

DS II 方程式で小振幅周期ソリトンが関わる共鳴相互作用

近畿大学・理工学総合研究所 新居 毅人 (Takahito Arai)

Research Institute for Science and Technology,
Kinki University

大阪府立大学 田尻 昌義 (Masayoshi Tajiri)

Osaka Prefecture University

概要

DS II 方程式において, 非常に小さな振幅にもかかわらず, 有限振幅の周期ソリトンと共鳴する小振幅周期ソリトンが存在する. このような共鳴は, 2 周期ソリトン解のパラメータ空間内で, 共鳴条件を満たす面と長距離相互作用の条件を満たす面が交わる線の近傍のパラメータを持つソリトン間にあらわれる. また, 2 つの有限振幅の周期ソリトン間に小振幅周期ソリトンをメッセンジャーとする長距離相互作用が存在する. どちらの相互作用も, その現象はパラメータの少しの変化に対して敏感に変わる.

1 はじめに

弱非線形深水波列は長い変調攪乱に対して不安定であることが知られている. その 2 次元波束の時間発展は Davey-Stewartson (DS) 方程式

$$\begin{cases} iu_t + pu_{xx} + u_{yy} + r|u|^2u - 2uv = 0, \\ v_{xx} - pv_{yy} - r(|u|^2)_{xx} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

によって記述される [1]. ここで, $p = \pm 1$ であり, $p = 1$ の場合は DS I, $p = -1$ の場合は DS II 方程式と呼ばれている. 昨年の研究集会では, DS I 及び KP I 方程式に注目し, (i) 周期ソリトン解は, パラメータ空間において解が regular から singular になる境界面近傍のパラメータでは line ソリトンに似た構造になる (このソリトンを quasi-line ソリトンと呼ぶ), また, 境界面上のパラメータを持つ解は line ソリトンと見なすことができること, (ii) このような 2 つの quasi-line ソリトン間の相互作用を調べたところ, 2 つの line ソリトン間の相互作用では存在しない様な共鳴相互作用が存在すること, またパラメータの少しの変化に対して現象が敏感に変わる領域が存在すること, などを示した [2]. 一方, DS II 方程式は $r > 0$ の場合, 周期ソリトン解および代数ソリトン解は存在するが, line ソリトン解は存在しない [3]. また, 周期ソリトン解はそのパラメータ空間において, DS I 及び KP I 方程式の場合は解が singular となる領域が存在するが, DS II 方程式の場合はすべての領域で解は regular となる. そこで, 本研究では DS II 方程式に注目し,

- (i) 周期ソリトンはある種の極限に対してその振幅が無限小となること,
- (ii) 周期ソリトン間の相互作用を考えると, この小振幅な周期ソリトンが関わる興味深い特異な相互作用が存在すること,

を報告する.

2 小振幅周期ソリトン

波数 $(\alpha + i\beta, \gamma + i\delta)$ の DS II 方程式の周期ソリトン解は次式で与えられることはよく知られている [3, 4].

$$u = u_0 e^{i(\zeta + \phi_r)} \frac{\cosh(\xi + i\phi_r) + \frac{1}{\sqrt{M}} \cos(\eta + i\phi_i)}{\cosh \xi + \frac{1}{\sqrt{M}} \cos \eta}, \quad (2)$$

$$v = 2 \frac{\alpha^2 - \frac{\beta^2}{M} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{M}} \cosh \xi \cos \eta + \frac{2\alpha\beta}{\sqrt{M}} \sinh \xi \sin \eta}{\left(\cosh \xi + \frac{1}{\sqrt{M}} \cos \eta\right)^2}. \quad (3)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \zeta &= kx + ly - \omega t + \zeta_0, & \xi &= \alpha x + \gamma y - \Omega_r t + \xi^0, \\ \eta &= \beta x + \delta y - \Omega_i t + \eta^0, & \omega &= k^2 + l^2 - ru_0^2, \\ \sin^2 \frac{\phi}{2} &= -\frac{(\alpha + i\beta)^2 + (\gamma + i\delta)^2}{2ru_0^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Omega_r + i\Omega_i = -2k(\alpha + i\beta) + 2l(\gamma + i\delta) + \{(\alpha + i\beta)^2 - (\gamma + i\delta)^2\} \cot \frac{\phi}{2}, \quad (5)$$

$$M = \frac{2ru_0^2 \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\phi^*}{2} \cos \frac{\phi - \phi^*}{2} + \{(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) + (\gamma + i\delta)(\gamma - i\delta)\}}{2ru_0^2 \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\phi^*}{2} \cos \frac{\phi + \phi^*}{2} + \{(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) + (\gamma + i\delta)(\gamma - i\delta)\}}. \quad (6)$$

(4) 式を考慮に入れ, 波数 $(\alpha + i\beta, \gamma + i\delta)$ を $\phi (= \phi_r + i\phi_i)$ と新しいパラメーター $\theta (= \theta_r + i\theta_i)$ を用いて

$$\begin{cases} \alpha + i\beta = i\sqrt{2ru_0^2} \sin \frac{\phi}{2} \cos \theta, \\ \gamma + i\delta = i\sqrt{2ru_0^2} \sin \frac{\phi}{2} \sin \theta, \end{cases} \quad (7)$$

と表す. このとき, (6) 式は

$$M = \frac{\cosh \phi_i + \cosh 2\theta_i}{\cos \phi_r + \cosh 2\theta_i}, \quad (8)$$

