ u, v で表されるパラメトリック曲面上の点 $\mathbf{R}_{I,J}(u, v)$ の接平面を考える。 u, v を微小に動かしたとき、接平面に埋め込まれた微小な平行四辺形の面積は

$$dS = \left| \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{R}_{I,J}(u, v) du \times \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{R}_{I,J}(u, v) dv \right| \quad (2)$$

で与えられる。ここで、

$$E = \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{R}_{I,J}(u, v) \cdot \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{R}_{I,J}(u, v) \quad (3a)$$

$$F = \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{R}_{I,J}(u, v) \cdot \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{R}_{I,J}(u, v) \quad (3b)$$

$$G = \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{R}_{I,J}(u, v) \cdot \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{R}_{I,J}(u, v) \quad (3c)$$

とおけば、式 (2) は次のように変形できる。

$$dS = \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (4)$$

以上より、パラメトリック曲面全体の面積 S^P は次式で与えられる。

$$S^P = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (5)$$

なお、 E, F, G は曲面の第 1 基本量と呼ばれる。

4 曲面の第 2 基本量と平均曲率

点 $\mathbf{R}_{I,J}(u, v)$ の単位法線ベクトルを $\mathbf{e}$ とする。

$$\mathbf{e} = \left(\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{R}_{I,J}(u, v) \times \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{R}_{I,J}(u, v) \right) \left/ \left| \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{R}_{I,J}(u, v) \times \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{R}_{I,J}(u, v) \right| \right. \quad (6)$$

$\mathbf{e}$ を含む平面 (法平面) で曲面を切断したときにできる曲線の曲率 (法曲率) の最大値と最小値は主曲率と呼ばれ、その平均値を平均曲率と呼ぶ。 $\mathbf{R}_{I,J}(u, v)$ のパラメータに関する 2 次導関数を次式で定義する。

$$\mathbf{h}_{uu} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} \mathbf{R}_{I,J}(u, v), \quad \mathbf{h}_{vv} = \frac{\partial^2}{\partial v^2} \mathbf{R}_{I,J}(u, v), \quad \mathbf{h}_{uv} = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \mathbf{R}_{I,J}(u, v) \quad (7)$$

このとき、

$$L = \mathbf{h}_{uu} \cdot \mathbf{e} \quad (8a)$$

$$M = \mathbf{h}_{uv} \cdot \mathbf{e} \quad (8b)$$

$$N = \mathbf{h}_{vv} \cdot \mathbf{e} \quad (8c)$$

で定義される L, M, N を曲面の第 2 基本量と呼び、平均曲率は

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} \quad (9)$$

で計算することができる。

5 極小曲面の創生方法

本論文では、曲面の境界形状を固定とした条件の下で極小曲面の創生を行う。創生方法としては、

1. 三角形分割された曲面の三角形要素の面積の和の最小化
2. RBS 曲面の曲面積最小化
3. RBS 曲面の平均曲率の 2 乗の曲面全体での積分値の最小化

の 3 つを適用し、それぞれの手法の比較検証を行う。いずれの手法も、鉛直方向座標に関して形状最適化を行うものとする。また、重み w_{ij} を設計変数に追加した場合についての検討も行う。ただし、初期形状における RBS 曲面の重み w_{ij} はすべて 1.0 する。また、最小化問題の解法としては、重み w_{ij} を設計変数としない最適化に対しては、無制約単一目的最適化問題の解法である準ニュートン法を採用し、重み w_{ij} を設計変数に加える最適化に対しては、 w_{ij} のとりうる値に上下限値を設けるために、制約付き単一目的最適化問題の解法である逐次二次計画法を採用する。いずれも SciPy¹³⁾ の最適化ライブラリを用い、ソルバとして準ニュートン法は L-BFGS-B、逐次二次計画法は SLSQP を指定し、パラメータはデフォルト値¹⁴⁾ を用いる。

5.1 三角形分割された曲面の三角形要素の面積の和の最小化

与えられた曲面を三角形要素に分割する。要素数を m 、各要素の面積を s_e ($e = 1, \dots, m$)、境界部分を除いた節点の z 座標を並べたベクトルを $\mathbf{r}_z^*$ とする。このとき、次の最適化問題を解くことにより近似的な極小曲面を得ることができる。

$$\underset{\mathbf{r}_z^*}{\text{minimize}} \quad S^A(\mathbf{r}_z^*) = \sum_{e=1}^m s_e \quad (10)$$

5.2 RBS 曲面の曲面積最小化

与えられた曲面を RBS 曲面で離散化する。境界部分を除いた制御点の z 座標を並べたベクトルを $\mathbf{q}_z^*$ とする。また、境界部分を除いた制御点の重み w_{ij} を並べたベクトルを $\mathbf{w}^*$ とする。RBS 曲面の曲面積は、式 (5) により得られるが、式 (5) の積分を代数的に解くのは困難であるため、数値積分を行う。数値積分の方法としてはガウスの数値積分公式 (以下、ガウス積分) を採用する。ある連続関数 $f(x)$ を $[0, 1]$ 区間で積分する場合、次のようになる。

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i) \quad (11)$$

ここで、 n は積分次数、 ω_i は重み係数である。

式 (5) に、 u, v 方向についてそれぞれ n_a 次、 n_b 次のガウス積分を採用するとき、次の最適化問題を解くことにより近似的な極小曲面を得ることができる。

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \quad S^P(\mathbf{x}) = \sum_{b=1}^{n_b} \sum_{a=1}^{n_a} \omega_a \omega_b \sqrt{E(u_a, v_b) G(u_a, v_b) - F(u_a, v_b)^2} \quad (12)$$

ここで、 $u_a, v_b \in [0, 1]$ は積分点座標である。設計変数 $\mathbf{x}$ は $\mathbf{x} = \mathbf{q}_z^*$ と $\mathbf{x} = (\mathbf{q}_z^*, \mathbf{w}^*)$ の 2 ケースを考える。ただし $\mathbf{w}^*$ の範囲は $0 \leq w_{ij} \leq 10$ に制約する。

5.3 RBS 曲面の平均曲率の 2 乗の曲面全体での積分値の最小化

式 (9) で定義される平均曲率を、曲面全体で 0 にすることを考える。曲面全体に十分多くの平均曲率計測点を設け、各平均曲率の 2 乗和を計算し、その値が 0 に近ければ、曲面全体で平均曲率が 0 に近い値であると判断できる。この考え方は、平均曲率の 2 乗和を曲面全体で積分することで一般化できる。

$$\Sigma_H = \int_0^1 \int_0^1 H^2 du dv \quad (13)$$

式 (13) に、 u, v 方向についてそれぞれ n_a 次、 n_b 次のガウス積分を採用するとき、次の最適化問題を解くことにより近似的な極小曲面を得ることができる。

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{minimize}} \quad \Sigma_H(\mathbf{x}) = \sum_{b=1}^{n_b} \sum_{a=1}^{n_a} \omega_a \omega_b H(u_a, v_b)^2 \quad (14)$$

