

## 内部重力波と水面波が同時に励起される系の 数値シミュレーション

京都大学大学院工学研究科 機械理工学専攻

菊池 琢  
沖野真也  
花崎秀史

### 1 はじめに

密度成層流体の運動を考えることは、大気や海洋での流れや運動を考える上で重要である。成層流体中には、上下の密度差による浮力を復元力とする内部重力波が存在している。

本研究では、Hanazaki(1989)[3]で行われた成層流体中に生じる内部重力波の時間発展解の数値解析に対し、自由表面を持つ成層流を取り上げ、底壁面にある物体によって励起される内部重力波および水面波の時間発展を取り扱った。そして境界条件やパラメータを考察し、その条件においてナビエ・ストークス方程式の数値計算をさせる計算コードの開発を第一の目的とした。また、水面波のフルード数  $F_d$  や成層流に関するパラメータ  $K$  が水面波及び内部重力波の時間発展に与える影響を検証することを第二の目的とした。

### 2 基礎方程式と境界条件

一般に非圧縮性の成層流体の運動は以下に示す連続の式 (2.1)、ナビエ・ストークス方程式 (2.2)、密度の輸送方程式 (2.3) で表される。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P - \frac{1}{\rho_0} \rho' g \hat{\mathbf{z}} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.2)$$

$$\frac{D\rho'}{Dt} = -w \frac{d\bar{\rho}}{dz}. \quad (2.3)$$

ここで、 $t$  は時間、 $p$  は圧力、 $\mathbf{u} (= (u, w))$  は流速ベクトル、 $g$  は重力加速度、 $\hat{\mathbf{z}}$  は鉛直方向の単位ベクトル、 $\nu$  は流体の動粘性係数である。また、本研究で全密度  $\rho$  は

$$\rho(x, z, t) = \bar{\rho}(z) + \rho'(x, z, t), \quad (2.4)$$

と表される。 $\bar{\rho}(z)$  は流体が静止しているときの高さ  $z$  における密度で、 $\rho_0 = \bar{\rho}(0)$  を基準密度、 $\rho'$  を密度攪乱とする。密度攪乱が十分に小さく、 $\rho' \ll \rho_0$  であるとして式 (2.2) にはブシネスク近似を施してある。なお、式 (2.2) 中の  $P$  は全圧から静水压を引いた動圧であり、

$$P = p + \rho_0 g(z - d), \quad (2.5)$$

と定義される。 $d$  は流体が静止しているときの水深である。

本研究で設定した境界条件は以下の通りである。

まず、流体の流入口は一様流とし、

$$\mathbf{u} = (U, 0), \quad \rho' = 0, \quad (2.6)$$

とする。  $U$  は主流の速度を表す。底壁面 ( $z = 0$ ) では境界層の発達を抑えるためにスリップ壁を用いた。また、本研究の数値計算を行う上で特に注意を払うべきは自由表面の取り扱いである。自由表面の形状は、自由表面の形状をあらわす関数  $f_0(x, t)$  を用いて、

$$z = f_0(x, t), \quad (2.7)$$

と表すことができ、運動学的境界条件

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + u \frac{\partial f_0}{\partial x} = w, \quad (2.8)$$

が導かれる。自由表面の形状は偏微分方程式 (2.8) を解くことにより決定することができる。加えて、流体の粘性応力と表面張力を無視したとき、自由表面の力学的境界条件は、

$$p = p_0, \quad (2.9)$$

すなわち、

$$P = p_0 + \rho_0 g(z - d), \quad (2.10)$$

となる。ほかに、自由表面における全密度  $\rho$  は常に一定であるという仮定から、

$$\rho' = \bar{\rho}(d) - \bar{\rho}(z) = -\frac{d\bar{\rho}}{dz}(z - d), \quad (2.11)$$

を自由表面上の密度の境界条件として与える。

### 3 線形理論

波長が水深よりも十分に大きい浅水波を考える。非粘性の2次元成層流体の支配方程式は、線形近似のもとで

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (3.2)$$

$$0 = -\frac{\partial p'}{\partial z} - \rho' g, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} - \frac{\rho_0 N^2}{g} w' = 0, \quad (3.4)$$

となる。ダッシュ(′) 付きの文字は基本場に対する攪乱を表す。式 (3.2), (3.3) にはブシネスク近似を施してある。また、(3.3) には静水圧近似を適用している。加えて、 $N$  はプラント・パイサラ振動数であり、

$$N^2 \equiv -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\bar{\rho}}{dz}, \quad (3.5)$$