と書き直される. (8) 式より, すべてのパラメーターに対して $M > 1$ となるので, DS II 方程式の周期ソリトン解はパラメーター空間においてすべての領域で regular であることがわかる. また, 相互作用の係数 M は $\cos \phi_r + \cosh 2\theta_i \rightarrow +0$ に対して, $M \rightarrow \infty$ となる. そこで, パラメーターが $\cos \phi_r + \cosh 2\theta_i = 0$ を満足する, つまり,

$$\phi_r = (2n + 1)\pi, \quad \theta_i = 0, \quad (9)$$

のときの周期ソリトンについて考える。(9) 式を (7) 式および (5) 式に代入して,

$$\begin{cases} \alpha = \gamma = 0, \\ \beta = \beta_0 = \sqrt{2ru_0^2} \cosh \frac{\phi_i}{2} \cos \theta_r, \\ \delta = \delta_0 = \sqrt{2ru_0^2} \cosh \frac{\phi_i}{2} \sin \theta_r, \end{cases} \quad (10)$$

および

$$\begin{cases} \Omega_r = 0, \\ \Omega_i = \Omega_{i0} = -2k\beta_0 + 2l\delta_0 + (\beta_0^2 - \delta_0^2) \tanh \frac{\phi_i}{2}, \end{cases} \quad (11)$$

周期ソリトン解 (2) 式および (3) 式は,

$$u = u_0 e^{i\zeta}, \quad v = 0. \quad (12)$$

となる。つまり, (9) 式を満足するパラメータを持つ周期ソリトンは, 波数および振動数の虚数成分は有限の値であるが実数成分は 0 となり, 周期ソリトンの振幅も 0 となり消えてなくなることがわかる。そこで, (9) 式で与えられるパラメータ近傍のパラメータについて考える。 ϕ_r および θ_i を

$$\phi_r = (2n+1)\pi + 2\bar{\varepsilon}_1, \quad \theta_i = \bar{\varepsilon}_2, \quad (13)$$

のようにとると, 相互作用の係数 M は,

$$M = \frac{1 + \cosh \phi_i}{2(\bar{\varepsilon}_1^2 + \bar{\varepsilon}_2^2)} \sim O\left(\frac{1}{\bar{\varepsilon}^2}\right), \quad (14)$$

となり, 波数および振動数はそれぞれ,

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{2ru_0^2} \left\{ \bar{\varepsilon}_2 \cosh \frac{\phi_i}{2} \sin \theta_r + \bar{\varepsilon}_1 \sinh \frac{\phi_i}{2} \cos \theta_r + O(\bar{\varepsilon}^3) \right\}, \\ \gamma = \sqrt{2ru_0^2} \left\{ \bar{\varepsilon}_1 \sinh \frac{\phi_i}{2} \sin \theta_r - \bar{\varepsilon}_2 \cosh \frac{\phi_i}{2} \cos \theta_r + O(\bar{\varepsilon}^3) \right\}, \\ \beta = \beta_0 - \sqrt{2ru_0^2} \left\{ \bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2 \sinh \frac{\phi_i}{2} \sin \theta_r + \frac{\bar{\varepsilon}_1^2 - \bar{\varepsilon}_2^2}{2} \cosh \frac{\phi_i}{2} \cos \theta_r + O(\bar{\varepsilon}^3) \right\}, \\ \delta = \delta_0 + \sqrt{2ru_0^2} \left\{ \bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2 \sinh \frac{\phi_i}{2} \cos \theta_r - \frac{\bar{\varepsilon}_1^2 - \bar{\varepsilon}_2^2}{2} \cosh \frac{\phi_i}{2} \sin \theta_r + O(\bar{\varepsilon}^3) \right\}, \end{cases} \quad (15)$$

および

$$\begin{cases} \Omega_r = -2k\alpha + 2l\gamma + 2(\alpha\beta_0 - \gamma\delta_0) \tanh \frac{\phi_i}{2} + \bar{\varepsilon}_1(\beta_0^2 - \delta_0^2) \operatorname{sech}^2 \frac{\phi_i}{2} + O(\bar{\varepsilon}^3), \\ \Omega_i = \Omega_{i0} + O(\bar{\varepsilon}^2), \end{cases} \quad (16)$$

となる。また, 周期ソリトン解は,

$$u = u_0 e^{i(\zeta + 2\bar{\varepsilon}_1)} \left\{ 1 - \frac{2 \cosh^2 \frac{\phi_i}{2}}{\sqrt{M}} \operatorname{sech} \xi \cos \eta + i \left(2\bar{\varepsilon}_1 \tanh \xi + \frac{\sinh \phi_i}{\sqrt{M}} \operatorname{sech} \xi \sin \eta \right) + O(\bar{\varepsilon}^2) \right\}, \quad (17)$$

$$v = -2 \frac{\beta^2}{\sqrt{M}} \operatorname{sech} \xi \cos \eta + O(\bar{\varepsilon}^2), \quad (18)$$

となる。このことより, 周期ソリトンは $M \rightarrow \infty$ に対して, その振幅が無限小となることがわかる。以下, これを小振幅周期ソリトンと呼ぶ。

3 小振幅周期ソリトンが関わる相互作用

DS II 方程式の 2 周期ソリトン解は Satsuma と Ablowitz の解より次のように導ける [3, 4].

$$u = \frac{g}{f}, \quad v = 2(\ln f)_{xx},$$

ここで,

$$\begin{aligned} f = & 1 + \frac{M_1}{4}e^{2\xi_1} + \frac{M_2}{4}e^{2\xi_2} + \frac{M_1M_2L_1^2L_2^2}{16}e^{2(\xi_1+\xi_2)} \\ & + e^{\xi_1} \left\{ \cos \eta_1 + \frac{M_2L_1L_2}{4}e^{2\xi_2} \cos(\eta_1 + \varphi_1 + \varphi_2) \right\} \\ & + e^{\xi_2} \left\{ \cos \eta_2 + \frac{M_1L_1L_2}{4}e^{2\xi_1} \cos(\eta_2 + \varphi_1 - \varphi_2) \right\} \\ & + \frac{1}{2}e^{\xi_1+\xi_2} \{L_1 \cos(\eta_1 + \eta_2 + \varphi_1) + L_2 \cos(\eta_1 - \eta_2 + \varphi_2)\}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$g = u_0 e^{i\zeta} f(\xi_1 + i\phi_{1r}, \xi_2 + i\phi_{2r}, \eta_1 + i\phi_{1i}, \eta_2 + i\phi_{2i}), \quad (20)$$

