

砂山における Segregation と Stratification の形成過程

茨城大学理 大阪府立大学工¹ 野口 真保

e-mail maho@dune.ms.osakafu-u.ac.jp

(1998 年 12 月 14 日受理)

はじめに

自然界の様々な現象の中で自己組織化していく現象は意外に多い。例えば砂丘や風紋はあまりにもきれいなパターンを形成し、まるで生命でも宿しているかの如く自己を増殖したり成長を続けたりする。これら自己組織化していく現象のなかで、先頃 Makse や Stanley らにより発見された 2 種混合系における Stratification の形成 [1] [2] について実験 [3] し、彼らのモデルを追試験し、その現象の本質を探る。その後多粒子系に拡張した場合の Stratification 形成についての議論を行う [4]。

Table 1		
粉体試料	粒径 (mm)	安息角 (度 ²)
Glass beads	0.1	27
Glass beads	0.4	31
Glass beads	0.8	31
食塩	0.4	38
砂糖	0.8	35
黒砂糖	0.8	36
粉砂糖	0.2	40

これらを使って、Figure 1 のように粉体を降り積もらせる。さてどうなるか。

砂山実験

ここでは砂山の構造形成に着目してみることにする。実際に何をするかというと、小学生のころ蟻の巣の実験に使われたような 5 ミリ間隔で隔てられ、垂直に立てられたアクリル容器を用いてその中で砂山を形成させることを試みる。このとき砂山が形成される動きやそのパターンについてどのように振る舞うか見よう [4]。

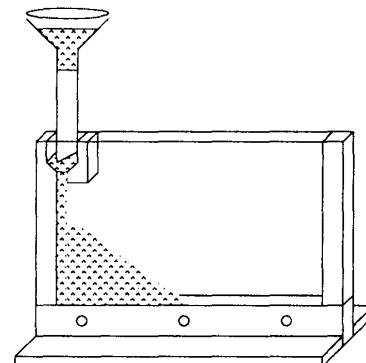


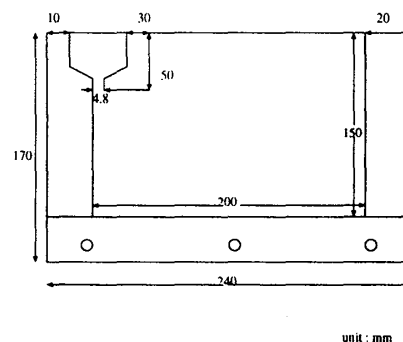
Figure 1: 実験の概念図

実験装置

以下に、作成した実験装置と粉体試料を掲げる。

用意するもの

各種粉体試料、ロート、割箸の入っている紙袋 (おてもと)、スプーン、実験装置、紙コップ、分度器 etc.



Our experimental system consist of a vertical 'quasi-two-dimensional' cell with a gap of 5mm separating two transparent plates.

Figure 2: 実験装置

¹ 現在、数理工学第 7 講座西森研究室に滞在。

² 30 回測定した安息角を平均した値を記載。

Pattern

砂を降り落して形成過程を見るわけであるが唯単に砂をいれるのではなく、大きさや形の違う2種類の粉体を用意しておき、それを混ぜて砂山を形成させることを試みる。このときの振る舞い方を紹介しておこう。

Segregation

Segregation³は、昔から知られていた構造形成パターン [6] [7] [8] [9] [10] で大きさの異なる粉体粒子が分離されながら砂山を形成して行くと言うもの。具体的に言うと大きいほうの粉体粒子が砂山の麓の方で堆積して行き、小さいほうの粉体粒子が峰から麓にかけて堆積していくという振る舞い方を見せる。これらは大きさの違う粉体粒子が混ぜられていたにもかかわらず分離し、それぞれの粉体粒子が独立に砂山を形成していく様な振る舞い方をするので古くから注目を浴びてきた。

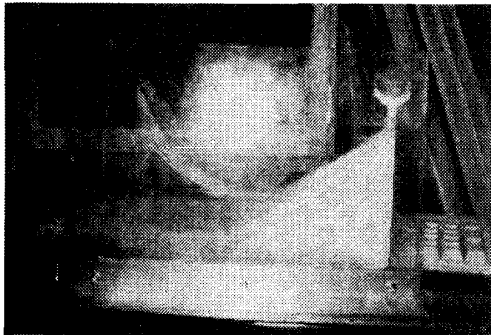


Figure 3: Segregation (写真)

Stratification

最近 Makse らによって Segregation とは違う構造形成をしていく現象が報告された [1] [2]。同様の操作をして砂山を形成していくと今度は segregation せずに層状に堆積いく。このときの構造パターンを Segregation に対して Stratification と彼らは名付けた。Segregation パターンを取るだけでも驚きなのに、そのう例えば Stratification パターンまで取るとなればかなり奇妙で不可解な現象で興味をそそられることだろう。