設計変数 $\mathbf{x}$ は問題 (12) と同様とする。問題 (12), (14) とともに、数値積分の次数は $n_a = n_b = 10$ とする。

5.4 数値積分の誤差の評価

RBS 曲面について、問題 (12) および (14) を解くにあたり、本論文ではガウス積分を採用するが、いずれの問題も被積分関数に平方根を含んでおり多項式関数ではないため、厳密解からの数値誤差が生じる。そこで、RBS 曲面を、 $m = 50000$ という非常に多くの三角形要素に分割し、分割された三角形要素の面積の和 $S_{50000}^A = \sum_{e=1}^m s_e$ を求める。これは、厳密解に極めて近い値となるので、式 (5) による曲面積と比較し、誤差を評価する。

6 解析モデル

6.1 HP 曲面と同一の境界形状を有する曲面

正方形平面を有し、 $(-5, -5, 4), (5, -5, -4), (5, 5, 4), (-5, 5, -4)$ の 4 点を通る直線を境界形状に持ち、その他はランダムな形状を有する Fig. 1 のような曲面を考える (以降、座標単位はすべて [m] とする)。この曲面の境界形状は、 $z = 4xy/25$ で記述される HP 曲面に一致する。

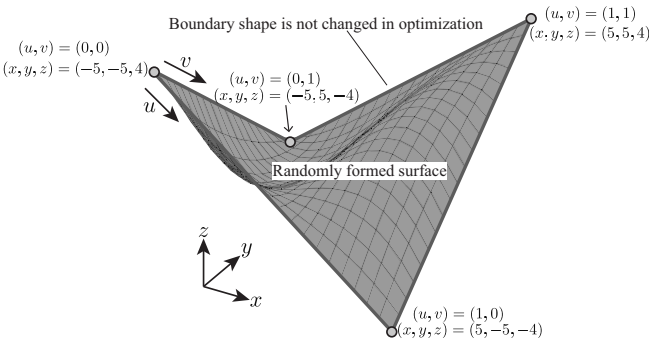


Fig. 1 Model 1

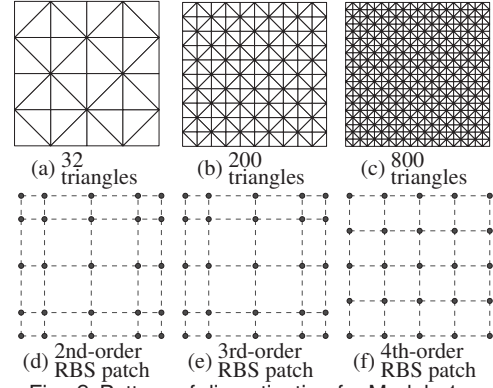


Fig. 2 Pattern of discretization for Models 1 and 2

Fig. 1 の曲面を、RBS 曲面により離散化し、問題 (12) および問題 (14) を解く場合と、3 角形要素分割により離散化し、問題 (10) を解く場合とで計算結果を比較する。離散化のパターンを Fig. 2 に示す。問題 (12) および問題 (14) を解く場合に用いるパラメトリック曲面には、2~4 次の RBS 曲面を採用する。なお、この解析モデルにおける 4 次の RBS 曲面は、 $l = k = 4, J = I = 4$ となるため、ベジエ曲面と同義である。問題 (10) を解く場合の 3 角形要素分割については、32 分割、200 分割、800 分割のそれぞれ粗密の異なる 3 つのモデルを取り扱う。

6.2 ランダムな形状を有する曲面

ランダムな形状を有する次のような曲面を考える。ただし、平面形状は Model 1 と同様とする。

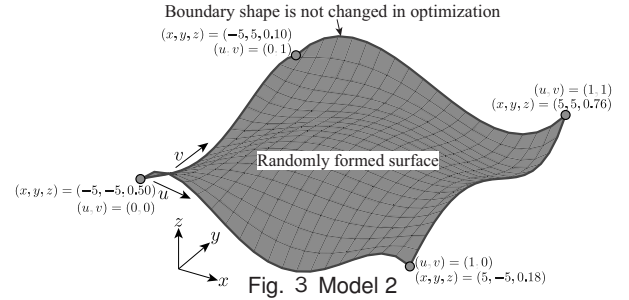


Fig. 3 Model 2

Fig. 3 の曲面を、RBS 曲面により離散化し、問題 (12) および問題 (14) を解く場合と、3 角形要素分割により離散化し、問題 (10) を解く場合について計算結果を比較する。離散化のパターンは Fig. 2 と同様とする。

6.3 スプライン補間

本研究では、初期の曲面を $(I+1) \times (J+1)$ の制御ネットを有する RBS 曲面で補間している (Fig. 2)。制御点座標を並べたベクトル $\mathbf{q}_x \in \mathbb{R}^{(I+1)(J+1)}$, $\mathbf{q}_y \in \mathbb{R}^{(I+1)(J+1)}$, $\mathbf{q}_z \in \mathbb{R}^{(I+1)(J+1)}$ を次式で定義する。

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_x &= (q_{x,00}, \dots, q_{x,0J}, \dots, q_{x,I0}, \dots, q_{x,IJ})^T \\ \mathbf{q}_y &= (q_{y,00}, \dots, q_{y,0J}, \dots, q_{y,I0}, \dots, q_{y,IJ})^T \\ \mathbf{q}_z &= (q_{z,00}, \dots, q_{z,0J}, \dots, q_{z,I0}, \dots, q_{z,IJ})^T \end{aligned} \quad (15)$$

$\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, \mathbf{q}_z$ は次の手順で定めている。

1. 補間したい曲面上で制御点数と同数の点を選び、選んだ点の節点座標を並べたベクトルを $\mathbf{x}^p \in \mathbb{R}^{(I+1)(J+1)}$, $\mathbf{y}^p \in \mathbb{R}^{(I+1)(J+1)}$, $\mathbf{z}^p \in \mathbb{R}^{(I+1)(J+1)}$ とする。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^p &= (x_{00}^p, \dots, x_{0J}^p, \dots, x_{I0}^p, \dots, x_{IJ}^p)^T \\ \mathbf{y}^p &= (y_{00}^p, \dots, y_{0J}^p, \dots, y_{I0}^p, \dots, y_{IJ}^p)^T \\ \mathbf{z}^p &= (z_{00}^p, \dots, z_{0J}^p, \dots, z_{I0}^p, \dots, z_{IJ}^p)^T \end{aligned} \quad (16)$$

2. x^p, y^p, z^p に対応するパラメータ (u_{ij}, v_{ij}) ($i=0, \dots, I$ $j=0, \dots, J$) を定める。
3. 連立方程式

$$x^p = Bq_x, \quad y^p = Bq_y, \quad z^p = Bq_z \quad (17)$$

を解き, x^p, y^p, z^p を通る RBS 曲面を形成する制御点座標 $q_x \in \mathbb{R}^{(I+1)(J+1)}$, $q_y \in \mathbb{R}^{(I+1)(J+1)}$, $q_z \in \mathbb{R}^{(I+1)(J+1)}$ を求める。