また,

$$\begin{aligned} \xi_j &= \alpha_j x + \gamma_j y - \Omega_{jr} t + \xi_j^0, \\ \eta_j &= \beta_j x + \delta_j y - \Omega_{ji} t + \eta_j^0, \\ \sin^2 \frac{\phi_{jr} + i\phi_{ji}}{2} &= -\frac{(\alpha_j + i\beta_j)^2 + (\gamma_j + i\delta_j)^2}{2ru_0^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{jr} + i\Omega_{ji} &= -2k(\alpha_j + i\beta_j) + 2l(\gamma_j + i\delta_j) \\ &+ \{(\alpha_j + i\beta_j)^2 - (\gamma_j + i\delta_j)^2\} \cot \frac{\phi_{jr} + i\phi_{ji}}{2}, \quad (j = 1, 2). \end{aligned} \quad (22)$$

波数 $(\alpha_j + i\beta_j, \gamma_j + i\delta_j)$ を $\phi_j (= \phi_{jr} + i\phi_{ji})$ と新しいパラメータ $\theta_j (= \theta_{jr} + i\theta_{ji})$ を用いて

$$\begin{cases} \alpha_j + i\beta_j = i\sqrt{2ru_0^2} \sin \frac{\phi_j}{2} \cos \theta_j, \\ \gamma_j + i\delta_j = i\sqrt{2ru_0^2} \sin \frac{\phi_j}{2} \sin \theta_j, \end{cases} \quad (23)$$

と表すと, 相互作用の係数 M_j および $L_j e^{i\varphi_j}$ はそれぞれ次のようになる.

$$M_j = \frac{\cosh \phi_{ji} + \cosh 2\theta_{ji}}{\cos \phi_{jr} + \cosh 2\theta_{ji}}, \quad (24)$$

$$L_1 e^{i\varphi_1} = \frac{\cos \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} - \cos(\theta_1 - \theta_2)}{\cos \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} - \cos(\theta_1 - \theta_2)}, \quad (25)$$

$$L_2 e^{i\varphi_2} = \frac{\cos \frac{\phi_1 - \phi_2^*}{2} + \cos(\theta_1 - \theta_2^*)}{\cos \frac{\phi_1 + \phi_2^*}{2} + \cos(\theta_1 - \theta_2^*)}. \quad (26)$$

2つのソリトンが特異な相互作用をするための条件は $|L_1 L_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}| \rightarrow \infty$ または $|L_1 L_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}| \rightarrow 0$ で与えられる [3]. 以下, $|L_1 L_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}| \rightarrow \infty$ を共鳴条件, $|L_1 L_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}| \rightarrow 0$ を長距離相互作用の条件と呼ぶ. それぞれの条件は, (25) 式および (26) 式の (分母 = 0) または (分子 = 0) とすることにより得られ, それぞれ次のようになる.

- $|L_1 L_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}| \rightarrow \infty$ となる場合

$$\theta_{2r} = \theta_{1r} \pm \frac{\phi_{1r} + \phi_{2r}}{2} + 2n_1\pi, \quad (27a)$$

$$\theta_{2i} = \theta_{1i} \pm \frac{\phi_{1i} + \phi_{2i}}{2}, \quad (27b)$$

または,

$$\theta_{2r} = \theta_{1r} \pm \frac{\phi_{1r} + \phi_{2r}}{2} + (2n_2 + 1)\pi, \quad (28a)$$

$$\theta_{2i} = -\theta_{1i} \mp \frac{\phi_{1i} - \phi_{2i}}{2}, \quad (28b)$$

- $|L_1 L_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}| \rightarrow 0$ となる場合

$$\theta_{2r} = \theta_{1r} \pm \frac{\phi_{1r} - \phi_{2r}}{2} + 2n_3\pi, \quad (29a)$$

$$\theta_{2i} = \theta_{1i} \pm \frac{\phi_{1i} - \phi_{2i}}{2}, \quad (29b)$$

または,

$$\theta_{2r} = \theta_{1r} \pm \frac{\phi_{1r} - \phi_{2r}}{2} + (2n_4 + 1)\pi, \quad (30a)$$

$$\theta_{2i} = -\theta_{1i} \mp \frac{\phi_{1i} + \phi_{2i}}{2}. \quad (30b)$$

$$(n_1, n_2, n_3, n_4 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ここで、各連立方程式の中は複合同順で、式番号の付帯文字 (a), (b) の条件をそれぞれ第一条件、第二条件と呼ぶことにする。各条件式は連立方程式のように見えるが、お互いのパラメーターは入り混じっておらず、互いに独立な式である事に注意する。