³Size segregation とは異なるが、ほとんど同種の現象。



Figure 4: Stratification (写真)

モデル

さてこれら2種混合の砂山には2種類のパターンが存在することが明らかになったわけであるが、これらについて理解を深めるために Makse らはあるモデルを提案し、これら2種類のパターンが再現できることを示した [1] [2]。

以下ではそのモデルについて紹介し、実際にモデルの挙動をしらべる。

Local Angle of Repose

まず簡単化するために、粉体粒子を1:2の面積比を持つ正方形と長方形の大きさの粒子とみなし、一点から大きい粒子と小さい粒子をランダムに降り落すことを考える。このとき砂山は斜面を形成しながら堆積して行くのであるから安息角を使ってモデルを立てて行けば良いことに気づく [5]。しかしいまの場合2種類の粉体粒子であるため様な安息角を定義することはできない。そこでどうするのか？

ここで Makse らは局所的な安息角 (Local Angle of Repose) を定義してモデルを拡張していった。以下にその概要を説明していく。

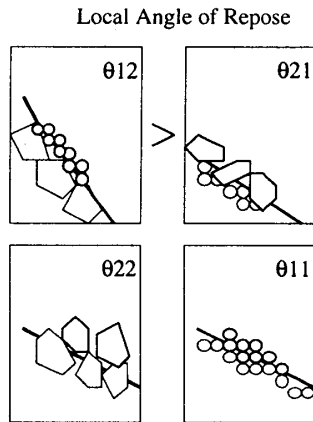


Figure 5: 概念図

まず Figure 5 を見てもらおう。今対象としているのは混合された粒子であるため個々の粒子の安息角だけでは情報不足である。そこで局所的な安息角というものを導入することになる。この場合砂山の表面には2種類の粉体粒子があるため、堆積するパターンが4種類存在することに気づく。この4パターンについて安息角を定義しておこうとするものが局所的な安息角の全容である。

Figure 5 についてもう少し詳しく説明すると、まず1は小さい粉体粒子、2は大きい粉体粒子を表しているものとする。そこで砂山の局所的な表面を見て、1の粒子の下に2の粒子が堆積しているときは θ_{12} 、2の下に1が堆積しているときは θ_{21} 、その他も同様に θ_{11} 、 θ_{22} と安息角を定義することができる。そこで4パターンについての安息角の大小関係を考えると、物理的に

$$\theta_{12} > \theta_{21} \quad (1)$$

となることは明らか。また、

$$\theta_{12} > \theta_{11} \quad , \quad \theta_{12} > \theta_{22} \quad (2)$$

$$\theta_{21} < \theta_{11} \quad , \quad \theta_{21} < \theta_{22} \quad (3)$$

となることも容易に想像できる [18]。そして θ_{11} と θ_{22} の大小関係を考えていくわけであるが、これらは粉体粒子の個々の物性値によって異なるため、測定に依らなければ大小関係は決定できない。

よってこれらを総合して4つのパターンについて大小関係を求めると、次の2通りの関

係が求まる。

$$\theta_{21} < \theta_{11} < \theta_{22} < \theta_{12} \quad (4)$$

$$\theta_{21} < \theta_{22} < \theta_{11} < \theta_{12} \quad (5)$$

これらの大小関係を使って次にモデルのルールについて見ることにする。

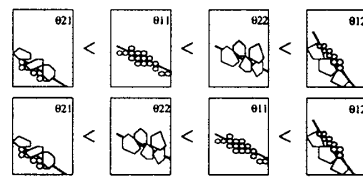


Figure 6: 大小関係の概念図

Roll or Stay Rule

まず2次元格子状の垂直に立てられた容器を用意し、面積比が1:2の正方形と長方形のブロック⁴をランダムに一点から降り落す。そしてブロックが下に着いたら、自分のいる格子のブロックの高さと隣の格子のブロックの高さの差をみて、局所的な安息角より大きければ転がり、小さければ止まりなさい、というルールを与えておく。そのとき転がったら再び同様の操作をし、粒子が止まるまでこの操作を繰り返す。これだけで良い。下にこの概念図を示す。