で定義される。変数分離法を用いて、この方程式系の解を以下のように書けるとする。

$$u'(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x, t) \frac{d\phi_n(z)}{dz}, \quad (3.6)$$

$$w'(x, z, t) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial A_n(x, t)}{\partial x} \phi_n(z), \quad (3.7)$$

$$p'(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p'_n(x, t) \frac{d\phi_n(z)}{dz}. \quad (3.8)$$

$$\rho'(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho'_n(x, t) \frac{d^2\phi_n(z)}{dz^2}, \quad (3.9)$$

ただし、 $n$  は伝播する波のモードを表し、本研究では位相速度（＝伝播速度）が大きい順に、 $n = 0, 1, 2, \dots$  と番号をつける。後でも触れるが、本研究では水面波が最大の位相速度をもつため、 $n = 0$  は水面波モードと考えてよい。また、 $\phi_n(z)$  は、第  $n$  モードの波の鉛直速度  $w'$  の鉛直構造を示す固有関数である。以上の式をまとめると、 $\phi_n(z)$  に関する常微分方程式、

$$\frac{d^2\phi_n}{dz^2} + \frac{N^2}{c_n^2} \phi_n = 0, \quad (3.10)$$

を得る。ここで、 $c_n$  は第  $n$  モードの波の位相速度であり、固有関数  $\phi_n(z)$  に対応する固有値である。式 (3.10) に付随する境界条件は、上下の境界でそれぞれ、

$$\phi_n = 0, \quad z = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{d\phi_n}{dz} = \frac{g}{c_n^2} \phi_n, \quad z = d, \quad (3.12)$$

であり、この方程式系はスツルム-リウビル型の固有値問題である。方程式および境界条件の導出は、例えば Gill(1982) [1] が詳しい。微分方程式 (3.10) を境界条件 (3.11) のもとで解くと、固有関数は、

$$\phi_n(z) = \sin \frac{N}{c_n} z, \quad (3.13)$$

で与えられる。ただし、固有関数を

$$\max |\phi_n| = 1, \quad (3.14)$$

と規格化した。これともう一方の境界条件 (3.12) から方程式

$$\tan \frac{N}{c_n} d = \frac{c_n N}{g}, \quad (3.15)$$

が得られ、固有値  $c_n$  を数値的に求めることになる。相異なる固有関数は、直交性：

$$\int_0^d \frac{d\phi_m}{dz} \frac{d\phi_n}{dz} dz = 0, \quad m \neq n, \quad (3.16)$$

を有するため、これを用いて各モードの波の振幅に相当する  $A_n(x, t)$  をやはり数値的に求めることができる。

## 4 数値計算法

### 4.1 無次元化とパラメータ

数値計算をする場合には, 方程式系 (2.1)–(2.3) と, 自由表面での境界条件 (2.8), (2.10), (2.11) を無次元化する必要がある. 無次元化の代表スケールとして, 長さを水深  $d$ , 速度を  $U$ , 圧力攪乱を  $\rho_0 U^2$ , 密度攪乱を  $-d(d\bar{\rho}/dz)$  とすると, 支配方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P - (\pi K)^2 \rho' \hat{\mathbf{z}} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho' = -w. \quad (4.3)$$

ここで,  $Re(= Ud/\nu)$  はレイノルズ数である. また, パラメータ  $K$  は

$$K \equiv \frac{Nd}{\pi U}, \quad (4.4)$$

で定義され, 成層の強さ及び内部重力波の伝播速度に関する無次元パラメータである.

パラメータ  $K$  が表す物理的な意味について説明する. 上下に剛体壁をもつ流路を流れるブシネスク流体を考えると, 固有関数  $\phi_n$  の上側の境界条件 (3.12) が,

$$\phi_n = 0, \quad z = d, \quad (4.5)$$

に置き換えられ, 固有関数と固有値  $c_n (n = 1, 2, 3, \dots)$  はそれぞれ,

$$\phi_n(z) = \sin \frac{n\pi z}{d}, \quad (4.6)$$

$$c_n = \frac{Nd}{n\pi}, \quad (4.7)$$

であることが知られている [3]. ただし, 上側境界が剛体壁の場合, 水面波が存在しえないため, モード  $n = 0$  は考えないものとしている. このとき, 第 1 モードの内部重力波と主流の速度比は,

$$\frac{c_1}{U} = \frac{Nd}{\pi U} = K, \quad (4.8)$$

となり,  $K$  は, 「上側境界が剛体壁の場合」の最速の内部重力波 ( $n = 1$ ) と主流の速度比を表している.