図 1 (a) は第二条件に対するパラメーター空間を θ_{1i} , ϕ_{1i} を固定して切った断面図、図 1 (b) は第一条件に対するパラメーター空間を θ_{1r} , ϕ_{1r} を固定して切った断面図である。直線 r 上では共鳴条件、 l 上では長距離相互作用の条件が満足される。大変興味深いのは、図 1 (a) の $S_1, S_2, \dots$ 点では直線 r と l が交わっていることである。これは、共鳴条件と長距離相互作用の条件の第一条件が共にこの点の上で満足していることを表している。よって、それぞれに対応する第一条件も満足するパラメーターに対しては L_1/L_2 の値は $0/0$ の不定形となり、その計算は慎重を要する。そこで、まずは S_1 点近傍のパラメーターを持つ 2 つの周期ソリトン間の相互作用について考える。次に、図 1 (a) の $L_1, L_2, \dots$ 点に注目すると 2 つの直線 l が交差していることがわかる。よって、 L 点近傍のパラメーターでは $L_1 L_2$ の値は急激に 0 に近づき、これらのパラメーターを持つ 2 つの周期ソリトン間の相互作用は長距離相互作用 (Super long-range interaction) となることが考えられる。しかし、 L_1 と L_2 の大小関係により、2 つの周期ソリトンが長距離相互作用をする際に媒介とするソリトン (メッセンジャーソリトン) の波数の虚数成分が異なる。そこで、 L_1 点近傍のパラメーターを持つ 2 つの周期ソリトン間の相互作用についてもより詳細に調べる。

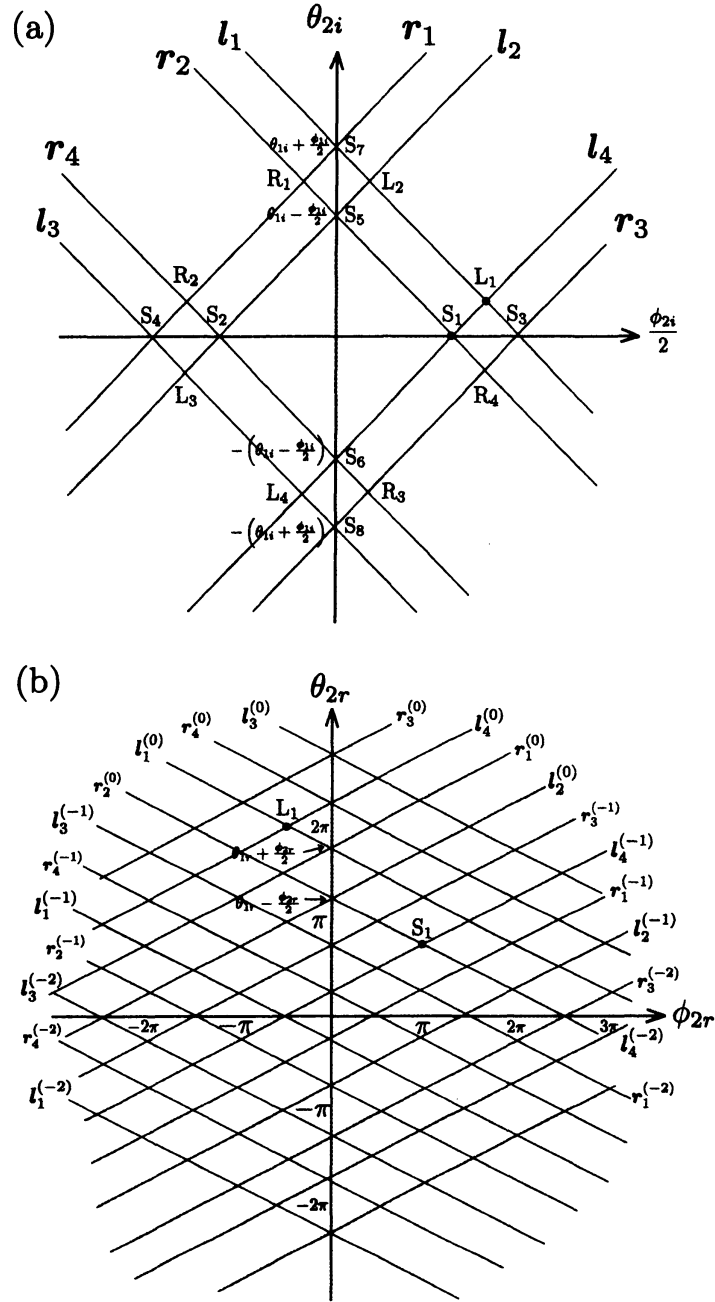


図 1: (a) 2つの周期ソリトンが特異な相互作用するための第二条件に対するパラメーター空間 $(\phi_{1i}, \phi_{2i}, \theta_{1i}, \theta_{2i})$ を θ_{1i} , ϕ_{1i} を固定して切った断面図. (b) 2つの周期ソリトンが特異な相互作用するための第一条件に対するパラメーター空間 $(\phi_{1r}, \phi_{2r}, \theta_{1r}, \theta_{2r})$ を θ_{1r} , ϕ_{1r} を固定して切った断面図.

3.1 S_1 点近傍のパラメーターを持つ2つの周期ソリトンの相互作用

まず, S_1 点近傍のパラメーターを持つ2つの周期ソリトン間の相互作用について考える. 直線 r_2 は (27) 式の下符号で, 直線 L_4 は (30) 式の下符号で与えられるので, それぞれの連立方程式を解くことにより S_1 点でのパラメーターが得られる. 今, 添字1のパラメーターを持つ周期ソリトンを第一ソリトンと呼び, そのパラメーターを $\phi_{1r} = \Phi$, $\phi_{1i} = \Psi$, $\theta_{1r} = \Theta$ および $\theta_{1i} = \Lambda$ と固定する. これに対して, 添字2のパラメーターを持つ周期ソリトン (以下第二ソリトンと呼ぶ) のパラメーターは, $n_1 = 0$ および $n_4 = -1$ とすると,

$$\phi_{2r} = \pi, \quad \phi_{2i} = 2\Lambda - \Psi, \quad \theta_{2r} = \Theta - \frac{\Phi + \pi}{2}, \quad \theta_{2i} = 0, \quad (31)$$

となる. (31) 式の ϕ_{2r} と θ_{2i} の値は (9) 式と等しくなり, S_1 点近傍のパラメーターに対して第二ソリトンは小振幅周期ソリトンとなることがわかる. さらに, (31) 式を (23) 式に代入することにより, 第二ソリトンの波数は,