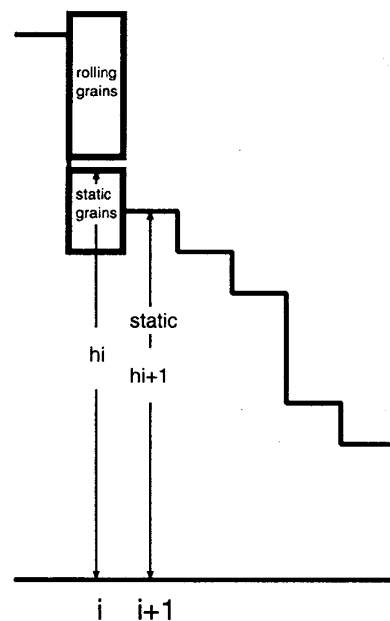


Figure 7:

⁴これはモデルを簡単にするために粒子サイズは任意で良い。

$$h_i - h_{i+1} > \theta_{rs} : roll \quad (6)$$

$$h_i - h_{i+1} < \theta_{rs} : stay \quad (7)$$

これら Local Angle of Repose をコントロールパラメータとしてシミュレーションを行った。

シミュレーション

さて実際に挙動について調べる。

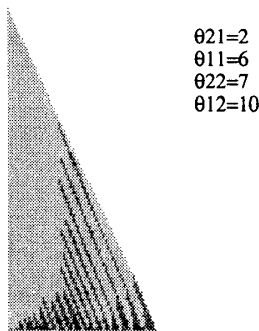


Figure 8: Stratification (4) のとき

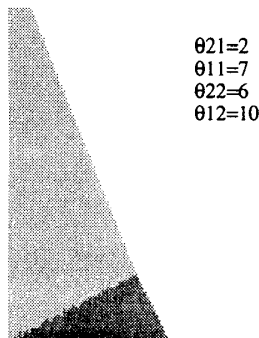


Figure 9: Segregation (5) のとき

驚くべき事に、非常に単純な局所安息角の概念から得られた2種類の関係が Stratification と Segregation を再現している。それでは本当にこれらの関係、つまり大きい粒子の安息角と小さいほうの安息角の大小関係が、Stratification と Segregation に対応しているのか実験結果を再び見直してみよう。Figure 3 の Segregation では 0.4 mm の食塩と 0.8 mm の Glass beads の組み合わせであって、前者の安息角は 38 度°、後者のそれは 31 度°である。また Figure 4 の Stratification の

場合は 0.1 mm の Glass beads と 0.8 mm の黒砂糖で、前者は 27 度°、後者は 36 度°となっていた [4]。

Table 2

角度	Segregation
θ_{11}	食塩 (0.4 mm) 38 度°
θ_{22}	Glass beads(0.8 mm) 31 度°
角度	Stratification
θ_{11}	Glass beads(0.1 mm) 27 度°
θ_{22}	黒砂糖 (0.8 mm) 36 度°

この結果より

$$Stratification \rightarrow \theta_{21} < \theta_{11} < \theta_{22} < \theta_{12} \quad (8)$$

$$Segregation \rightarrow \theta_{21} < \theta_{22} < \theta_{11} < \theta_{12} \quad (9)$$

