

Goursat 問題について

京大 理(研修員) 長谷川幸子

次の定数係数偏微分作用素を考えよう。

$$(1) \quad P(\partial_t, \partial_x, \partial_y) \equiv \sum_{i+j+|d| \leq m} a_{i,j,d} \partial_t^i \partial_x^j \partial_y^d$$

$$= \tau'' \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad (t, x, y) \in \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^e.$$

最高階 (m 階微分) の項を P_m , $m-1$ 階微分の項を P_{m-1} 残り R_{m-2} とすれば, P は次のようにあらわされる。

$$(2) \quad P = P_m + P_{m-1} + R_{m-2}.$$

P_m に対して, 次の仮定をおく。

$$(A-1) \quad t=0 \text{ は, 一重特性面である. 即ち, } \partial_t^m \text{ の係数}$$

$$a_{m,0,0} = 0 \quad \text{かつ} \quad \sum_{j+|d|=1} |a_{m-1,j,d}| \neq 0.$$

仮定 (A-1) の下で, 次の問題 (Goursat 問題) $\in E_{t,x,y}$ のクラスで考えよう。

$$(3) \quad P(\partial_t, \partial_x, \partial_y) u(t, x, y) = f(t, x, y) \in E_{t,x,y} \quad (t \geq 0)$$

$$(4) \quad \begin{cases} \partial_t^i u(0, x, y) = u_i(x, y) \in E_{x, y}, & 0 \leq i \leq m-2 \\ u(t, 0, y) = \varphi(t, y) \in E_{t, y} & (t \geq 0) \end{cases}$$

(4) を Goursat data とよぼう。 $\equiv$ " $\{u_i(x, y)\}_{0 \leq i \leq m-2}$ と $\varphi(t, y)$ との間には、次の関係式 (いわゆる compatibility 条件) が成りたっているとする。

$$(5) \quad \partial_t^i \varphi(0, y) = u_i(0, y) \quad 0 \leq i \leq m-2.$$

定義 Goursat 問題が $\mathcal{E}$ -well posed であるとは、任意の $\{u_i\}_{0 \leq i \leq m-2}$, $\varphi(t, y)$, $f(t, x, y)$ に対して、(3), (4) をみたす解 $u(t, x, y)$ が $E_{t, x, y}$ の中に一意的に存在する $\equiv$ とである。

Banach の定理より、 $\mathcal{E}$ -well posed であれば、写像:

$$(\{u_i\}, \varphi, f) \longrightarrow u \text{ は, } \prod_{i=0}^{m-2} E_{xy} \times E_{ty} \times E_{t, x, y} \text{ から } E_{t, x, y} \text{ の中への連続写像になっている。}$$

命題 1 仮定 (A-1) の下に、Goursat 問題が、 $\mathcal{E}$ -well posed であるならば、 $\partial_t^{m-1} \partial_x$ の係数: $a_{m-1, 1, 0} \neq 0$ である。

証明. $a_{m-1, 1, 0} = 0$ ならば、解が存在しないような data $\{\{u_i\}, \varphi, f\}$ が、あることを示そう。

$a_{m-1, 1, 0} = 0$ の時、(3) で $f = 0$ とおいた式は、

$$(3') \quad \sum_{|a| \leq 1} a_{m-1, 0, a} \partial_t^{m-1} \partial_y^a u(t, x, y) \\ + \sum_{i \leq m-2} a_{i, j, d} \partial_t^i \partial_x^j \partial_y^d u(t, x, y) = 0.$$

Goursat data とし、次のものを考えよう。

$$(4') \begin{cases} \partial_t^i u(0, x, y) = 0 & 0 \leq i \leq m-2 \\ u(t, 0, y) = \psi(y) t^{m-1} / (m-1)! & \psi(y) \in E_y. \end{cases}$$

この data は明らかに compatibility 条件をみたしている。

(3') で $t=0, x=0$ とおき、(4') を考慮すれば、

$$(5) \sum_{|a| \leq 1} a_{m-1,0,a} \partial_y^a \psi(y) = 0.$$

仮定 (A-1) より、(5) をみたすということは、 $\psi(y)$ に対する制限になっている。したがって、(5) をみたさないような $\psi(y)$ に対しても、Goursat 問題 (3') - (4') の解は存在しない。

g. e. d.