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0, \\ \gamma_2 = 0, \\ \beta_2 = \sqrt{2ru_0^2} \sin\left(\Theta - \frac{\Phi}{2}\right) \cosh\left(\Lambda - \frac{\Psi}{2}\right), \\ \delta_2 = -\sqrt{2ru_0^2} \cos\left(\Theta - \frac{\Phi}{2}\right) \cosh\left(\Lambda - \frac{\Psi}{2}\right), \end{cases} \quad (32)$$

さらに (32) 式の β_2 および δ_2 は,

$$\begin{cases} \beta_2 = -\beta_1 + \sqrt{2ru_0^2} \left\{ \cos \frac{\Phi}{2} \sin \Theta \cosh \frac{\Psi}{2} \cosh \Lambda + \sin \frac{\Phi}{2} \cos \Theta \sinh \frac{\Psi}{2} \sinh \Lambda \right\}, \\ \delta_2 = -\delta_1 - \sqrt{2ru_0^2} \left\{ \cos \frac{\Phi}{2} \cos \Theta \cosh \frac{\Psi}{2} \cosh \Lambda - \sin \frac{\Phi}{2} \sin \Theta \sinh \frac{\Psi}{2} \sinh \Lambda \right\}, \end{cases} \quad (33)$$

と書き表される. そして, (21) 式および (33) 式を用いて, 次の関係式が得られる.

$$\sin^2 \left\{ \frac{\Phi \pm \pi + i[\Psi + (2\Lambda - \Psi)]}{2} \right\} = -\frac{\{\alpha_1 + i(\beta_1 + \beta_2)\}^2 + \{\gamma_1 + i(\delta_1 + \delta_2)\}^2}{2ru_0^2}. \quad (34)$$

これは, 共鳴したソリトンの, または長距離相互作用の際のメッセンジャーソリトンの分散関係式と一致しており, このことより S_1 点近傍のパラメーターを持つ周期ソリトンと小振幅周期ソリトン間には共鳴相互作用や長距離相互作用などの特異な相互作用が存在するのではないかと予想される. そこで, パラメーターを以下のようにとる.

$$\begin{aligned} \phi_{1r} &= \Phi, & \phi_{2r} &= \pi + 2\varepsilon_1, \\ \phi_{1i} &= \Psi, & \phi_{2i} &= 2\Lambda - \Psi + 2\varepsilon_2, \\ \theta_{1r} &= \Theta, & \theta_{2r} &= \Theta - \frac{\Phi + \pi}{2} + \varepsilon_3, \\ \theta_{1i} &= \Lambda, & \theta_{2i} &= \varepsilon_4. \end{aligned} \quad (35)$$

また, $O(\varepsilon_1) \sim O(\varepsilon_2) \sim O(\varepsilon_3) \sim O(\varepsilon_4) \sim O(\varepsilon)$ および $|\varepsilon| \ll 1$ を仮定する. (35) 式を (24) 式, (25) 式および (26) 式に代入することにより, M_2 , $L_1 e^{i\varphi_1}$ および $L_2 e^{i\varphi_2}$ は次のように近似される.

$$M_2 = \frac{1 + \cosh(2\Lambda - \Psi)}{2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_4^2)}, \quad (36)$$

$$L_1 e^{i\varphi_1} \simeq -\frac{\sin\left(\frac{\Phi+i\Psi}{2}\right) \cosh\left(\Lambda - \frac{\Psi}{2}\right)}{\cos\left\{\frac{\Phi+2i\Lambda}{2}\right\}} \cdot \frac{1}{\sin\left\{\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_3)+i(\varepsilon_2+\varepsilon_4)}{2}\right\}}, \quad (37)$$

$$L_2 e^{i\varphi_2} \simeq -\frac{\cos\left\{\frac{\Phi+2i\Lambda}{2}\right\}}{\sin\left(\frac{\Phi+i\Psi}{2}\right) \cosh\left(\Lambda - \frac{\Psi}{2}\right)} \cdot \sin\left\{\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) - i(\varepsilon_2 - \varepsilon_4)}{2}\right\}. \quad (38)$$

そして, $L_1^2 L_2^2$ は

$$L_1^2 L_2^2 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_4)^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_4)^2}, \quad (39)$$

となる. もし, 微小なパラメターを $(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_4)^2 \approx (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_4)^2$ のようにとれば $L_1^2 L_2^2$ の値は 1 となるので, 周期ソリトンと小振幅周期ソリトンは衝突の前後で位相のずれは起こらず, ただすり抜けるだけとなる. しかし, 微小なパラメターを $|\varepsilon_1 - \varepsilon_3|/|\varepsilon_1 + \varepsilon_3| \gg 1$ かつ $|\varepsilon_2 - \varepsilon_4|/|\varepsilon_2 + \varepsilon_4| \gg 1$ のようにとれば, $L_1^2 L_2^2$ を非常に大きな値とすることができる. 例えば,

$$\varepsilon_3 = -\varepsilon_1(1 + a\varepsilon_1), \quad \varepsilon_2 = -\varepsilon_4(1 + b\varepsilon_4), \quad (40)$$

とし (39) 式に代入すると, $L_1^2 L_2^2$ は,

$$L_1^2 L_2^2 \sim O(\varepsilon^{-2}) \gg 1, \quad (41)$$

となり, この場合 2 つのソリトンは共鳴相互作用する. また, 微小なパラメターを $|\varepsilon_1 - \varepsilon_3|/|\varepsilon_1 + \varepsilon_3| \ll 1$ かつ $|\varepsilon_2 - \varepsilon_4|/|\varepsilon_2 + \varepsilon_4| \ll 1$ のようにとれば, $L_1^2 L_2^2$ は無限小となる. 例えば,

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1(1 + a'\varepsilon_1), \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_4(1 + b'\varepsilon_4), \quad (42)$$

とし (39) 式に代入すると, $L_1^2 L_2^2$ は,

$$L_1^2 L_2^2 \sim O(\varepsilon^2) \ll 1, \quad (43)$$

となり, この場合 2 つのソリトンは長距離相互作用する.