に対応していたということがこのモデルから明らかになった。

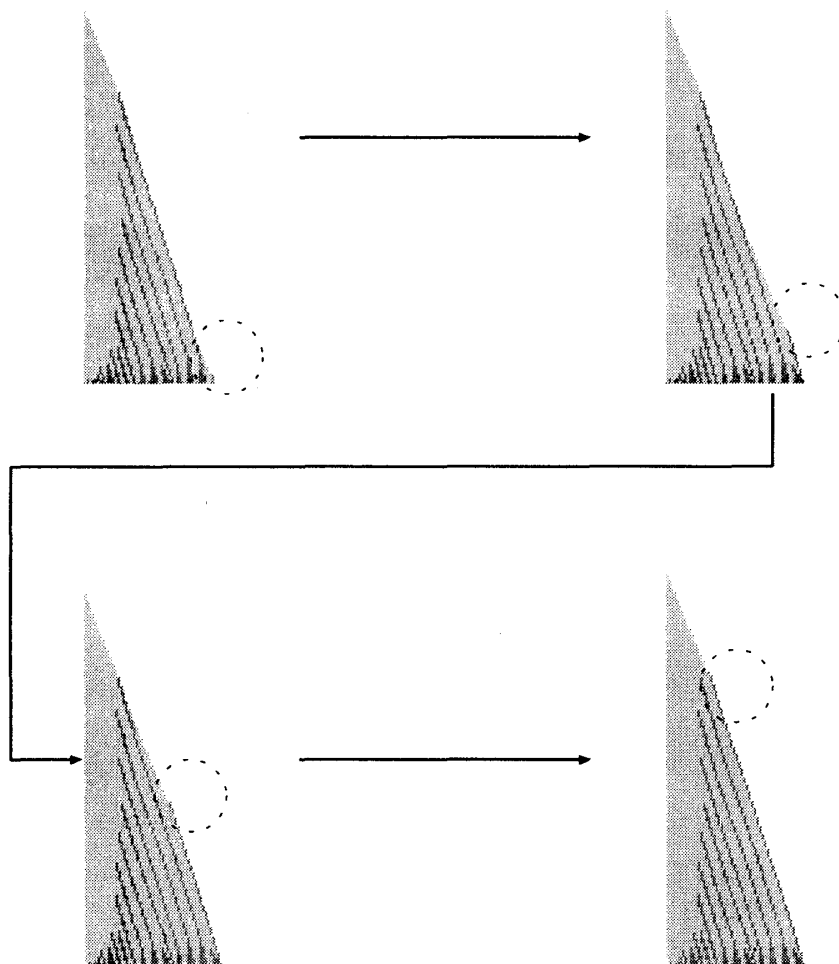
Dynamics

前節では局所的な安息角の大小関係が **Segregation** と **Stratification** に対応するという Makse, Stanley の議論を紹介しその追試実験を行った。この節ではこれらの問題について考えるために粒子個々の動きについて我々独自の方法で調べていった [4]。

Kink

砂山の構造形成過程において **Segregation** と **Stratification** の違いを決める何か決定的な振る舞いの違いはないものだろうか？Makseによると **Stratification** には **Kink** と呼ばれる、粉体粒子の流れとは反対向きに上方へ堆積して行く特徴的振る舞いがある。

Figure 10: Kink (Simulation)



これは先のモデルからも得られていて、この現象は **Segregation** パターンでは見られない。つまりこの **Kink** 構造を詳しく解析していけば **Stratification** の縞の波長ができるメカニズムについて何かわかるのではないか。そこで個々の粉体粒子の振る舞いを調べてみた。

Dynamics of Grains

まず粒子が転がっていた先で止まった位置の高さとその時間⁵について調べてみた [4]。Figure 11 は小さい方の粒子を表し、Figure 12 は大きい方を表している。

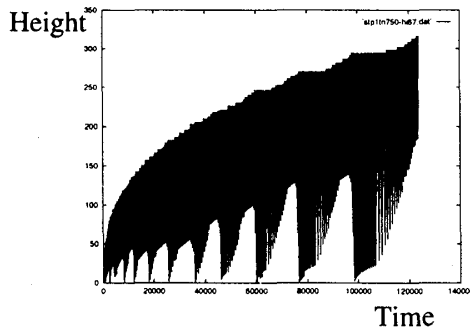


Figure 11 : Small Grains (Stratification)

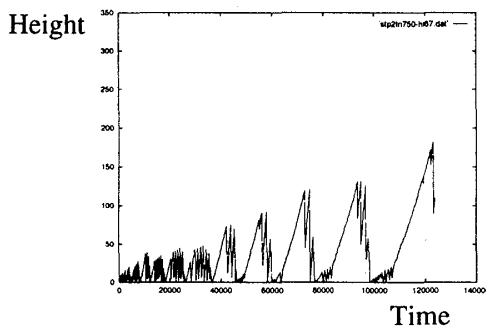


Figure 12 : Large Grains (Stratification)

上の Figure 11 と Figure 12 を重ね合わせると次の Figure 13 のようになる。

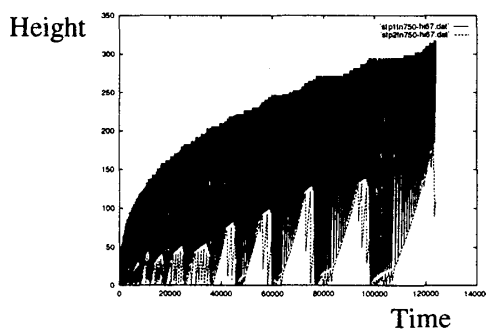


Figure 13 : Small and Large Grains (Stratification)

これより、Stratification では小さい粒子は大きい粒子より下に堆積できないことがわかる。実はこれは Segregation でも同様のことが言えるのであるが、Stratification の場合

⁵緩和に要するステップ数の総和として定義

砂山の峰まで大きい粒子が駆け登る、つまり Kink が存在するので、上方にいく程、小さい粒子が堆積できる範囲が狭められ最後には流量に負けて小さい粒子が大きい粒子の安息角を乗り越えて再び大きい粒子の上に小さい粒子が堆積していく。この繰り返しが層を成し、Stratification 形成していくと考えられる。しかしこの説明にもまだ弱点が多くあって、なぜ Stratification を形成していくとき縞の波長がそろって形成されるのかという点については何も説明できない。この点はまだ未解決の問題なのでこれからの課題となる所だろう。