ここで, 方程式 (17) は, 式 (1) を x, y, z 成分ごとに独立にマトリクス形式で記述したものであり, $B \in \mathbb{R}^{(I+1)(J+1) \times (I+1)(J+1)}$ の具体的な成分を書き出せば次の通りとなる。

$$B = [\tilde{B}_{00}, \dots, \tilde{B}_{0J}, \dots, \tilde{B}_{I0}, \dots, \tilde{B}_{IJ}]^T \quad (18)$$

$$\tilde{B}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J w_{\alpha\beta} N_{i,k}(u_{\alpha\beta}) N_{j,l}(v_{\alpha\beta})}$$

$$\alpha = 0, \dots, I \quad \beta = 0, \dots, J$$

$$\begin{bmatrix} w_{00} N_{0,k}(u_{\alpha\beta}) N_{0,l}(v_{\alpha\beta}) \\ \vdots \\ w_{0J} N_{0,k}(u_{\alpha\beta}) N_{J,l}(v_{\alpha\beta}) \\ \vdots \\ w_{I0} N_{I,k}(u_{\alpha\beta}) N_{0,l}(v_{\alpha\beta}) \\ \vdots \\ w_{IJ} N_{I,k}(u_{\alpha\beta}) N_{J,l}(v_{\alpha\beta}) \end{bmatrix}$$

Model 1 および Model 2 について, x^p, y^p, z^p に選んだ曲面上の座標と対応するパラメータを Table. 1 に示す。ここで, 方程式 (17) を解いて得られる制御点座標 q_x, q_y, q_z で形成される RBS 曲面は, 次数に関わらず必ず x^p, y^p, z^p を通る曲面となるが, Model 1 および Model 2 の曲面と完全には一致しないことに注意する。

Table 1 Reference point coordinates for spline interpolation

Model 1						Model 2					
x^p	y^p	z^p	w_{ij}	u	v	x^p	y^p	z^p	w_{ij}	u	v
-5	-5	4	1	0	0	-5	-5	0.5	1	0	0
-5	-2.5	2	1	0	0.25	-5	-2.5	-0.44409	1	0	0.25
-5	0	0	1	0	0.5	-5	0	-0.67835	1	0	0.5
-5	2.5	-2	1	0	0.75	-5	2.5	0	1	0	0.75
-5	5	-4	1	0	1	-5	5	0.1	1	0	1
-2.5	-5	2	1	0.25	0	-2.5	-5	0.25	1	0.25	0
-2.5	-2.5	-1.15387	1	0.25	0.25	-2.5	-2.5	0.484257	1	0.25	0.25
-2.5	0	-2.5166	1	0.25	0.5	-2.5	0	0.404741	1	0.25	0.5
-2.5	2.5	-2.87262	1	0.25	0.75	-2.5	2.5	0.069041	1	0.25	0.75
-2.5	5	-2	1	0.25	1	-2.5	5	1.366125	1	0.25	1
0	-5	0	1	0.5	0	0	-5	-1.2407	1	0.5	0
0	-2.5	-0.57129	1	0.5	0.25	0	-2.5	0.587458	1	0.5	0.25
0	0	-0.51563	1	0.5	0.5	0	0	0.901888	1	0.5	0.5
0	2.5	-0.57129	1	0.5	0.75	0	2.5	0.39776	1	0.5	0.75
0	5	0	1	0.5	1	0	5	0.451498	1	0.5	1
2.5	-5	-2	1	0.75	0	2.5	-5	-0.45521	1	0.75	0
2.5	-2.5	0.168396	1	0.75	0.25	2.5	-2.5	0.437521	1	0.75	0.25
2.5	0	1.514648	1	0.75	0.5	2.5	0	0.585897	1	0.75	0.5
2.5	2.5	1.887146	1	0.75	0.75	2.5	2.5	-0.18972	1	0.75	0.75
2.5	5	2	1	0.75	1	2.5	5	-0.48396	1	0.75	1
5	-5	-4	1	1	0	5	-5	0.177124	1	1	0
5	-2.5	-2	1	1	0.25	5	-2.5	1.252393	1	1	0.25
5	0	0	1	1	0.5	5	0	0.860548	1	1	0.5
5	2.5	2	1	1	0.75	5	2.5	-0.16847	1	1	0.75
5	5	4	1	1	1	5	5	0.761379	1	1	1

7 解析結果

Model 1 および 2 に対して 5 節の方法 1~3 を適用した結果を順に示す。計算機は CPU: Intel Xeon E5-2667 v4 (3.20 GHz, 2 プロセッサ), MEM: 256GB の性能のものを用いた。解析結果を以降に示す。いずれの最適解も, ソルバデフォルトの収束判定条件下で最適性条件を満足したものとなっている。

7.1 Model 1 の解析結果

Model 1 の形状を Fig. 2 の (a)~(f) の方法によって離散化した形状を Fig. 4 に示す。Fig. 5 には, それぞれの離散化パターンにおける最適形状を示している。各図の番号の最初の数値は, 5 節の方法 1~3 に対応している。すなわち, 1-(a)~1-(c) は, 離散化パターン