図 2 は周期ソリトンと小振幅周期ソリトンが特異な相互作用をする様子を表したものである. 図 2 の (a) は微小なパラメターを (40) 式を満足するようにとり, (b) は (42) 式を満足するようにとったものである. 図 2 の (a) では $L_1^2 L_2^2 \gg 1$ となり, 2 つのソリトンは衝突の前後で位相のずれが生じていることがわかる. この図では, $\varepsilon \sim 10^{-2}$ としているので, $L_1^2 L_2^2 \sim 10^{-4}$ となるが, さらに小さな ε をとれば 2 つのソリトン間の位相のずれはより大きなものとなる. 図 2 の (b) では $L_1^2 L_2^2 \ll 1$ となり, 左にある周期ソリトンは小振幅周期ソリトンと衝突をする前に, 小振幅周期ソリトンと同じソリトンを吐き出しメッセンジャーソリトンとなる. そして, メッセンジャーソリトンは右にある小振幅周期ソリトンと衝突をし, 小振幅周期ソリトンを吸収した後に, もとの周期ソリトンにもどる.

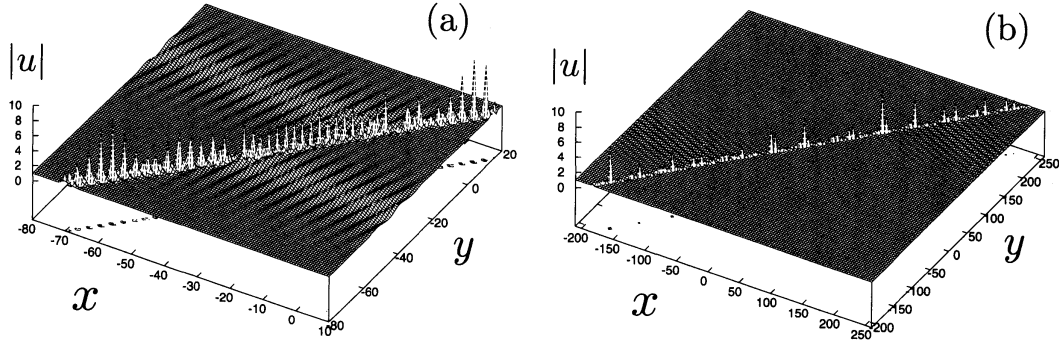


図 2: 周期ソリトンと小振幅周期ソリトンが共鳴相互作用または長距離相互作用する図. それぞれのパラメータは $(\phi_{1r}, \phi_{1i}, \theta_{1r}, \theta_{1i}) = ((3/8)\pi, 1.6, (9/16)\pi, 1.0)$, $(\phi_{2r}, \phi_{2i}, \theta_{2r}, \theta_{2i}) = (\pi + 2\varepsilon_1, 2\theta_{1i} - \phi_{1i} + 2\varepsilon_2, \theta_{1r} - \phi_{1r}/2 + \varepsilon_3, \varepsilon_4)$. (a) $\varepsilon_1 = -0.101$, $\varepsilon_2 = 0.1$, $\varepsilon_3 = 0.1$, $\varepsilon_4 = -0.101$; (b) $\varepsilon_1 = -0.02001$, $\varepsilon_2 = -0.02$, $\varepsilon_3 = -0.02$, $\varepsilon_4 = -0.02001$.

このように, 有限振幅の周期ソリトンが無限小振幅の周期ソリトンと特異な相互作用をすること自体も興味深いことではあるが, さらに興味深いことは, 図 2 の (a) と (b) では, 波数および振動数はほとんど同じであるにもかかわらず, そのわずかな違いにより, 2つのソリトンの相互作用が劇的に変わることである. つまり, 2つのソリトンの相互作用は S_1 近傍ではパラメータ敏感となる.

3.2 L_1 点近傍のパラメータを持つ2つの周期ソリトンの相互作用

次に, L_1 点近傍のパラメータを持つ2つの周期ソリトン間の相互作用について考える. 直線 l_1 は (29) 式の上の符号で, 直線 l_4 は (30) 式の下で与えられるので, それぞれの連立方程式を解くことにより L_1 点のパラメータが得られる. 先程と同様に, 添字 1 のパラメータを持つ周期ソリトンを第一ソリトンと呼び, そのパラメータを $\phi_{1r} = \Phi$, $\phi_{1i} = \Psi$, $\theta_{1r} = \Theta$ および $\theta_{1i} = \Lambda$ と固定する. これに対して, 添字 2 のパラメータを持つ周期ソリトン (第二ソリトン) のパラメータは, $n_3 = 0$, $n_4 = 0$ とすると,

$$\phi_{2r} = \Phi - \pi, \quad \phi_{2i} = 2\Lambda, \quad \theta_{2r} = \Theta + \frac{1}{2}\pi, \quad \theta_{2i} = \frac{\Psi}{2}, \quad (44)$$

となる. これらを (23) 式に代入することにより, 第二ソリトンの波数の実数成分は

$$\begin{cases} \alpha_2 = \sqrt{2ru_0^2} \left(\sin \frac{\Phi}{2} \sin \Theta \cosh \frac{\Psi}{2} \sinh \Lambda - \cos \frac{\Phi}{2} \cos \Theta \sinh \frac{\Psi}{2} \cosh \Lambda \right), \\ \gamma_2 = -\sqrt{2ru_0^2} \left(\sin \frac{\Phi}{2} \cos \Theta \cosh \frac{\Psi}{2} \sinh \Lambda + \cos \frac{\Phi}{2} \sin \Theta \sinh \frac{\Psi}{2} \cosh \Lambda \right), \end{cases} \quad (45)$$