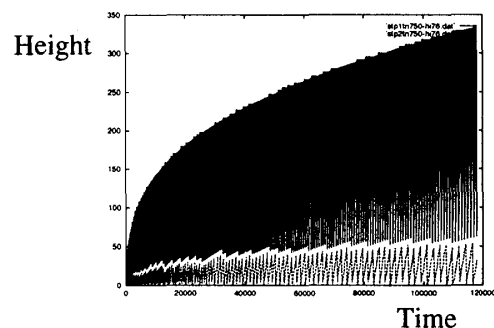


Figure 14 : Small and Large Grains (Segregation)

また Segregation パターンでは上に大きい粉体粒子、下に小さい粒子と分離されるが、いまだに分離の機構はあまり良くわかっていない。これらについて対応する研究で傾斜板上の粉体流があげられるがもともとこれは粉体工学の分野で、混ぜた粉体同士を傾斜をつけたベルトコンベヤーで運び出すときに、サイズの違う粉体粒子が上と下に分離して運び出されてしまうということから研究されたものであるが、この砂山の Segregation も固体的な砂山の斜面を流れていく粉体流と同様に考えることが出来るのではないだろうか。⁶

⁶Drahum, J.A. and Bridgwater, J. The mechanisms of free surface segregation. *Powder Technol.* 36, 39-53 (1983) などを参照されたい。

3 種混合系 [4]

いままでは主に Makse らに従い 2 種混合系を議論して来たが、この節ではこれまでの 2 種混合系を拡張して 3 種混合系を取り扱ってみる [4]。大まかな概念はほぼ 2 種混合系と同等であるが、3 種混合系を考えることで実際にみられる多種混合系での砂山の形成過程を定性的にでも理解していこうとする姿勢である。

3 Grains model

ほとんど 2 種系と同等であるが今度の場合、コントロールパラメータが増えて、6 パターンの安息角の大小関係ができる [4] [18]。

$$\theta_{31} < \theta_{21} < \theta_{32} < \theta_{11} < \theta_{22} < \theta_{33} < \theta_{23} < \theta_{12} < \theta_{13} \quad (10)$$

$$\theta_{31} < \theta_{21} < \theta_{32} < \theta_{11} < \theta_{33} < \theta_{22} < \theta_{23} < \theta_{12} < \theta_{13} \quad (11)$$

$$\theta_{31} < \theta_{21} < \theta_{32} < \theta_{22} < \theta_{11} < \theta_{33} < \theta_{23} < \theta_{12} < \theta_{13} \quad (12)$$

$$\theta_{31} < \theta_{21} < \theta_{32} < \theta_{22} < \theta_{33} < \theta_{11} < \theta_{23} < \theta_{12} < \theta_{13} \quad (13)$$

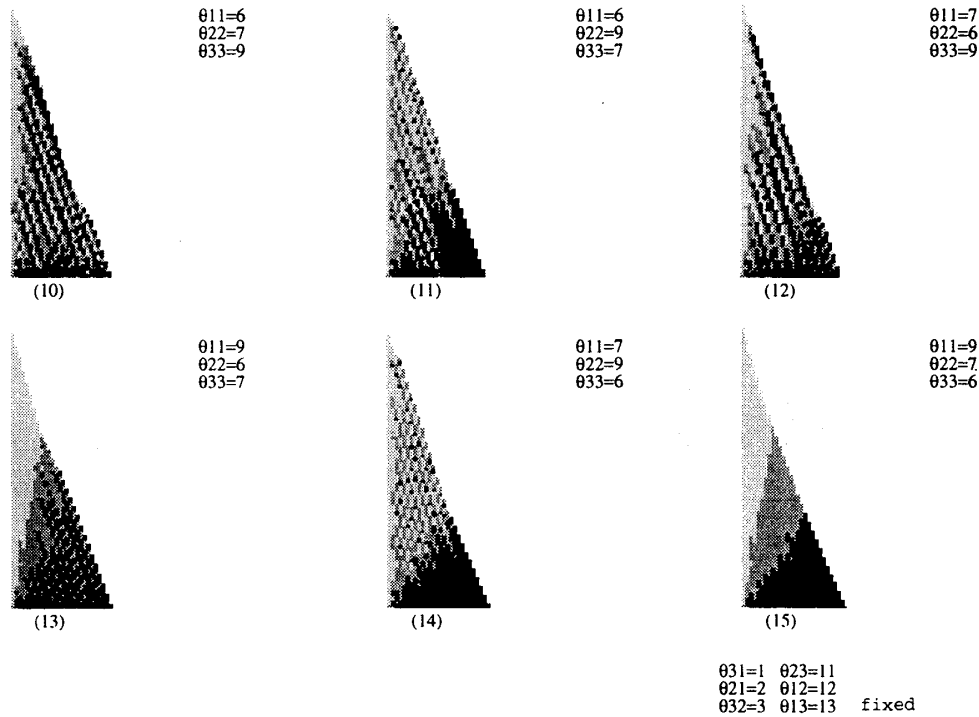
$$\theta_{31} < \theta_{21} < \theta_{32} < \theta_{33} < \theta_{11} < \theta_{22} < \theta_{23} < \theta_{12} < \theta_{13} \quad (14)$$

$$\theta_{31} < \theta_{21} < \theta_{32} < \theta_{33} < \theta_{22} < \theta_{11} < \theta_{23} < \theta_{12} < \theta_{13} \quad (15)$$