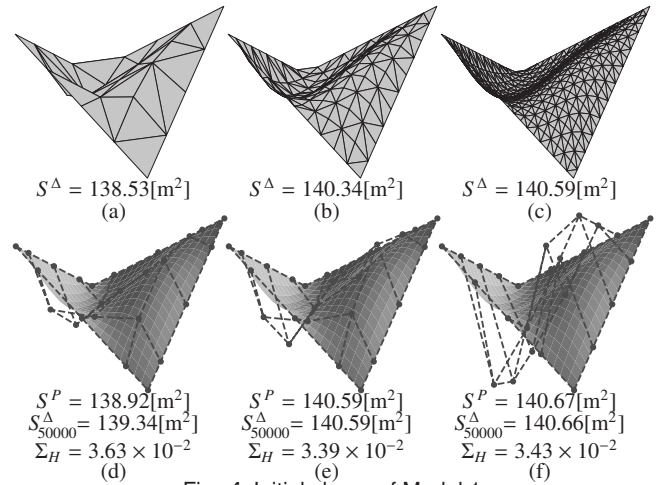


Fig. 4 Initial shape of Model 1

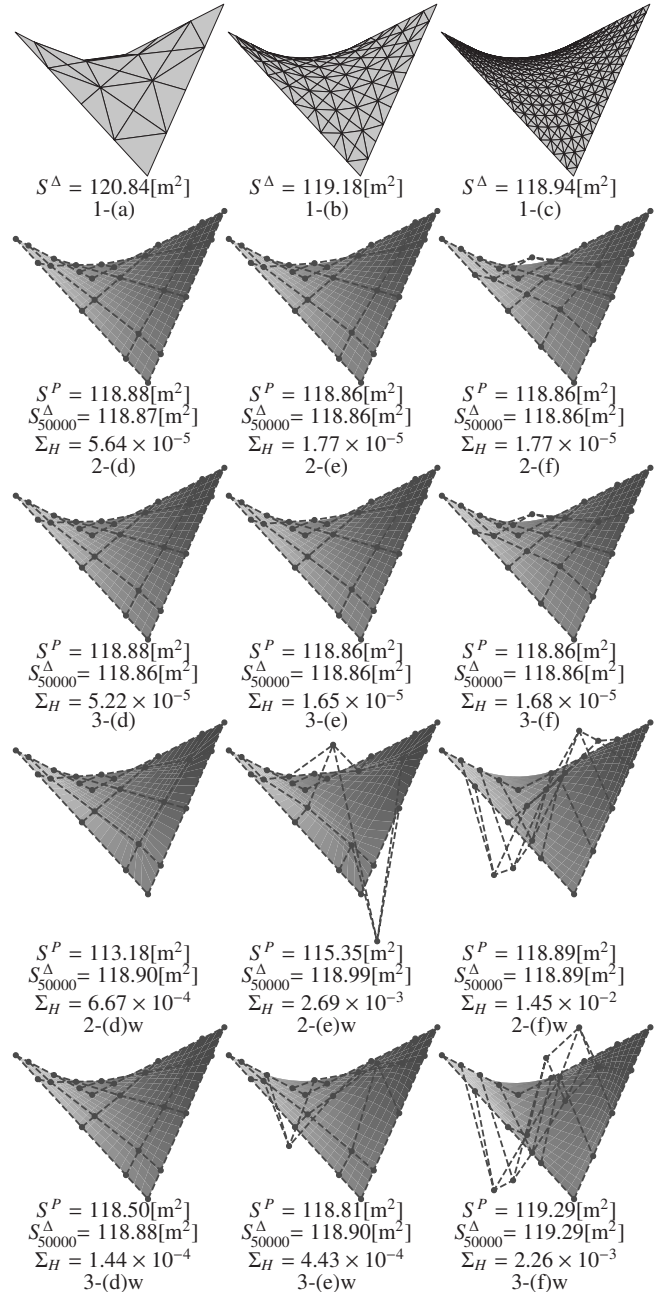


Fig. 5 Optimal shape of Model 1

(a)～(c) に対して問題 (10) を解いて得られた最適解を示し、2-(d)～2-(f) は、離散化パターン (d)～(f) に対して問題 (12) を解いて得られた最適解を示し、3-(d)～3-(f) は、離散化パターン (d)～(f) に対して問題 (14) を解いて得られた最適解を示している。また、設計変数に $\mathbf{w}^*$ を追加した場合の最適化結果を 2-(d)w～3-(f)w として示している。Fig. 6 には最適解における重み w_{ij} の分布をあわせて示している。Fig. 7 には各最適化計算に要した反復回数ならびに解析時間を示している。各図において、 S^A および S^P はそれぞれ方法 1 および 2 による曲面積を表し、 Σ_H は平均曲率の 2 乗和の曲面全体での積分値を表す。なお、離散化パターン (c)～(f) については、RBS 曲面を 50000 個の三角形要素に分割した際の面積和 S_{50000}^A を別途求め、これを厳密解とみなす。また、図中の点線及び黒丸は RBS 曲面の制御ネットである。なお、(a)～(f) の初期形状は Model 1 の近似曲面であり、厳密には三角形要素の粗密や RBS 曲面の次数の違いによって Fig. 1 とは若干の誤差があり、曲面積の値も互いにわずかに異なることに注意する。

まず、 $\mathbf{w}^*$ を設計変数としない場合の最適解に着目する。 S^P と S_{50000}^A の差異を見ると、両者はほぼ一致した。Fig. 5 の 1-(a)～1-(c) を見ると、三角形分割を細かくすることで S^A が減少し、曲面は極小曲面に近づいていることが確認できる。Fig. 5 の 2-(d)～2-(f) を見ると、2～4 次の RBS 曲面のいずれもほぼ同様の最適形状となった。 Σ_H もほぼ 0 に近い値となっており、厳密な極小曲面に極めて近い形状が得られていると推察される。また、Fig. 5 の 2-(d)～3-(f) の最適化結果から、平均曲率の 2 乗の曲面全体での積分値を最小化することで、曲面積を最小化して得られる最適解とほぼ同様の解が得られることが確認された。1-(a)～(c) の最適化結果と比較すると、2-(d)～3-(f) の方がより面積の小さな曲面が得られていることがわかる。

加えて、1-(c) の形状を記述するには 400 個の節点座標の情報が必要なのにに対し、2-(d)～3-(f) の形状は 25 個の制御点座標の情報で曲面を記述できる。また、Fig. 7 から明らかなように、方法 2 および 3 は、方法 1 と比べて計算コストも抑えられていることが確認できる。反復回数は、RBS 曲面の次数が上がると増える傾向にある。これは、次数を上げると RBS 曲面の局所制御性が失われるためと考えられる。なお、Model 1 は $z = 4xy/25$ で記述される HP 曲面と同一の境界形状を有している。そのような境界形状を有する極小曲面の曲面積は、HP 曲面の曲面積よりも小さくなることが知られている¹⁵⁾。実際、 $z = 4xy/25$ で記述される HP 曲面の曲面積は、

$$\begin{aligned} E &= 1 + (4y/25)^2, \quad F = (4/25)^2 xy, \quad G = 1 + (4x/25)^2 \\ S &= \int_{-5}^5 \int_{-5}^5 \sqrt{EG - F^2} dx dy \\ &= \frac{5}{12} \left\{ 16\sqrt{57} - 91 \log \{ 41(\sqrt{57} - 4) \} + 273 \log(\sqrt{57} + 4) - 125 \tan^{-1} \left(\frac{16}{5\sqrt{57}} \right) \right\} \\ &\approx 118.918 \end{aligned} \quad (19)$$

で陽に求めることができ、本論文で得られた方法 2 及び 3 による最適解の曲面積の方が小さい値となっていることが確認できる。

一方、 $\mathbf{w}^*$ も設計変数とした場合の最適解をみると、2-(f)w と 3-(f)w を除く全ての最適解で、 S^P の値は $\mathbf{w}^*$ を設計変数としない場合の最適解よりも改善されていることが確認できる。しかしながら、 S^P と S_{50000}^A との間に数値誤差が存在し、 S_{50000}^A は $\mathbf{w}^*$ を設計変数としない場合の最適解よりも劣る結果となっており、数値積分の精度が不十分