一方, 自由表面での境界条件を無次元化すると,

$$P = p_0 + \frac{1}{F_d^2} (z - 1), \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + u \frac{\partial f_0}{\partial x} = w, \quad (4.10)$$

$$\rho' = z - 1, \quad (4.11)$$

となる。  $F_d$  は主流と、長波長極限の水面波の位相速度の比を表すパラメータで、

$$F_d \equiv \frac{U}{\sqrt{gd}}, \quad (4.12)$$

で定義されている。以上の式を適当に差分化し、計算コードを作成して数値シミュレーションを行う。基礎方程式の解法には、非圧縮性流体の数値計算によく用いられる MAC(Marker and Cell) 法を用いる。

## 4.2 計算領域

本研究で用いた計算領域を図 1 に示す。計算領域の大きさは液深方向に  $d$ , 流れ方向に  $800d$  とする。また、 $x = 0$  の底壁面に

$$h(x) = \frac{d}{20} \text{sech}^2(4x/d) \quad (-d \leq x \leq d), \quad (4.13)$$

で与えられる、水平スケール  $2d$ , 高さスケール  $d/20$  の物体を置くものとする。計算格子点はこの計算領域に  $2251 \times 101$  点を設定する。計算格子は、流れ方向では物体に近づくにつれて格子間隔を小さくし、また水深方向では底壁面と自由表面に近づくにつれて格子間隔を小さくする。なお、波が流入口に到達すると上述の流入口の境界条件の整合性が崩れるため、波が流入口に到達する前に計算を打ち切ることとする。

## 5 計算結果

本研究の計算領域は、水平方向の長さスケールが鉛直方向のそれよりも非常に大きい。そのため、以下の計算結果で示す図は、特に断りなく鉛直方向に引き伸ばしている。また、ブシネスク近似に関するパラメータ  $\alpha$  を

$$\alpha \equiv \frac{N\sqrt{d}}{\sqrt{g}} = \pi K \cdot F_d, \quad (5.1)$$

と定義すると、ブシネスク近似の成立条件は

$$\alpha^2 \ll 1, \quad (5.2)$$

と書け [2], これを以下で用いる。

### 5.1 流れ場の $K$ 依存性

流れ場を定性的に評価するために、Hanazaki(1989)[3] に倣って摂動流れ関数  $\psi'$ :

$$\psi'(x, z, t) = \int_0^z (u - U) dz, \quad (5.3)$$

を計算し、その等値線を描く。  $K = 0.5, 1.5$  のときの  $\psi'$  の時間発展を図 2 に示す。  $K = 0.5$  では上流に攪乱が見られないのに対して、  $K = 1.5$  では柱状攪乱 (columnar disturbance) の上流伝播

が見られる。上側境界が剛体壁の場合、第  $n$  モードの内部重力波は

$$c_n - U = \left( \frac{K}{n} - 1 \right) U, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.4)$$

の速度で上流に伝播する。特に、 $n = 1$  の場合に

$$c_1 - U = (K - 1)U, \quad (5.5)$$

であり、 $K > 1$  の場合には内部重力波が上流に伝播する一方、 $K < 1$  の場合には上流には伝播しない。式 (5.5) によれば、 $K = 1.5$  のとき、第 1 モードの波は各々およそ  $0.5U$  の速度で上流に伝播する。図 2 をみれば、これに合致した速度で内部重力波が伝播していく様子が確認できる。

内部重力波に関してより定量的な評価をするために、固有関数の直交性 (3.16) を用いるのが有効である。 $A_n(x, t)$  は各モードの波の振幅に相当する。直交性を用いることで、任意の  $n$  に対して  $A_n(x, t)$  を求めることができる。