シミュレーション

これらの関係はどんなパターンを生み出すのであるか実際にシミュレーションしてみよう。

Figure 15: Pattern of 3 Grains



2 種混合系では、2 パターンの安息角の大小関係が Segregation と Stratification に対応していたことは述べた。では 3 種混合系では 6 パターンの大小関係が得られるわけであるから今度はその 6 パターンに対応する新たな砂山の構造パターンが得られるだろうと考えられる訳であったが、実際にシミュレーションしてみると Figure 15 からわかるように 6 パターンの構造ではなく、4 パターンに分類されてしまった。つまり Figure 15 の上段では 3 つとも Stratification パターンを示し、下段左端では砂山の麓付近にかけて Layer 構造していて、かつ峰と麓で分離構造をする S-stratification と Segregation を合わせ持ったパターン、また下段中央部では先程のパターンと逆になる Stratification と Segregation の混合パターン、最後に下段右端の 3 種とも分離する Segregation パターン、計 4 つの構造パターンである。これらのうちもっとも興味のある下段左端と下段中央のパターンについて見てみよう。下段左端を仮に upper segregation and lower stratification (upper seg.)、また下段中央を upper stratification and lower segregation (lower seg.) と名付けることにする。upper seg. のとき、混ぜ合わされた 3 つの粉体のうち小さい粒子の数密度が他のふたつのものよりも格段に大きくならないとうまくパターンが現れてこない。これは、麓の中大粒子で構成された Stratification に依る Kink が、分離している上方部分まで成長してきて、Segregation 部分を破壊するため。逆に lower seg. はシミュレーションパターンとしては構成されやすく、先で Segregation を壊す原因となった Kink は今度の場合、山の麓から成長せずに中腹部あたりから発生して山頂まで堆積して行き、その後再び中腹部で発生してこれらを繰り返す。つまり Kink は Segregation 部分まで到達しないのでこの場合は Segregation を壊すことなくパターンが形成される。

実験 3 Grains

同様に 3 種系でも実験を試みた [4]。しかしここで注目した構造パターンは先程見られた、upper segregation and lower stratification (upper seg.) と upper stratification and lower segregation (lower seg.) の 2 パターンである。これらについてモデルで得られた Local Angle of Repose の大小関係 (13) と (14) をもとに粉体試料を集めた。

Result

いろいろ粉体試料を集めてみたのではあるが、うまく適合する試料がなかなかみつからず、今のところ upper seg. するパラメータの試料しか見つけることができなかった。lower seg. については次の機会にしたい。ここで実験結果を伝えるわけであるが正直言って満足する結果は得られていない。結果としてはこのとき Stratification パターンが形成される。これは Kink が Segregation 部分を壊して Stratification を形成してしまったことにあると考えられる。粉砂糖を大目に増量して実験を行っても同様の結果となってしまう。おそらく装置のホッパー部分で、それぞれの粉体が一定密度流出していないことも原因のひとつであろうと思う。これらのナイーブな問題はある程度目をつぶらなくてはいけないのでシミュレーションで得られたパターンは実際問題では Stratification に移行すると考えてもいいかもしれない。

pattern	粉体試料 粒径 (mm) 安息角 (度 °)
upper seg.	Glass beads (0.4,31°) < 黒砂糖 (0.8,36°) < 粉砂糖 (0.2,40°)
lower seg.	Glass beads (0.4,31°) < 粉砂糖 (0.2,40°) <

Table 3

まとめ

2 種系でみられる Segregation と Stratification のパターンは局所的な安息角で実現され、Kink が Stratification の縞の波長を選択しているらしいことはわかる。このとき Kink は局所的な安息角の差によって生まれるため縞の波長は一定になるだろうと考えられそうであるがシミュレーションでは縞の波長は対数的に広がって行くことが Herrmann 達からの報告 [11] でわかっていて実験ではこの波長は大体一定に保たれる。つまり波長が一定になるメカニズムについては局所的な安息角だけでは決まらないことになり説明がつかないことになる。これについては議論が必要であろう。また 3 種系においては 6 つの大小関係から 4 つの構造パターンが形成され一部分の大小関係では Stratification に飲み込まれるパターンが発見できた。このほか、Segregation と Stratification の混合パターンの形成も見られ、実験により確認を試みたが失敗に終わってしまった。しかしシミュレーションと実験の結果によりある程度ではあるが多種混合系での砂山形成過程に対する見解が開けたように感じられた。