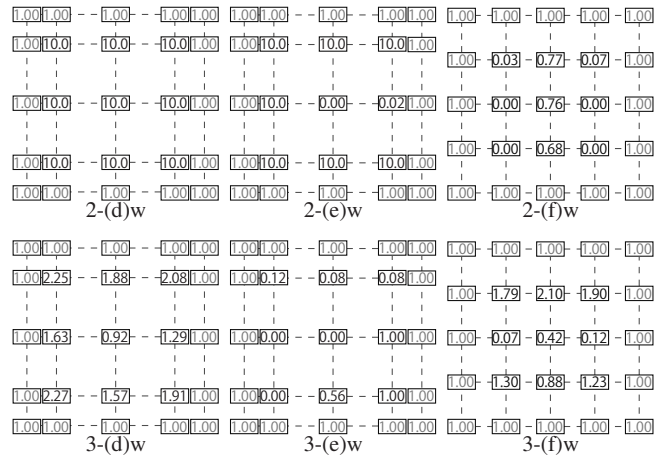
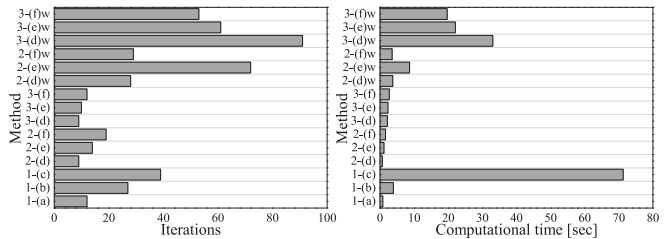
Fig. 6 w_{ij} distribution of Model 1

Fig. 7 Computational cost for Model 1

であることが確認できる。また、2-(f)w と 3-(f)w については、 S^P の値は S_{50000}^A との数値誤差がほとんど見られなかったものの、 $\mathbf{w}^*$ を設計変数としない場合の最適解よりも劣る結果となっており、局所最適解に収束しているものと推察される。 $\mathbf{w}^*$ を設計変数に追加したことで目的関数の非線形性が強くなったことが原因と考えられる。最適解の制御ネットの形状と Fig. 6 の重み係数の値を見比べると、特に 4 次の RBS 曲面は、 q_z^* の変化が小さく、主に $\mathbf{w}^*$ の値を変化させることによって面積を極小化していることが確認できる。ほとんどのケースでは、 w_{ij} の値は 0.0～2.3 程度の小さい範囲で分布しているが、2-(d)w と 2-(e)w のように w_{ij} の値が上限値である 10 を取るケースも見られた。これらの 2 ケースについて、 $\mathbf{w}^*$ の上限値を大きくして最適化問題を解き直したが、 $w_{ij} = 10$ となっていたものは引き続き上限値を取り続け、 w_{ij} の値の増加とともに S^P と S_{50000}^A の数値誤差が拡大する結果となった。これらの 2 ケースはいずれも S^P と S_{50000}^A の数値誤差が他と比べて大きくなっており、 w_{ij} の値のばらつきの大きさが数値積分の精度の悪化を招いていると考えられる。計算コストは、1-(c) より小さいものの、 $\mathbf{w}^*$ を設計変数としない場合と比べると大きく増加した。

7.2 Model 2 の解析結果

Model 2 を Fig. 2 の (a)～(f) の方法によって離散化した形状を Fig. 8 に示す。Fig. 9 には、それぞれの離散化パターンにおける最適形状を示す。各図の構成は 7.1 節と同様である。Fig. 10 には、設計変数に $\mathbf{w}^*$ を追加とした場合における最適解の重み w_{ij} の分布を示している。Fig. 11 には各最適化計算に要した反復回数ならびに解析時間を示している。Model 2 についても、(a)～(f) の初期形状は厳密には Fig. 3 の形状とは若干の誤差があり、曲面積の値も互いにわずかに異なることに注意する。

まず、 $\mathbf{w}^*$ を設計変数としない場合の最適解に着目する。 S^P と S_{50000}^A

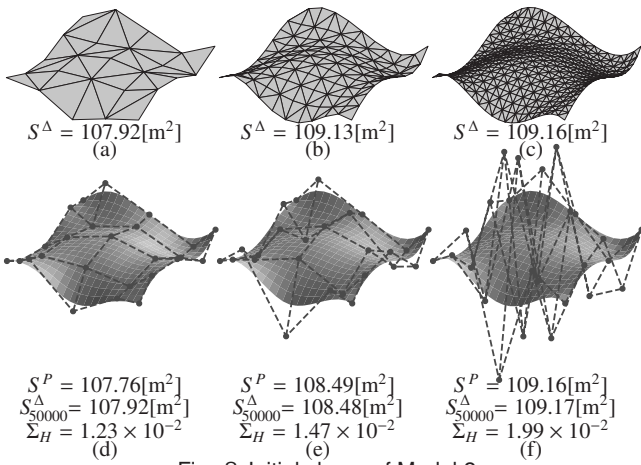


Fig. 8 Initial shape of Model 2

の差異を見ると、(d)の初期形状において若干の数値誤差は見られるものの、その他の形状においては両者はほぼ一致した。Fig. 9の1-(a)～1-(c)を見ると、三角形分割を細かくすることで S^Δ が減少し、曲面は極小曲面に近づいていることが確認できる。Fig. 9の2-(d)～2-(f)を見ると、最適形状はほぼ同様となったものの、曲面積についてはRBS曲面の次数ごとに若干のばらつきを生じ、2次のRBS曲面が最も最小化される結果となった。考えられる原因としては、

(i). 境界形状が離散化方法によって微妙に異なるため、極小曲面の厳密解が異なる

(ii). 厳密解がそれぞれのRBS曲面で補間しにくい形状となっているの2点が考えられる。(i)について、次数および制御ネットの形状が互いに異なることから、境界形状に差異が存在するものと考えられる。境界部分の制御ネットの形状は、RBS曲面の次数が高次になるほど複雑になっており、目的関数値も大きくなっていることから、Model 2の境界形状を有する極小曲面は、RBS曲面の次数が高次になるほど補間しにくくなる傾向にあると考えられる。(ii)について、 Σ_H は0に近い値に収束しているものの、Model 1の最適解と比べるとやや大きな値となっており、厳密な極小曲面と補間曲面とは若干の差異が生じているものと推察される。Fig. 9の3-(d)～3-(f)の最適化結果を見ると、平均曲率の2乗の曲面全体での積分値を最小化することで、曲面積を最小化して得られる最適解とほぼ同様の解が得られることが確認できる。2と3を比較すると、 S^P は2の方が若干小さいのに対し、 Σ_H は3の方がわずかに小さい。このことから、平均曲率の2乗の曲面全体での積分値の値が小さいほうが必ずしも曲面積が小さいとは限らず、両者は純粋な比例関係ではないことがわかる。1-(a)～(c)の最適化結果と比較すると、2-(d)～3-(f)は1-(c)と概ね同等な曲面積を有していることがわかる。ただし、Fig. 11から明らかなように、1-(c)よりも2-(d)～3-(f)の方が計算コストは小さい。形状記述に必要な情報も少なく、CAD/CAEなどの3次元グラフィックデータの授受が容易である。Model 1の場合と同様、反復回数は、RBS曲面の次数が上がると増える傾向にある。