図 3 には  $K = 0.5, 1.5, 2.0$  の場合の  $A_n(x, t)$  を示す。 $K = 1.5$  の場合の  $A_1(x, t)$  の上流側の波頭の位置 ( $x \sim -18$ ) が図 2 の柱状攪乱の位置に合致している。また、 $K = 2.0$  の場合には、およそ  $U$  の速度でモード 1 の波が上流伝播することも示している。また、 $K = 2.0$  の場合の  $A_2(x, t)$  の値が他のパラメータに比べて顕著に大きい。これは、 $K = 2.0$  の場合に (5.4) より

$$c_2 \approx U, \quad (5.6)$$

であり、モード  $n = 2$  が共鳴するためである。

ここまでは内部重力波のパラメータ  $K$  依存性を見てきたが、成層は水面波にも影響を及ぼすのだろうか。水面波の位相速度  $c_0$  は長波長極限において、 $\sqrt{gd}$  であることがよく知られているが、これは他のモードよりもかなり大きい。いま、 $c_0^* (= c_0/\sqrt{gd})$  に比べて  $\alpha$  が十分に小さいと仮定して  $\alpha/c_0^*$  の 5 次以下の項を無視し、(3.15) の左辺をテーラー展開すると、

$$\frac{\alpha}{c_0^*} + \frac{1}{3} \left( \frac{\alpha}{c_0^*} \right)^3 = \alpha c_0^*, \quad (5.7)$$

となり、これを  $c_0^*$  について解くと、

$$c_0^* = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha^2/3}}{2}}. \quad (5.8)$$

さらに  $\alpha^2 \ll 1$  から

$$c_0^* \simeq 1 + \frac{1}{6}\alpha^2, \quad (5.9)$$

と近似できる。この表式から、 $\alpha$  が小さい、すなわちブシネスク近似がよく成り立つほど、 $c_0$  が  $\sqrt{gd}$  に近づく。加えて、時刻  $Ut/d = 40$  における上流端付近の自由表面変位を図 4 に示す。これを見ると、 $K$  が大きい、すなわち成層の効果が強い場合に水面波の伝播が速くなっている。この傾向は、近似式 (5.9) によって説明できる。

## 5.2 水面波が内部重力波に及ぼす影響

上側境界が剛体壁の場合と自由表面の場合では、内部重力波の伝播にどのような差異があるのだろうか。図5には、自由表面の有無による固有関数型の違いを示す。固有値や固有関数の差は非常に小さい。ここで特に、 $n \geq 1$  の場合を考える。 $c_n^* = c_n/\sqrt{gd}$  かつ  $0 < \epsilon < \pi$  として、

$$\frac{\alpha}{c_n^*} = n\pi + \epsilon, \quad (5.10)$$

とおくことにする。 $\epsilon = 0$  が剛体壁の場合に対応する。なお、式中の  $n$  は固有値のモード番号に対応している。この場合、式 (3.15) は

$$\tan \epsilon = \frac{\alpha^2}{n\pi + \epsilon}, \quad (5.11)$$

と書き換えられる。両辺を比較すると、 $\alpha^2 \ll 1$  より  $\tan \epsilon \sim \epsilon$  だから、

$$\epsilon \simeq \frac{\alpha^2}{n\pi}. \quad (5.12)$$

すなわち、

$$c_n^* \simeq \alpha \frac{n\pi}{(n\pi)^2 + \alpha^2}, \quad (5.13)$$

を得る。また、 $c_n$  の主流速度  $U$  との比:

$$\frac{c_n}{U} \simeq K \frac{n\pi^2}{(n\pi)^2 + \alpha^2} = \frac{nK}{n^2 + (K \cdot F_d)^2}, \quad (5.14)$$

を上側境界が剛体壁の場合と比較すると、後者の場合は (4.4) より

$$\frac{c_n}{U} = \frac{K}{n}, \quad (5.15)$$

であるから、 $K$  が等しい値をとるとき、上側境界が自由表面の場合の方が内部重力波の位相速度がわずかに小さくなる。ここで、前節と同様により定量的な比較を行うために、 $K = 1.5$  の  $A_n(x, t)$  の値を、両方の境界条件の場合について図6に示す。ここでも、自由表面の場合の方が内部重力波の上流伝播がわずかに遅くなっている。

## 6 おわりに

自由表面に生じる水面波、および成層流体内部に生じる内部重力波が同時に励起される系について、ナビエ・ストークス方程式の数値計算を行った。その結果、以下の知見を得た。

(1) 水面波、内部重力波ともに線形理論に一致した伝播速度をもつ。ただし、波の位相速度が主流速度に近い場合は共鳴が生じるため、この限りでない。また、パラメータ  $K$  が  $K > 1$  を満たす場合、上流に柱状攪乱 (columnar disturbance) が伝播していく。