煩雑さを避けるために、記号を少し変えよう。(A-1) と ε -well posed を仮定すれば、 P は次のように書ける。

$$(6) \quad P = \left(\partial_x + \sum_{j=1}^{\varepsilon} a_j \partial_{y_j} + c \right) \partial_t^{m-1} \\ + \left\{ h_2(\partial_x, \partial_y) \partial_t^{m-2} + \dots + h_m(\partial_x, \partial_y) \right\}.$$

ここで $h_i(\xi, \eta)$ は、 (ξ, η) の i 次多項式である。

P_m の係数に関して、命題 1 の他に、さらに次の制限が加わる。

命題 2 仮定 (A-1) の下に、Goursat 問題が ε -well posed であるならば、 a_j は実数である。

この証明は後で与える。

注意 1 命題 1, 2 より, (A-1) と ε -well posed と仮定すれば, もとの方程式 (3) は, 次の形に帰着できる。

$$(1) \quad \partial_t^{m-1} \partial_x u = \sum_{\substack{i+j+|a| \leq m \\ i \leq m-2}} a_{ij\alpha} \partial_t^i \partial_x^j \partial_y^a u + f.$$

さて, ここで P の特性方程式を考えよう。

$$P_m(\tau, \xi, \eta) = b_1(\xi, \eta) \tau^{m-1} + b_2(\xi, \eta) \tau^{m-2} + \dots + b_m(\xi, \eta).$$

$b_1(\xi, \eta) \neq 0$ の時, P_m は τ の $m-1$ 次の多項式である。このとき,

P の特性方程式 $P_m(\tau, \xi, \eta) = 0$ の根を, 特性根とよび,

$$\tau_i(\xi, \eta) \quad 1 \leq i \leq m-1 \quad \text{であらう。}$$

定理 1 (A-1) の下で, Goursat 問題が ε -well posed であるならば, $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^d$ に対して, 特性根は全て実数である。

証明は, [2] で双曲型方程式に対して用いられたと同じ方法で, 特性根に実数でないものがあるとなれば, data から解への連続性が破れることを示す。

この定理は, 双曲型方程式の Cauchy 問題に対する結果と類似である。しかし次の定理は, Goursat 問題特有の性質であろうと思われる。

定理 2 (A-1) の下で, Goursat 問題が ε -well posed であるならば, $P_m(\tau, \xi, \eta)$ は, $b_1(\xi, \eta)$ で割り切れなければならない。
4

らな。即ち

$$(8) \quad P_m(\tau, \xi, \eta) = b_1(\xi, \eta) \dot{Q}_{m-1}(\tau, \xi, \eta).$$

==で", $\dot{Q}_{m-1}(\tau, \xi, \eta)$ は, $m-1$ 次同次式である。

証明の方針: 方程式 (7) を考えよう。入定理 2 の主張は、
 $\underbrace{y \in R^1 \text{ とすれば}}_{\text{入定理 2 の主張は}},$
 "E-well posed ならば", $a_{m-i, 0, i} = 0 \quad 2 \leq i \leq m$ である。
 はじめに、矛盾によって $a_{m-2, 0, 2} = 0$ を示す。詳しく云
 えば", E-well posed と, $a_{m-2, 0, 2} \neq 0$ と仮定して, (7) の解の列
 で", data から解への連続性がなりたたないようなものを
 構成する。次に $a_{m-i, 0, i} = 0 \quad (3 \leq i \leq m)$ を次の方法
 で示す。即ち, $a_{m-2, 0, 2} = 0$ かつ $\sum_{i=3}^m |a_{m-i, 0, i}| \neq 0$
 とすれば, 特性多項式 $P_m(\tau, \xi, \eta) = 0$ かつ, 虚根 ξ も $\tau = 0$
 かつ示され, 定理 1 より, E-well posed であるとは反する。