つまり多種系ではモデルにおいて局所安息角のパラメータの数が多くなるので Stratification パターンが増加し、Segregation パターンは取りにくくなるためほとんどの場合が層状に堆積すると考えられるが、しかしこれは理想化された場合で、実際はホッパーからの流出量の揺らぎや数密度数の揺らぎによりきれいに Stratification するパターンは失われ、微かに縞模様が観察される程度となる。これは普段目にする土や砂、泥そして石などが混ざった砂山のことで、“パターンなど存在しない”と感じられるのは多種系であるからであろう。

このほかに、議論を要する点について言及しておく、大きさだけ違う同種粉体で Segregation と Stratification パターンが形成されるのか、つまり粉体の形状が同様であるときこの 2 つのパターンについてどこまで効いてくるのだろうかという問題や、逆に同サイズで粉体の形状だけが違うときどうなのだろうか、などいろいろと問題が多い。ここで得られた結果はある程度砂山の形成パターンについて説明することはできたが本当の意味での理解とまでは到達していない。まだまだ多くの疑問や問題を残していることは事実である。

Phase diagram

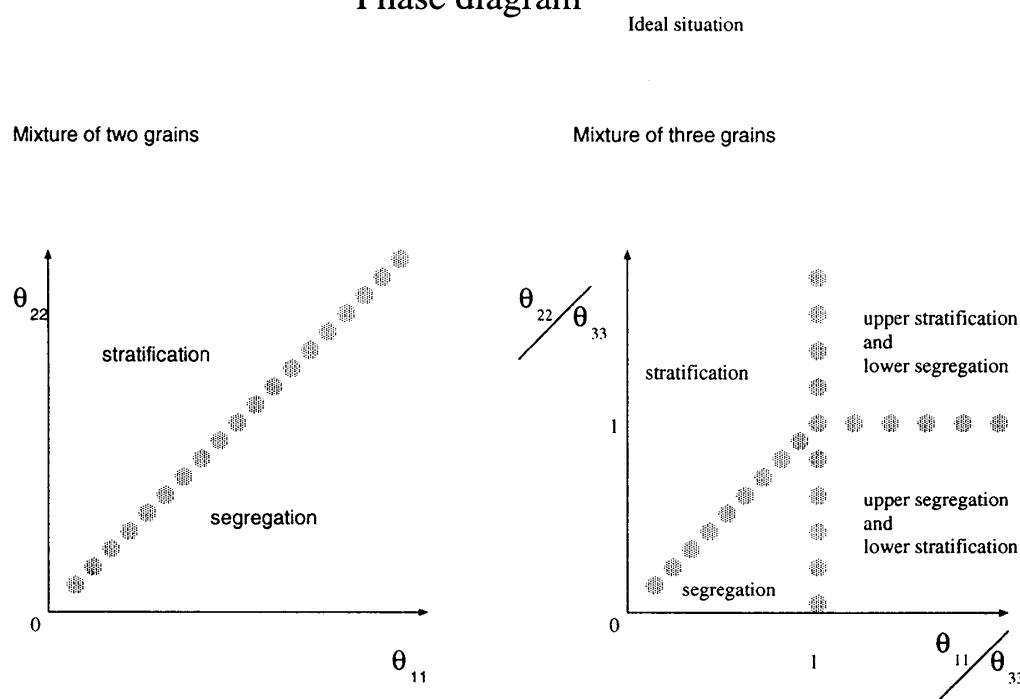


Figure 16: 相図

おわりに

今まで”局所的な安息角”をつかって砂山の形成過程を見てきたが粉体の挙動を知る上でかなり重要で本質的なものであると言える。ではどれほどまで粉体の挙動を再現できるのだろうか？そのような興味のもとで次に大きさの違う2種類の粉体を入れた円筒管の長軸方向を軸として回転させた Rotating cylinder について考えてみた。実は夏の学校ではここまで話を進めたのであるが今回はページ数の都合上、考えていたことを簡単に付け加えるだけにとどめておく。