(2) プシネスク近似の下では、水面波の伝播が成層によりわずかに速くなることを線形理論から説明し、数値シミュレーションの結果が定性的に一致した。プシネスク近似がよく成り立つほど、理論上の伝播速度  $\sqrt{gd}$  に速度が近くなる。

(3) 上側境界が剛体壁の場合と比較すると、自由表面の場合の方が内部重力波の伝播がわずかに遅いことを線形理論から説明し、数値シミュレーションの結果が定性的に一致した。

## 参考文献

- [1] Gill, A. E. 1982 *Atmosphere-Ocean Dynamics*. Academic Press.
- [2] Grimshaw, R. H. J. & Smyth, N. F. 1986 Resonant flow of a stratified fluid over topography. *J. Fluid Mech.* **169**, 429-464.
- [3] Hanazaki, H. 1989 Upstream advancing columnar disturbances in two-dimensional stratified flow of finite depth. *Phys. Fluids A*. **1**, 1976-1987.

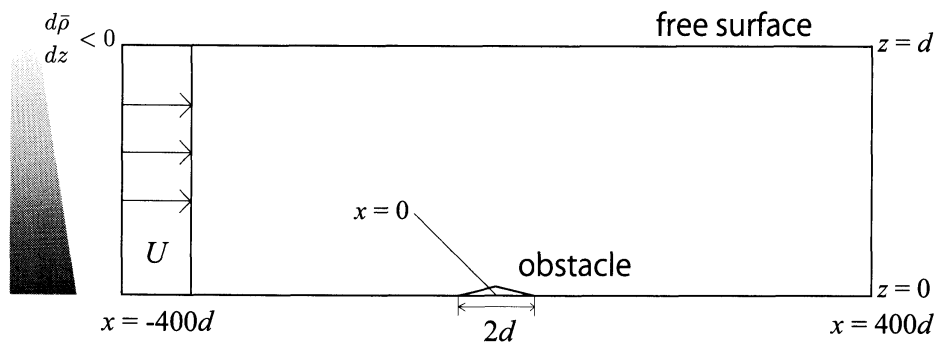


図 1: 計算領域の概略図. 物体の高さスケールは  $d/20$ .

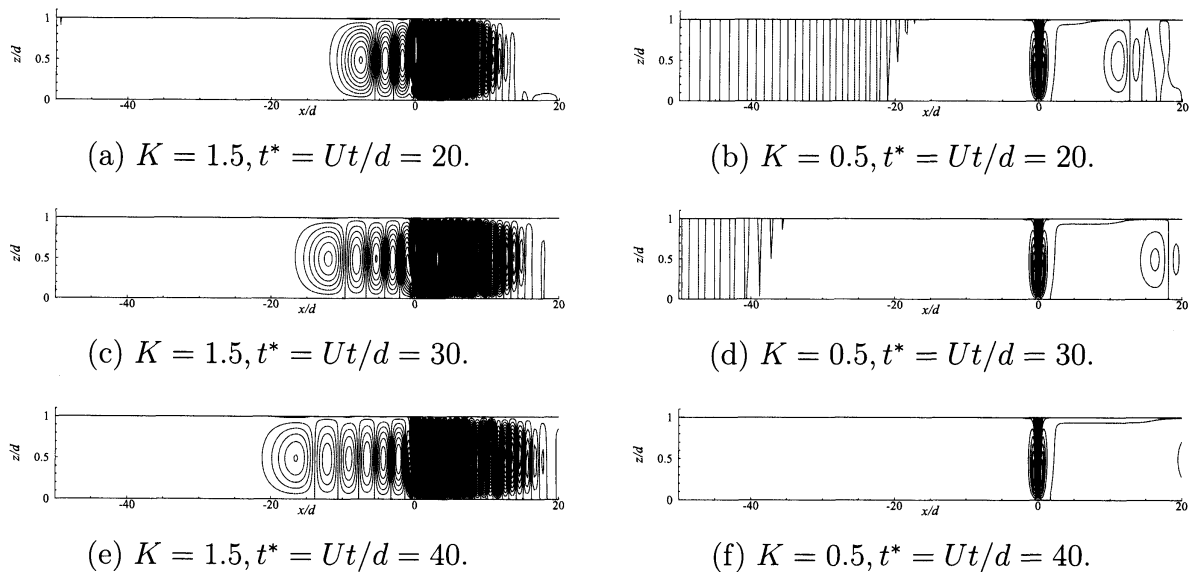


図 2: 摂動流れ関数  $\psi'$  の時間発展. 左側は  $K = 1.5$ , 右側は  $K = 0.5$  の場合. パラメータ  $F_d = 0.1, Re = 500$  は共通. 等高線の間隔は  $\Delta\psi'/Ud = 1.0 \times 10^{-3}$ .