一方、 w^* も設計変数とした場合の最適解をみると、3-(f)wを除く全ての最適解で、 S^P の値は w^* を設計変数としない場合の最適解よりも改善されていることが確認できる。しかしながら、 S^P と S_{50000}^Δ の間には数値誤差が存在し、数値積分の精度が不十分であることが確認できる。 S_{50000}^Δ は、2-(d)w～2-(f)および3-(f)wについては、 w^* を設計変数としない場合の最適解よりも劣る結果となった。一方で、

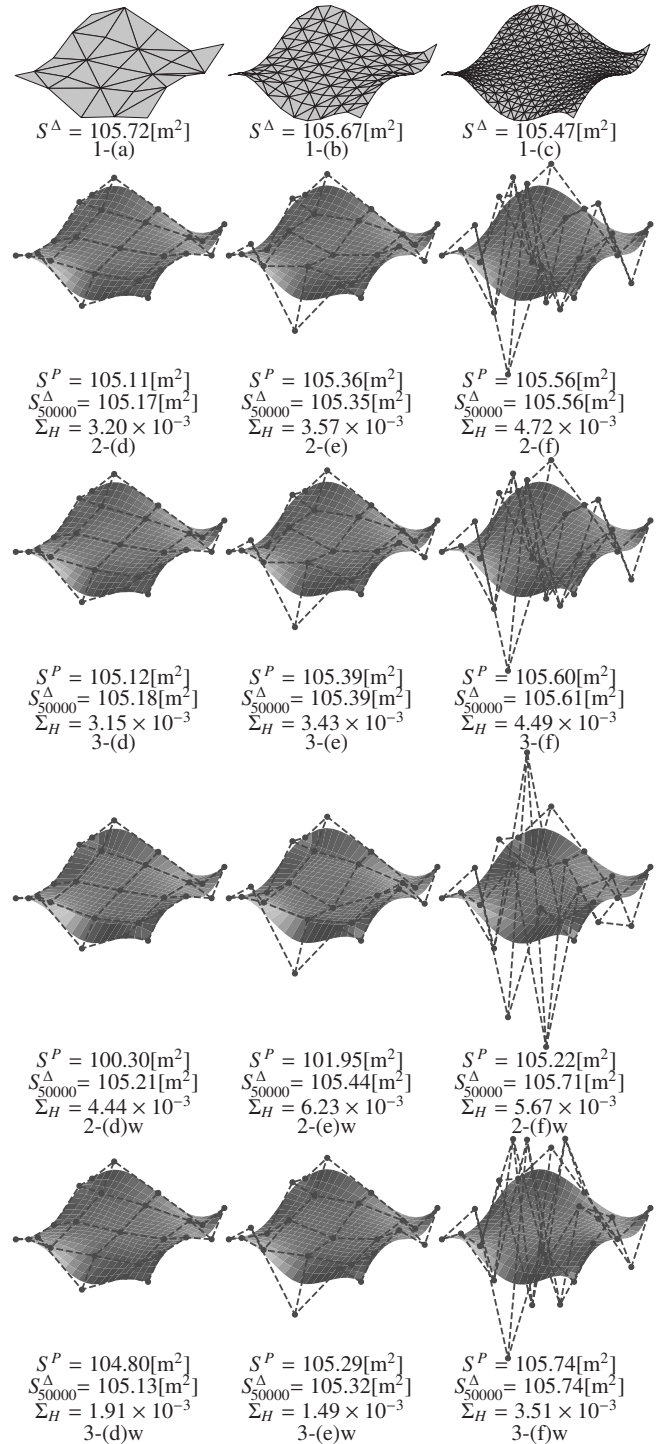


Fig. 9 Optimal shape of Model 2

3-(d)wと3-(e)wについては、 w^* を設計変数としない場合の最適解よりもさらに曲面積を小さくすることができた。また、3-(f)wについては、 S^P の値は S_{50000}^Δ との数値誤差がほとんど見られなかったものの、 w^* を設計変数としない場合の最適解よりも劣る結果となっており、局所最適解に収束しているものと推察される。 w^* を設計変数に追加したことで目的関数の非線形性が強くなったことが原因と考えられる。最適解の制御ネットFig. 10の重み係数の値を見比べると、ほとんどの解は q_z^* と w^* がともに変化しているが、3-(f)wについては、 q_z^* の変化は小さく、主に w^* の値を変化することによって曲面積を極小化していることが確認できる。方法2の最適解は w_{ij}

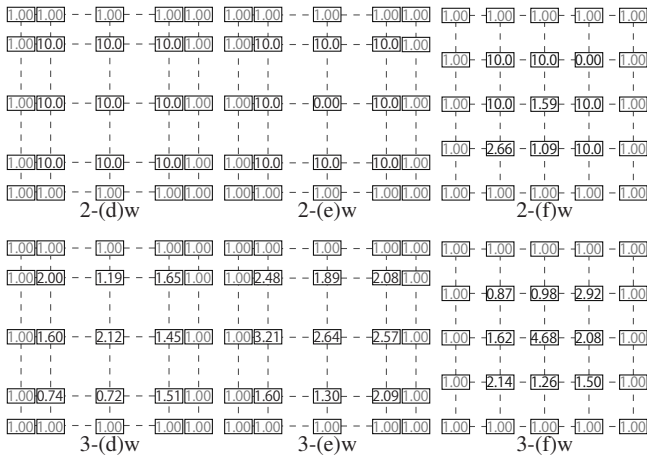
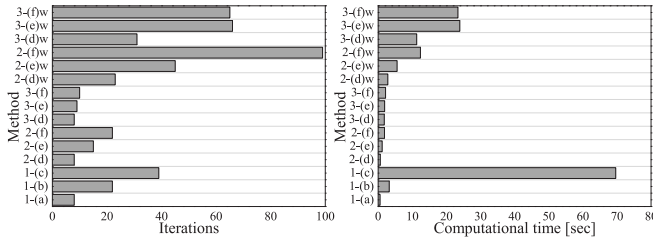
Fig. 1 0 w_{ij} distribution of Model 2

Fig. 1 1 Computational cost for Model 2

の値が上限値である 10 を取るものも存在し、方法 3 と比べて数値積分の精度が低かった。Model 1 の場合と同様に、 w^* の上限値を大きくして最適化問題を解き直すと、 $w_{ij} = 10$ となっていたものは引き続き上限値を取り続け、 w_{ij} の値の増加とともに S^P と S_{50000}^A の数値誤差が拡大する結果となった。計算コストは、1-(c) より小さいものの、 w^* を設計変数としない場合と比べると大きく増加した。