次に低階の部分 P_{m-1} に対する制約をのべる。(A-1) の他に
 さらに次を仮定する。

(A-2) $\dot{Q}_{m-1}(\partial_t, \partial_x, \partial_y)$ は t 方向に強双曲型である。即
 ち, $\dot{Q}(\tau, \xi, \eta) = 0$ の根 $\tau_i(\xi, \eta)$ は, $(\xi, \eta) \in R^1 \times R^d \setminus \{0\}$ に
 対して, 全て実で", かつ相異なる。

定理 3 仮定 (A-1), (A-2) の下に, Goursat 問題が",
 E-well posed であるならば", P_{m-1} は次の形でなければなら

$$(9) \quad P_{m-1}(\tau, \xi, \eta) = c \dot{Q}_{m-1}(\tau, \xi, \eta) + b_1(\xi, \eta) \dot{Q}_{m-2}(\tau, \xi, \eta).$$

この定理は、双曲型方程式の Cauchy 問題の Levi 条件に類似のものである。Cauchy 問題では、特性根が重根になると、けじめで Levi 条件が成り立たないが、Goursat 問題では、特性根が単根であっても、このような条件が成り立つ。

定理3の基本的な証明の方針は、定理1と同じである。

定理1, 2, 3の逆である次の定理がなり立つ。

定理4

$$P(\tau, \xi, \eta) = (b_1(\xi, \eta) + c)(\dot{Q}_{m-1}(\tau, \xi, \eta) + Q_{m-2}(\tau, \xi, \eta)) \\ + R_{m-2}(\tau, \xi, \eta)$$

ここで $b_1(\xi, \eta)$ は (ξ, η) の m -次実多項式, $b_1(1, 0) = 1$,

$\dot{Q}_{m-1}(\partial_t, \partial_x, \partial_y)$ は t 方向に強双曲型とする。

上の P に対する Goursat 問題は、 ε -well posed である。

証明は、逐次近似法によって、解を構成する。

定理1～4の証明については、[1], [3]を参照して下さい。

命題2の証明

ここで、先に残しておいた 命題2の証明をしよう。

$\lim a_j \neq 0$ とすると、data $\{u_i, \varphi, f\}$ から、解 $u(t, x, y)$

への連続性が破れることを示そう。

u とし、 t, x, y_j のみの関数で、 $Pu = 0$ なるものを考えよう。

$$Pu = (\partial_x - a\partial_y + c)\partial_t^{m-1}u + (h_2(\partial_x, \partial_y)\partial_t^{m-2} + \dots + h_m(\partial_x, \partial_y))u = 0.$$

" τ " $a = -a_j$, $y \in \mathbb{R}^1$ " τ " がある。

$$u = e^{i\eta(ax+y) - cx} v(t, x)$$

とおけば、 $v(t, x)$ のみに関する方程式は、

$$\begin{aligned} (10) \quad \partial_x \partial_t^{m-1} v &= -\{h_2(\partial_x + ia\eta - c, i\eta)\partial_t^{m-2} + \dots \\ &\quad + h_m(\partial_x + ia\eta - c, i\eta)\} v(t, x) \\ &\equiv \sum_{s=2}^m \sum_{p+q \leq s} a_{spq} \partial_x^p \eta^q \partial_t^{m-s} v \end{aligned}$$

" τ " がある。 $v(t, x)$ に対して、次の Goursat data を考えよう。

$$(11) \quad \begin{cases} \partial_t^i v(0, x) = 0 & 0 \leq i \leq m-2 \\ v(t, 0) = t^{m-1}/(m-1)! \end{cases}.$$

