

Einstein 計量と Riemann サブマージョン

東工大理 松沢忠幸 (Tadayuki Matsuzawa)

Hopf ファイブレーションは、その標準的な計量とあわせて、Riemann サブマージョンの典型的な例となっている。他方、その計量は (等質的) Einstein 計量の典型的な例ともなっている。Einstein 計量とサブマージョンとの関連との立場から、以下の結果に注目する。Jensen [4] は Riemann 多様体 $(B, \langle \cdot, \cdot \rangle_B)$ 上の主束 $P(B, G)$ の全空間 P 上に、射影 $\pi: P \rightarrow B$ が Riemann サブマージョンとなるような計量を与え、その計量が Einstein 計量となる条件を考察した: まず、 P 上に接続形式 γ , G 上に両不変計量 $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ を与え、 P 上の計量 $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ ($t > 0$) を

$$\langle E, F \rangle_t \equiv t \langle \gamma E, \gamma F \rangle_G + \langle \pi_* E, \pi_* F \rangle_B$$

と定めて、この計量が Einstein 計量となるような正値 t の存在、非存在を問うた。より具体的には、コンパクト連結 Lie 群 K , その連結閉部分群 H (H は更にその閉正規部分群 H_1, H_2 の直積と局所的に同型となっているとする) をとり、 $P = K/H_2$, $B = K/H$, $G = H_1$, 又接続形式としては K 上に H_1, H_2 の Lie 環が直交するような両不変計量を与えて H_1 の Lie 環への射

影から P 上に自然に定まる K 不変接続をとって、議論する。

こうして奇数次元球面 S^{4n+3} や Stiefel 多様体上に標準的でない Einstein 計量が見出された。

2, Ziller [8] は、球面や射影空間に等質的に作用する群の分類を利用して、これらの空間上の等質的 Einstein 計量を決定した。そして複素奇数次元射影空間 $\mathbb{C}P^{2n+1}$ 上に標準的でない Einstein 計量が見出されたのであるが、この計量は次のファイブレーション $S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^{2n+1} \rightarrow \mathbb{H}P^n$ と密接に関連している。

これらの構成を、Riemann サブマージョンの立場から見て、等質性の仮定なしで、以下に述べる定理を得た： $\pi: M \rightarrow B$ を Riemann サブマージョンとする。全空間 $(M, \langle, \rangle)$ は連結、完備、各ファイバー $\pi^{-1}(b)$ ($b \in B$) は全測地的であると仮定する。このとき、Hermann [3] によれば、各ファイバーは互いに等長的であるので、例えば「ファイバーの Ricci テンソル」のような言葉使いに興味がある。今、全空間 $(M, \langle, \rangle_M)$ 、底空間 $(B, \langle, \rangle_B)$ 、及び各ファイバー $(\pi^{-1}(b), \langle, \rangle_F)$ は Einstein 計量をもつとする。従って各空間の Ricci テンソルは、適当な定数 $\lambda^M, \lambda^B, \lambda^F$ をとって、

$$\text{Ric}^M = \lambda^M \langle, \rangle_M, \quad \text{Ric}^B = \lambda^B \langle, \rangle_B,$$

$$\text{Ric}^F = \lambda^F \langle, \rangle_F$$

と書ける。以上の仮定のもとで、

定理 ([6]) $t = \lambda^F / (\lambda^B - \lambda^F)$ の値が正値かつ 1 ではないとすると、値 t に対応する全空間の計量のファイバー方向への相似変形 $\langle, \rangle_t$ は、全空間に今の Einstein 計量を与える。

ここで、正値 t に対応するファイバー方向への相似変形とは、次の様にして定まる Riemann サブメーションに「自然」な計量の変形である (Berard Bergery and Bourguignon [] を見よ): M の接空間に於いて、垂直方向 (ファイバーに接する方向)、水平方向 (垂直方向と直交する方向) への射影をそれぞれ $\mathcal{V}$, $\mathcal{H}$ とする。このとき M 上の新しい計量 $\langle, \rangle_t$ を、

$$\langle E, F \rangle_t \equiv t \langle \mathcal{V}E, \mathcal{V}F \rangle + \langle \mathcal{H}E, \mathcal{H}F \rangle \quad (E, F \in T_m M)$$