Rotating cylinder について、Radial segregation から Axial segregation へ偏積現象が変化することが報告されている [13] [14] [15] が、これらについて”局所的な安息角”を使ってどの程度説明できるのだろうか？私のあさはかな直感だと安息角で Axial segregation は説明しづらい。しかし同様の話として北大電子研の上田、小林、柳田らのグループが安息角をつかった方法で3Dのシミュレーションに成功している [16]。つまり安息角で Rotating Cylinder の Axial Segregation が再現できるのである。これにより”局所的な安息角”を使ってもある程度うまく行くことが予想できる。しかしやはり私自身あまり納得していない。だから”局所的な安息角”でどこまで再現できるか、2Dのシミュレーションから出発してみて実際に自分で挙動を追っていかうと考えていた。2Dシミュレーションならおそらく Rotating cylinder で Radial segregation は、砂山のときの Segregation と対応して、再現されるであろう。また逆にそれが見られるなら Stratification 的なパターンも 2D-Rotating cylinder で再現されるに違いない。事実、この手の実験が存在しており Rotating cylinder でも Stratification 的なパターンをとることが知られている [17]。これらを一一つおさえた上で3Dの Rotating cylinder に移っていき、現象の本質となる部分を切り出していこうと考えていた。これらの部分についてはまだまだこれからの課題となるところである。

謝辞

この研究を行うきっかけをいただいた大阪府立大学の西森 拓 氏、また実験を行う上で大変お世話になった茨城大学の佐々木 とく 氏にこの場をお借りして感謝いたします。

そしてこの研究を投稿する機会を与えてくださった「第43回物性若手夏の学校」の久保 敦 さん 並びに準備局の皆さんに感謝するしだいです。ありがとうございました。

参考文献

- [1] Hernan A. Makse, Shlomo Havlin, Peter R. King and H. Eugene Stanley, *nature* no.6623 379 (1997)
- [2] Hernan A. Makse, Pierre Cizeau and H. Eugene Stanley, *Phys. Rev. Lett.* 78 3298 (1997)
- [3] Hernan A. Makse, Robin C. Ball, H. Eugene Stanley and Stephen Warr *Phys. Rev. E* 58 3357 (1997)
- [4] 野口 真保, 茨城大学卒業論文 (1998)
- [5] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. A* 38 364 (1988)
- [6] R. L. Brown, *J. Inst. Fuel* 13 15 (1939)
- [7] R. A. Bagnold, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* 225 49 (1954)
- [8] S. B. Savage and C. K. K. Lun *J. Fluid Mech.* 189 311 (1988)
- [9] P. Meakin *Physica A* 163 733 (1990)
- [10] T. Hwa and M. Kardar, *Phys. Rev. A* 45 7002 (1992)
- [11] J. J. Alonso, J. P. Hovi, and H. J. Herrmann *Phys. Rev. E* 58 672 (1998)
- [12] D. A. Head and G. J. Rodgers *Phys. Rev. E* 56 1976 (1997)

- [13] O.Zik,D.Levine,S.G.Lipson,S.Shtrikman
and J.Stavans *Phy.Rev.Lett.* 73 644
(1994)
- [14] M.Nakagawa et al ,Chemical Engineer-
ing Science Vol 52 No 23 (1997)
- [15] M.Nakagawa ,Private communication
- [16] K.Ueda et al,Private communication
- [17] J.M.N.T.GRAY AND Y.Ć.TAI
Physics of Dry Granular Media NATO
ASI Series ,(1998)
- [18] 局所安息角は粉体粒子間の interaction
をモデル化したもので測定できるかどうか
は議論の分かれる所であるが、ここで
は単一粒子系の場合のみを測定可能な量
と見て定義した。つまり安息角 $\Theta = \theta_{xx}$
とみて、この場合のみ測定できるものと
した。その他のものについては局所安息
角 θ_{rs} の大小関係を定義するとき、それ
ぞれに対して安定度指数 γ_{rs} なる量を与
えて大小関係を定義した。

$$\theta_{rs} \rightarrow \gamma_{rs} = \frac{Size_{static}}{Size_{roll}} \sim \frac{s}{r}$$

粉体粒子の大きさを $Size_{roll}, Size_{static}$
とする。これにより大小関係が
(4), (5), (10), (11), (12), (13), (14), (15)
式となることがわかる。

これ以外に、局所安息角のすべての組合
せをシミュレートした文献もある [12]。
またこのモデルのアルゴリズムでは一度
止まった粒子は再び動き出すことは出来
ないが、実際の実験でも再び動き出す前
に上から堆積してくるので動き出すこと
は少ないと思われる。また流量に関して
もあまり重要なファクターではなく大雑
把に見積もった量で実験しても定性的な
一致が見られるということも興味深い。
ただし Stratification の波長については
流量は多きく効いてくる。ここで一番重
要なことはこれだけ単純化したモデルで
も本質を捉えていて現実と定性的に一致
するということ。