(10), (11) をみたす形式解は、

$$(12) \quad v(t, x) = \sum_{j, k} v_{j, k} t^j x^k / j! k!$$

とおく。(11) より

$$(11') \quad \begin{cases} v_{j, k} = 0 & j = 0, 1, \dots, m-2, k = 0, 1, 2, \dots \\ v_{m-1, 0} = 1 \\ v_{j, 0} = 0 & j \neq m-1 \end{cases}.$$

7

(12) を (10) に代入して、両辺の $t^l x^r$ の係数をくらべると、

$$(13) \quad V_{m-1+l, r+1} = \sum_{s=2}^m \sum_{p+q \leq s} a_{spq} \eta^q V_{l+m-s, r+p}$$

(11') と (13) より

$$(14) \quad V_{m-1+l, k} = 0 \quad k > l \geq 0.$$

$k \leq l$ なる項については、 η が正の実数で、 l の所で l 次の評価を得る。

$$(15) \quad |V_{l+m-1, k}| \leq A C^l \eta^{k+l} (k+l)! \quad k \leq l.$$

A, C は定数。

(15) の証明は、 l に関する帰納法による。

(12) と (14) より $V_{m-1, 0} = 1$ を使って次の式が得られる。

$$(16) \quad V(t, x) = \sum_{k \leq l} V_{m-1+l, k} \frac{t^{m-1+l} x^k}{(m-1+l)! k!} \\ = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + \sum_{l \geq 1} \sum_{k=0}^l V_{m-1+l, k} \frac{t^{m-1+l} x^k}{(m-1+l)! k!}.$$

上式が 2 項を、(15) を使って評価しよう。

$$\sum_{l \geq 1} \sum_{k=0}^l A C^l \eta^{k+l} (k+l)! \frac{t^{m-1+l} x^k}{(m-1+l)! k!} \\ \leq \sum_{l \geq 1} \sum_{k=0}^l A C^l \eta^{k+l} 2^{k+l} t^{m-1+l} x^k$$

$x = x_0$ と $x \in \Omega$ とし、 $C > 1$, $\eta > 1$ とすれば、上式は次の式で置き換えられる。

$$(17) \quad A t^{m-1} \sum_{\ell \geq 1} C^\ell \eta^{2\ell} 2^{2\ell} t^\ell (1+|x_0|)^\ell.$$

$$(18) \quad 0 < t < 1/4C\eta^2(1+|x_0|)$$

のとき, 級数 (17) は収束する. 結局 (18) をみたす t に対して,

$$|V(t, x_0)| > t^{m-1} \left(1 - \sum_{\ell=1}^{\infty} A \{4C\eta^2(1+|x_0|)t\}^\ell\right)$$

を得る. よって, 例えば,

$$t_\eta = 1/8C\eta^2(1+|x_0|) \cdot A$$

ととれば,

$$(19) \quad |V(t_\eta, x_0)| \geq M/\eta^{2(m-1)}$$

を得る. ここで M は, η に無関係な正の定数.

さて, もとの u にもとれば,

$$(20) \quad u = e^{ia\eta x + i\eta y - Cx} V(t, x)$$

である. $\operatorname{Im} a \neq 0$ より, $(\operatorname{Im} a)x_0 < 0$ とするよう x_0 をとろう. つぎの評価が得られる.

$$(21) \quad |u(t_\eta, x_0, y)| = e^{-(\operatorname{Im} a)x_0\eta - \operatorname{Re} Cx_0} |V(t_\eta, x_0)| \\ \geq e^{-(\operatorname{Im} a)x_0\eta - \operatorname{Re} Cx_0} M \eta^{-2m+2}$$

一方 (20) の u のみたす Goursat data は, (11) より

$$\begin{cases} \partial_t^i u(0, x, y) = 0 & 0 \leq i \leq m-2 \\ u(t, 0, y) = e^{i\eta y} t^{m-1}/(m-1)! \end{cases}$$