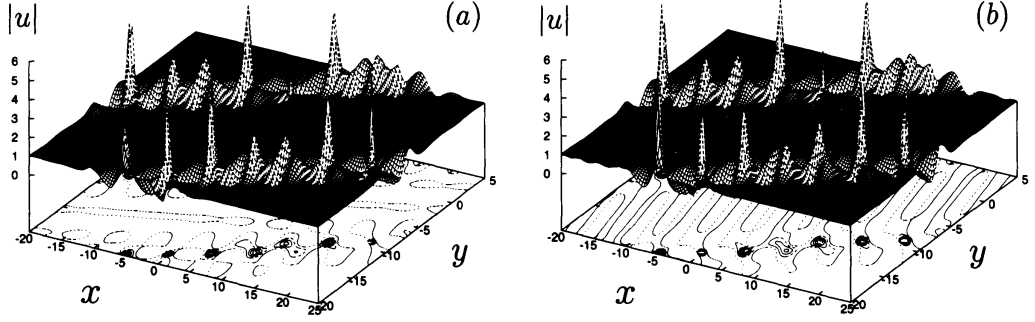


図 3: 2つの周期ソリトンが小振幅周期ソリトンをメッセンジャーソリトンとして長距離相互作用する図. $(\phi_{1r}, \phi_{1i}, \theta_{1r}, \theta_{1i}) = ((13/24)\pi, 1.0, (1/3)\pi, 0.6)$, $(\phi_{2r}, \phi_{2i}, \theta_{2r}, \theta_{2i}) = (\phi_{1r} - \pi + 2\varepsilon_1, 2\theta_{1i} + 2\varepsilon_2, \theta_{1r} + \pi/2 + \varepsilon_3, \phi_{1i}/2 + \varepsilon_4)$. (a) $\varepsilon_1 = 0.01$, $\varepsilon_2 = 0.01001$, $\varepsilon_3 = 0.01001$, $\varepsilon_4 = 0.01$; (b) $\varepsilon_1 = 0.01$, $\varepsilon_2 = -0.01001$, $\varepsilon_3 = -0.01001$, $\varepsilon_4 = 0.01$.

となり, 第一ソリトンの波数の実数成分と等しくなることがわかる. また, 第二ソリトンの波数の虚数成分は

$$\begin{cases} \beta_2 = \beta_1 - \sqrt{2ru_0^2} \sin\left(\frac{\Phi}{2} - \Theta\right) \cosh\left(\frac{\Psi}{2} - \Lambda\right), \\ \delta_2 = \delta_1 - \sqrt{2ru_0^2} \cos\left(\frac{\Phi}{2} - \Theta\right) \cosh\left(\frac{\Psi}{2} - \Lambda\right), \end{cases} \quad (46)$$

または

$$\begin{cases} \beta_2 = -\beta_1 + \sqrt{2ru_0^2} \sin\left(\frac{\Phi}{2} + \Theta\right) \cosh\left(\frac{\Psi}{2} + \Lambda\right), \\ \delta_2 = -\delta_1 - \sqrt{2ru_0^2} \cos\left(\frac{\Phi}{2} + \Theta\right) \cosh\left(\frac{\Psi}{2} + \Lambda\right). \end{cases} \quad (47)$$

と書き表すことができ, 以下のそれぞれの関係式を得る.

$$\sin^2 \frac{(2n+1)\pi + i(\Psi - 2\Lambda)}{2} = \frac{(\beta_1 - \beta_2)^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2}{2ru_0^2}, \quad (48)$$

または

$$\sin^2 \frac{(2n+1)\pi + i(\Psi + 2\Lambda)}{2} = \frac{(\beta_1 + \beta_2)^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2}{2ru_0^2}, \quad (49)$$

これらは2つの周期ソリトンが長距離相互作用する際のメッセンジャーソリトンの分散関係式と一致しており, このことより, L_1 点近傍のパラメータでは2つの周期ソリトンは長距離相互作用すると予想される. また (19) 式および (20) 式より, $L_1 \rightarrow 0$ および $L_2 \rightarrow 0$ のとき, 共にメッセンジャーソリトンの波数の実数成分は $(\alpha_1 - \alpha_2, \gamma_1 - \gamma_2)$ となることがわかる. よって, L_1 近傍のパラメータ

ではメッセンジャーソリトンは小振幅周期ソリトンであると考えられる。そこで、それぞれのパラメーターを以下のようにとる。

$$\begin{aligned}
 \phi_{1r} &= \Phi, & \phi_{2r} &= \Phi - \pi + 2\varepsilon_1, \\
 \phi_{1i} &= \Psi, & \phi_{2i} &= 2\Lambda + 2\varepsilon_2, \\
 \theta_{1r} &= \Theta, & \theta_{2r} &= \Theta + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_3, \\
 \theta_{1i} &= \Lambda, & \theta_{2i} &= \frac{\Psi}{2} + \varepsilon_4.
 \end{aligned} \tag{50}$$

これらを (37) 式および (38) 式に代入することにより、

$$L_1 e^{i\varphi_1} \simeq \frac{\cosh \frac{\Psi-2\Lambda}{2}}{\cos \frac{\Phi+2i\Lambda}{2} \sin \frac{\Phi+i\Psi}{2}} \cdot \sin \left\{ \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + i(\varepsilon_2 + \varepsilon_4)}{2} \right\}, \tag{51}$$

$$L_2 e^{i\varphi_2} \simeq \frac{\cosh \frac{\Psi+2\Lambda}{2}}{\cos \frac{\Phi-2i\Lambda}{2} \sin \frac{\Phi+i\Psi}{2}} \cdot \sin \left\{ \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) - i(\varepsilon_2 - \varepsilon_4)}{2} \right\}, \tag{52}$$