で定める。

略証明 O'Neill [7] による曲率テンソルの公式によって、計量 $\langle, \rangle_t$ の Ricci テンソルを計算してみると、

$$\text{Ric}^t_{VW} = (\lambda^F/t + t(\lambda^M - \lambda^F)) \langle V, W \rangle_t$$

$$\text{Ric}^t_{VX} = 0$$

$$\text{Ric}^t_{XY} = (\lambda^B + t(\lambda^M - \lambda^B)) \langle X, Y \rangle_t$$

となる。ここで V, W は垂直方向、 X, Y は水平方向のベクトルである。従って $\langle, \rangle_t$ が Einstein 計量を与えるならば t は 2 次方程式

$$\lambda^F/t + t(\lambda^M - \lambda^F) = \lambda^B + t(\lambda^M - \lambda^B)$$

を満たさねばならない。この方程式の解の一方は 1, 他方が定理に述べた値である。(証明終)

以下若干の計算例を与える。残念ながら、新しい Einstein 計量の例を与えることができないので、ここではよく知られた例を再確認するにとどめる。

i) $S^3 \rightarrow S^{2n+3} \rightarrow \mathbb{H}P^n$: $\lambda^B = 4(n+2)$, $\lambda^F = 2$, 従って $t = 1/(2n+3)$ 。これは Jensen [4] の例である。

ii) $S^7 \rightarrow S^{15} \rightarrow S^8(4)$: 底空間は定曲率 4 の空間形であるから $\lambda^B = 28$, $\lambda^F = 6$ 。従って $t = 3/11$ 。これは Bourguignon-Karcher [2] の例である。

Ziller [8] によれば、球面上の等質的 Einstein 計量は、標準的なものの他 i) 及び ii) でつづいている。他方 i) 及び ii) の Einstein 計量はそれぞれ $\mathbb{H}P^{n+1}$, $\mathbb{C}aP^2$ の距離球(測地球面)として実現されている: Bourguignon-Karcher [2]。類似の事——部分多様体としての実現——は Jensen [4] の与えた、他の Einstein 計量についても成立する場合がある: Jensen [5] を見よ。

iii) $S^2(4) \rightarrow \mathbb{C}P^{2n+1} \rightarrow \mathbb{H}P^n$: $\lambda^B = 4(n+2)$, ファイバーは定曲率 4 の空間形であるから $\lambda^F = 4$, 従って $t = 1/(n+1)$ 。これは Ziller [8] の例である。

再び、Ziller によれば、射影空間 $\mathbb{K}P^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{C}a$) 上の等

質的 Einstein 計量は, 標準的なものの他 iii) によって決まっている。

文 献

- [1] Berard Bergery L. and Bourguignon J. P. : Laplacian and Riemannian submersions with totally geodesic fibres.
Lecture Notes in Math. 838, 30-35 (1981)
- [2] Bourguignon J. P. and Karcher H. : Curvature operators : Pinching estimates and geometric examples. Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4^e série, t. 11 71-92 (1978)
- [3] Hermann R. : A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds be a fibre bundle. Proc. Amer. Math. Soc. 11, 236-242 (1960)
- [4] Jensen G. R. : Einstein metrics on principal fibre bundles. J. Diff. Geom. 8, 599-614 (1973)
- [5] " : Imbeddings of Stiefel manifolds into Grassmannians. Duke Math. J. Vol 42 397-407 (1975)
- [6] Matsuzawa T. : Einstein metrics and fibred Riemannian structures. to appear.
- [7] O'Neill B. : The fundamental equations of a submersion. Michigan Math. J. 13, 459-469 (1966)
- [8] Ziller W. : Homogeneous Einstein metrics on spheres and projective spaces. Math. Ann. 259, 351-358 (1982)