7. 3 積分精度の改善

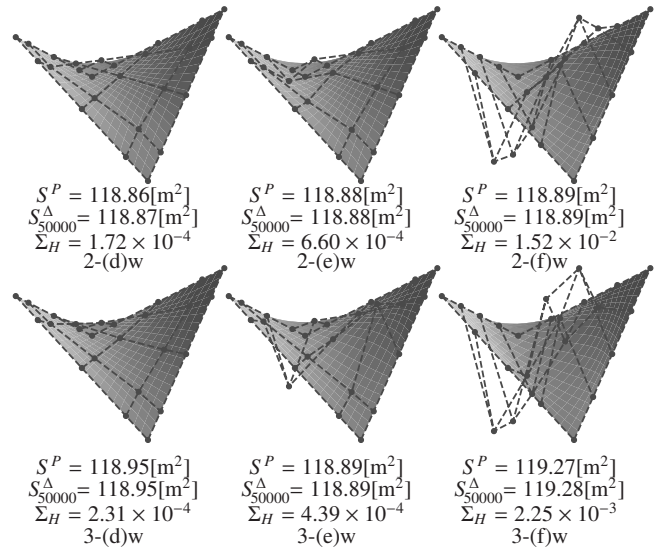
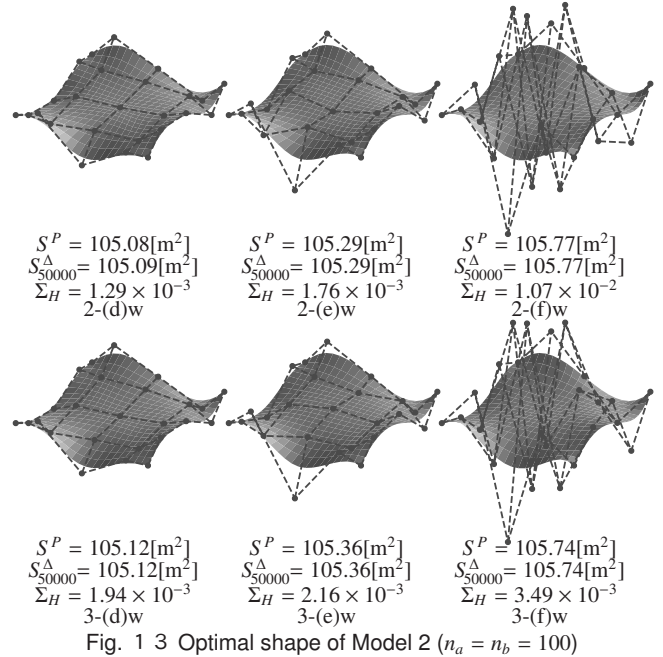
7. 1 ~ 7. 2 節の結果から、 w^* を設計変数に加えると、数値積分の精度が悪化することが確認された。そこで、2-(d)w ~ 3-(f)w については、積分次数を $n_a = n_b = 100$ として精度を高めた解析を行う。Model 1 および 2 に対しての解析結果を Fig. 1 2 および 1 3 にそれぞれ示す。

最適化結果を見ると、積分次数を高めたことで、すべての最適解について、 S^P と S_{50000}^A がほぼ一致していることが確認できる。また、 w^* のばらつきが小さくなり、上限値 10 をとる w_{ij} は存在しなくなった。ただし、積分次数を高めたことで計算コストは増加し、解析にはそれぞれ数百秒程度の時間を要した。また、 w^* を設計変数としない場合の最適解と比較して解を改善できている解は、Model 2 の 2-(d)w, 2-(e)w, 3-(d)w の 3 つのみとなった。実行可能領域が拡大しているのにも関わらず、ほとんどの解が値を改善できていないことから、局所解へ収束していることが示唆される。

8 結

境界形状の異なる 3 つの異なる曲面に対して、

1. 三角形分割された曲面の三角形要素の面積の和の最小化
 2. RBS 曲面の曲面積最小化
 3. RBS 曲面の平均曲率の 2 乗の曲面全体での積分値の最小化
- の 3 手法により極小曲面の生成を行った。方法 2 および 3 について

Fig. 1 2 Optimal shape of Model 1 ($n_a = n_b = 100$)Fig. 1 3 Optimal shape of Model 2 ($n_a = n_b = 100$)

は、設計変数に境界部を除く制御点の重み w^* を加えた最適化も試みた。得られた結果は次のようにまとめられる。

- 方法 1 は、厳密な極小曲面に近い解を求めるためには細かい三角形分割が必要となる。結果、計算コストが増大するとともに、得られた極小曲面の情報を記憶するために多数の節点情報が必要となる。
- 方法 2 および 3 は、目的関数値の精度は数値積分の次数に依存する。境界部分を除く制御点の z 座標 q_z^* を設計変数とした場合において、本論文で扱ったような規模の制御点数を有する曲面であれば、積分次数は 10 次程度で十分な精度を目的関数に与えることができ、方法 1 と比べて非常に少ない計算コストで厳密な極小曲面に近い解を得られる。
- 境界部分を除く制御点の重み係数 w^* も設計変数とした場合、目的関数の非線形性が強くなるため、解が w^* を設計変数としない場合の最適解よりも劣る局所最適解へ収束することがある。加えて、十分な精度を目的関数に与えるためには、非常に

高い積分次数を必要とするため、計算コストが増加する。

- 方法 2 および 3 は、わずかな数の制御点座標情報によって極小曲面を記述できる。
- 方法 2 と方法 3 を比較すると、最適化の際の反復回数は方法 3 の方が少なくすむ。ただし、平均曲率の 2 乗の曲面全体での積分の計算は、曲面積の計算と比べて計算コストが高いため、今回の数値実験では、解析時間で比較すると方法 2 の方がやや優れている。
- 方法 3 は、平均曲率の 2 乗の曲面全体での積分値を逐次モニタリングすることができるため、現在の曲面が極小曲面と比べてどの程度の差異があるかを定量的に評価できる。
- RBS 曲面の次数は、低いほうが解の収束が早い傾向にある。しかし、極小曲面の形状によっては、次数によって補間誤差にばらつきがあるため、必ずしも低次の次数が良好な解をもたらすとは限らない。

方法 1 よりも方法 2 および 3 の方が、少ない計算コストで精度の高い解を得ることができ、さらにデータ量も小さいというメリットがあることが示された。ただし、より厳密な極小曲面に近い解を得るために、境界部分を除く制御点の重み係数 w^* を設計変数に加えることは得策ではない。より精度の高い極小曲面を得たい場合には、平均曲率の 2 乗の曲面全体での積分値を確認しながら、次数を変更したり、制御点数を増やすなどの工夫が必要であると考えられる。