であるから, ε -well posed の仮定より, 解は η に関して,
 η

高々多項式の増大 order をもつ。これは (21) に矛盾する。

q. e. d

西谷の定理について

最後に西谷氏が [3] で得られた結果についてのべよう。

次の定数係数偏微分作用素を考えよう。

$$(N) \quad A(\partial_t, \partial_x, \partial_y) = \sum_{j=0}^m C_j(\partial_x, \partial_y) \partial_t^{m-j}, \quad (t, x, y) \in \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^l$$

ここで $C_j(\xi, \eta)$ は, (ξ, η) に関する j -次多項式とする。 j -次同次部分を C_j° であらわそう。

仮定 $C_l^\circ(1, 0) = 1$ 即ち $\partial_x^l \partial_t^{m-l}$ の係数は 1。

上の仮定の下で、次の Goursoat 問題を考えよう。

$$(P) \quad \begin{cases} A(\partial_t, \partial_x, \partial_y) u(t, x, y) = 0 \\ \partial_t^i u(0, x, y) = \varphi_i(x, y) \in \mathcal{E}_{x, y} & 0 \leq i \leq m-l-1 \\ \partial_x^j u(t, 0, y) = \psi_j(t, y) \in \mathcal{E}_{t, y} & 0 \leq j \leq l-1 \end{cases}$$

もちろん $\{\varphi_i\}$ と $\{\psi_j\}$ の間には, compatibility 条件が必要になっているとする。

定理 [Nishitani] 上記の仮定の下で, (P) が ε -well posed であるための必要かつ十分な条件は, $\varepsilon > 0$ が存在して, $0 < |\delta| \leq \varepsilon$ であるような任意の δ に対して, $A(\partial_t, \partial_x, \partial_y)$ は, $(1, \delta, 0)$ 方向に双曲型である。

証明は〔3〕をみて下さい。

(N)の形に書けるということは、方程式に対してどのくらいの制限になっているのであろうか。 $\ell=1$ (即ち $\ell=0$ が一重特性面) の時には、いつでもこの形になっている。さらに $\ell=0$ が特性面であった。 $A(dt, dx, dy)$ が、いずれかの方向に双曲型なら、(N)の形になっていることが示される。

(N)の形及び、西谷の定理から、今まで述べた Goursat 問題は、双曲型方程式と非常に密接な関係があることがわかる。

(N)以外の形をしないもので、Goursat 問題が ε -well posed なものがあるだろうか？

今のところ、(N)以外の形をしないものについて、Goursat 問題は定義してはないので、一応次のように考えておこう。偏微分作用素の最高階部分については (N) と同じ制限をおくが、低階 ($m-1$ 階微分以下の部分) については、何も制限をおかない。即ち

$$L = \sum_{j=0}^m C_j^0(dx, dy) \partial_t^{m-j} + P_{m-1}(dt, dx, dy),$$

さらに $C_\ell^0(1,0)=1$ も仮定する。data は (P) と同じもの。 $(t=0$ に $m-\ell$ 個, ~~$x=0$~~ $x=0$ に ℓ 個与える) とする。

この内に対応する答が。どうなのかな今の $\varepsilon = 3$ (それには) かな
らないうが、たぶん一否定的な例がある。

$$L = \partial_t^2 + \partial_x^2$$

で、 $t=0$ の 1 行、 $x=0$ の 2 行 data を与える Goursat 問題
を考える時、これは ε -well posed ではない。証明は、

$L = \partial_t(\partial_t + \partial_x^2)$ として、 $\partial_t + \partial_x^2$ が semi elliptic である
ことを使えばよい。

参照文献

- [1] Y. Hasegawa : On the C^∞ -Goursat problem for
equations with constant coefficients, J. Math. Kyoto
Univ. 19-1 (1979) 125-151
- [2] S. Mizohata : Some remarks on the Cauchy
problem, J. Math. Kyoto Univ. 1 (1961-1962) 109-129
- [3] T. Nishitani : On the ε -well posedness for the
Goursat problem with constant coefficients, J.
Math. Kyoto Univ. 20-1 (1980) 179-190.