が得られ、 $L_1^2 L_2^2$ は

$$\begin{aligned}
 L_1^2 L_2^2 &\simeq \frac{\cosh^2 \frac{\Psi-2\Lambda}{2} \cosh^2 \frac{\Psi+2\Lambda}{2}}{(\cos \Phi + \cosh 2\Lambda)^2 (\cos \Phi - \cosh \Psi)^2} \\
 &\quad \times \{(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_4)^2\} \{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_4)^2\}, \tag{53}
 \end{aligned}$$

となる。ここで興味深いことは、 $|\varepsilon_1 - \varepsilon_3|/|\varepsilon_1 + \varepsilon_3| \ll 1$ かつ $|\varepsilon_2 - \varepsilon_4|/|\varepsilon_2 + \varepsilon_4| \ll 1$ とすれば $L_1/L_2 \gg 1$ となり、 $|\varepsilon_1 - \varepsilon_3|/|\varepsilon_1 + \varepsilon_3| \gg 1$ かつ $|\varepsilon_2 - \varepsilon_4|/|\varepsilon_2 + \varepsilon_4| \gg 1$ とすれば $L_1/L_2 \ll 1$ となることである。いずれの場合においても ε を微小な値にとれば $L_1^2 L_2^2 \ll 1$ となり2つの周期ソリトンは長距離相互作用をするが、 $L_1 \gg L_2$ の場合は、メッセンジャーソリトンの波数の虚数成分は $(\beta_1 + \beta_2, \delta_1 + \delta_2)$ になるのに対して、 $L_1 \ll L_2$ の場合は $(\beta_1 - \beta_2, \delta_1 - \delta_2)$ となるので、微小なパラメーターの取り方に依って、メッセンジャーソリトンの形状が劇的に変わる。このことより、 L_1 点近傍においても2つの周期ソリトンの相互作用はパラメーター敏感であると言える。

2つの周期ソリトン間の小振幅周期ソリトンを介する長距離相互作用の様子を図3に描く。(a) と (b) では、波数はわずかに異なるだけであるが、メッセンジャーソリトンは大きく異なっていることがわかる。

4 まとめ

DS II 方程式において、周期ソリトンはその解の相互作用の係数 M を $M \rightarrow \infty$ にすると振幅が無限小となる。この小さな振幅の周期ソリトンを小振幅周期ソリトンとよぶことにした。小振幅周期ソリトンの波数の実数成分は非常に小さいが虚数成分は有限である。そこで、周期ソリトンと小振幅周期ソリトンの相互作用を調べた。図1の S_1 点近傍では第二ソリトンが小振幅周期ソリトンとなる。周期ソリトンと小振幅周期ソリトンの相互作用を調べるために、 S_1 点近傍のパラメーターを持つ解について調べたところ、2つのソリトンの相互作用に共鳴相互作用や長距離相互作用が存在することが

わかった。無限小振幅のソリトンが有限振幅のソリトンに何らかの影響を与えることは大変興味深いことである。しかし、さらに興味深いことは、 S_1 点近傍において、わずかなパラメーターの変化に対してその現象（相互作用）が大きく異なることである。これは、(34) 式で示したように、 S_1 点のパラメーターが共鳴ソリトンの分散関係式および長距離相互作用する際のメッセンジャーソリトンの分散関係式を共に満足するパラメーターであることに起因していると考えられる。また最後に、2つの周期ソリトンが小振幅周期ソリトンをメッセンジャーソリトンとして長距離相互作用する場合について調べた。図 1 の L_1 点近傍のパラメーターにおいては、 $L_1 L_2 \rightarrow 0$ となり、2つの周期ソリトンは長距離相互作用する。このとき、第一ソリトンと第二ソリトンの波数の虚数成分は異なるが、実数成分はほぼ等しくなるので、メッセンジャーソリトンは小振幅周期ソリトンとなる。ここで興味深いことは L_1 点近傍のパラメーターに対しても、そのわずかな違いによってメッセンジャーソリトンの形状が大きく異なることである。これは、 L_1 点で $L_1 \rightarrow 0$ および $L_2 \rightarrow 0$ が同時に満たされており、(48) 式および (49) 式が示すように、波数の虚数成分が $(\beta_1 + \beta_2, \delta_1 + \delta_2)$ である小振幅周期ソリトンの分散関係式と波数の虚数成分が $(\beta_1 - \beta_2, \delta_1 - \delta_2)$ である小振幅周期ソリトンの分散関係式が同時に満足しており、どちらのソリトンもメッセンジャーソリトンになりうることに起因していると考えられる。なお、本研究では S_1 点および L_1 点近傍についてのみ議論をしたが、他の点近傍についても同様の議論をする事ができる。

参考文献

- [1] A. Davey and K. Stewartson: Proc. R. Soc. London A **338** (1974) 101.
- [2] M. Tajiri and T. Arai: J. Phys. A: Math. Theor. **44** (2011) 235204.
M. Tajiri and T. Arai: J. Phys. A: Math. Theor. **44** (2011) 335209.
田尻昌義, 新居毅人: Quasi-line soliton interactions: KP I 及び DS I 方程式の解;
京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の研究の新たな進展」**1800** (2012) 107.
- [3] T. Arai, K. Takeuchi and M. Tajiri: J. Phys. Soc. Jpn. **70** (2001) 55.
- [4] J. Satsuma and M. J. Ablowitz: J. Math. Phys. **20** (1979) 1496.