参考文献

- 1) T. Suzuki, Y. Hangai: Numerical analysis of uniform stress surface, Research Paper on Membrane Structures, pp. 1-12, 1989 (in Japanese)
鈴木 俊男, 半谷 裕彦: 等張力曲面の数値解析, 膜構造研究論文集, pp. 1-12, 1989
- 2) E. Haug and G. H. Powell: Analytical Shape Finding for Cable Nets, TENSION STRUCTURES and SPACE FRAMES, Proceedings of IASS Pacific Symposium, Tokyo and Kyoto, Part. 2, pp. 165-175, 1972
- 3) H. Ohmori, N. Hagiwara, T. Matsui and O. Matsuoka : Numerical Analysis of Minimum Surface by Finite Element Method, 10 Years of Progress in Shell and Spatial Struct., Proceedings of IASS Symposium, Madrid, Vol. 5, 1989
- 4) K. Ishihara, T. Yagi, N. Hagiwara and H. Ohmori: Shape Finding Analysis of Membrane Structure: Minimal surface analysis by using combined variational functional, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), No. 469, pp. 61-70, 1995. 3 (in Japanese)
石原 競, 八木 孝憲, 萩原 伸幸, 大森 博司: 極小面解析による膜構造の形状解析: 複合変分汎関数を用いて, 日本建築学会構造系論文集, No. 469, pp. 61-70, 1995. 3
- 5) T. Yagi, H. Ohmori and K. Ishihara: Study on Shape Determination of Membrane Structure by Using Minimal Surface Method, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), No. 502, pp. 99-104, 1997. 12 (in Japanese)
八木 孝憲, 大森 博司, 石原 競: 極小曲面法による膜構造の形状決定に関する研究: 非線形解法の検討と収束性に関する考察, 日本建築学会構造系論文集, No. 502, pp. 99-104, 1997. 12
- 6) K. Kawaguchi, W. KE and M. Miki: Minimal Surface with Constraint Conditions and Steepest Descent Method, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), No. 632, pp. 1773-1777, 2008. 10 (in Japanese) 川口 健一, 柯 宛伶, 三木 優彰: 付帯条件付き極小曲面と一般化最急降下法に関する研究, 日本建築学会構造系論文集, No. 632, pp. 1773-1777, 2008. 10
- 7) T. Nishimura and I. Yamanaka: A Method for Finding Minimal Surfaces of Membranes Using Simulated Annealing, Journal of the 37th symposium on Computer Technology of Information, Systems and Applications (Transactions of AIJ), pp. 85-90, 2014 (in Japanese)
西村 督, 山中 郁美: 擬似焼きなまし法を用いた膜曲面の極小曲面探索法, 第 37 回情報・システム・利用・技術シンポジウム論文集 (論文), pp. 85-90, 2014
- 8) T. Satonaka, Y. Yokosuka and T. Honma: Stable and Unstable Solution for Minimal Surface Using Discrete Differential Geometry Method, Summaries of Technical Papers of Annual Meeting Architectural Institute of Japan, Structures-1, pp. 761-762, 2015 (in Japanese)
里中 拓矢, 横須賀 洋平, 本間 俊雄: 離散微分幾何手法による極小曲面の安定解と不安定解, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 構造 I, pp. 761-762, 2015
- 9) K. Kenmotsu: Surfaces with Constant Mean Curvature, American Mathematical Society, 2003
- 10) Y. X. Hao, R. H. Wang and C. J. Li: Minimal quasi-Bézier surface, Applied Mathematical Modelling, Vol. 36, pp. 5751-5757, 2012
- 11) J. Monterde: Bézier surfaces of minimal area: The Dirichlet approach, Computer Aided Geometric Design, Vol. 21, pp. 117-136, 2004
- 12) G. Farin, M. S. Kim and J. Hoschek (eds.): Handbook of Computer Aided Geometric Design, Elsevier, Amsterdam, 2015
- 13) T. E. Oliphant: Guide to NumPy, CreateSpace Independent Publishing Platform, 2015
- 14) SciPy documentation: <http://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/optimize.html> (accessed 2017.5.14)
- 15) W. J. Lewis: Tension Structures: Form and Behaviour, Thomas Telford Publishing, 2003

COMPUTATIONAL MORPHOGENESIS OF MINIMAL SURFACE REPRESENTED AS PARAMETRIC SURFACE

*Shinnosuke FUJITA^{*1}, Yoshihiro KANNO^{*2} and Makoto OHSAKI^{*3}*

^{*1} Assist. Prof., Laboratory for Future Interdisciplinary Research of Science and Technology, Tokyo Institute of Technology, Dr. Eng.

^{*2} Assoc. Prof., Laboratory for Future Interdisciplinary Research of Science and Technology, Tokyo Institute of Technology, Dr. Eng.

^{*3} Prof., Dept. of Architecture and Architectural Eng., Kyoto Univ., Dr. Eng.

The membrane architectural structures are constituted by flexible members which do not resist bending such as film materials and cable materials, and their mechanical stability greatly depends on the shape of the initial surface. In order to design a membrane structure having mechanical stability which does not cause wrinkles or slackness, it is common to adopt an isotonic surface as the initial design surface of the membrane structure.

Some previous studies proposed methods of obtaining a surface with minimal surface area under appropriate subsidiary conditions by utilizing the fact that the isotonic surface is the same as the minimal surface. However, in any of these studies, since the surface is approximated by triangular elements and the sum of the triangular elements area is minimized, the error from the true minimal surface greatly depends on the division method of triangular elements. If the triangulation is made finer, a minimal surface with higher precision can be obtained, but the computational cost increases and the obtained minimal surface becomes a collection of enormous nodal information. The amount of data becomes enormous and it is difficult to smoothly convert or deliver the obtained solution as 3D graphic data in the situation of using CAD/CAE. In contrast, if we use a parametric surface, it is possible to explicitly calculate the surface area in parametric expression. Also, the minimal surface is known as a surface in which the mean curvature is equal to 0 at any point on the surface. By measuring the mean curvature, it is possible to quantitatively evaluate the error from the true minimal surface.

In this research, to create the minimal surface which can explicitly express numerical functions with a small data volume, we solve the three optimization problems as follows:

1. Minimization of the sum of areas of triangular elements of triangulated surfaces (Previous method).
2. Minimizing total surface area of the parametric surface (Proposed method).
3. Minimizing the square of mean curvature of the parametric surface (Proposed method).

The results obtained in this study are summarized as follows:

- Method 1 requires high computational cost in order to get a solution with sufficient accuracy.
- In the case of methods 2 and 3, if the weights of the parametric surface are set as design variables in addition to the vertical control point coordinates, the objective function becomes highly nonlinear. As a result, the computational cost becomes high and the obtained solution has a greater chance of being a non excellent local optimal solution. So the design variables should be the vertical control point coordinates only.
- If the vertical control point coordinates are defined as the design variables, methods 2 and 3 can drastically decrease the computational cost as compared with method 1.
- Methods 2 and 3 are suitable for CAD/CAE use because of their low quantity of the shape information.

It is confirmed that methods 2 and 3 are very effective methods for finding minimal surface.

(2017 年 2 月 9 日原稿受理, 2017 年 5 月 12 日採用決定)