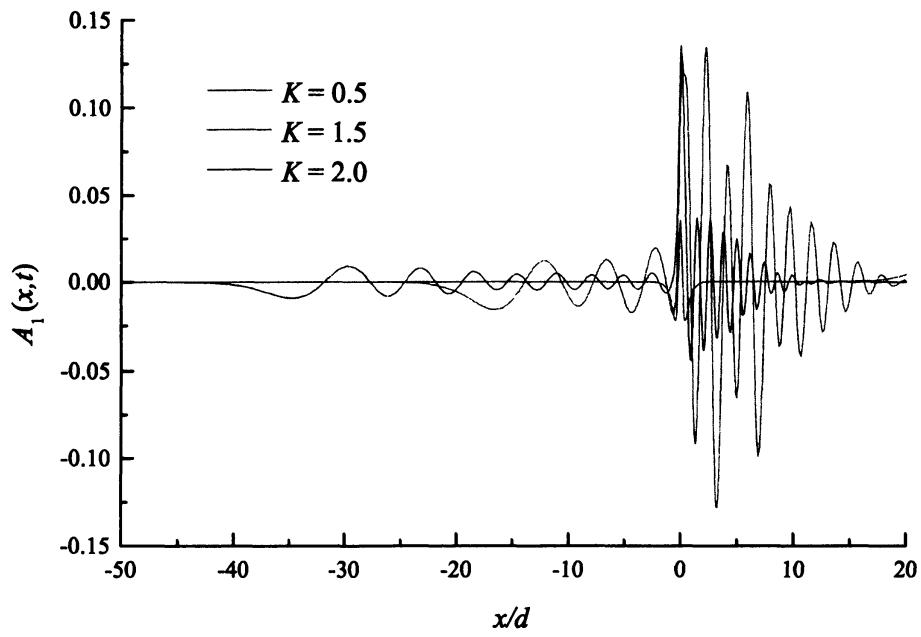
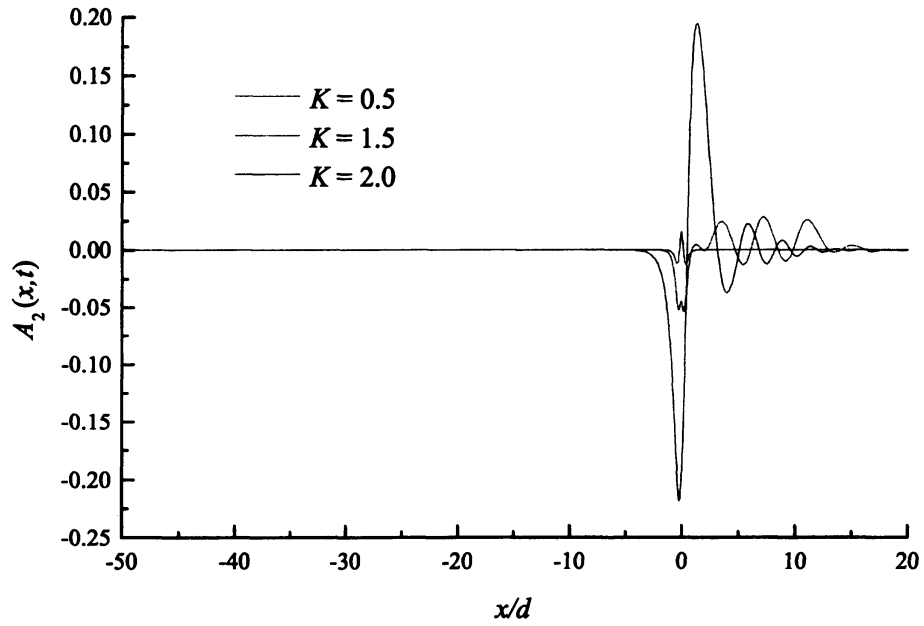
(a)  $A_1(x, t)$ .(b)  $A_2(x, t)$ .

図 3:  $A_n(x, t)$  の  $K$  依存性. 時刻  $Ut/d = 40$  で, パラメータ  $F_d = 0.1$ ,  $Re = 500$  は共通.

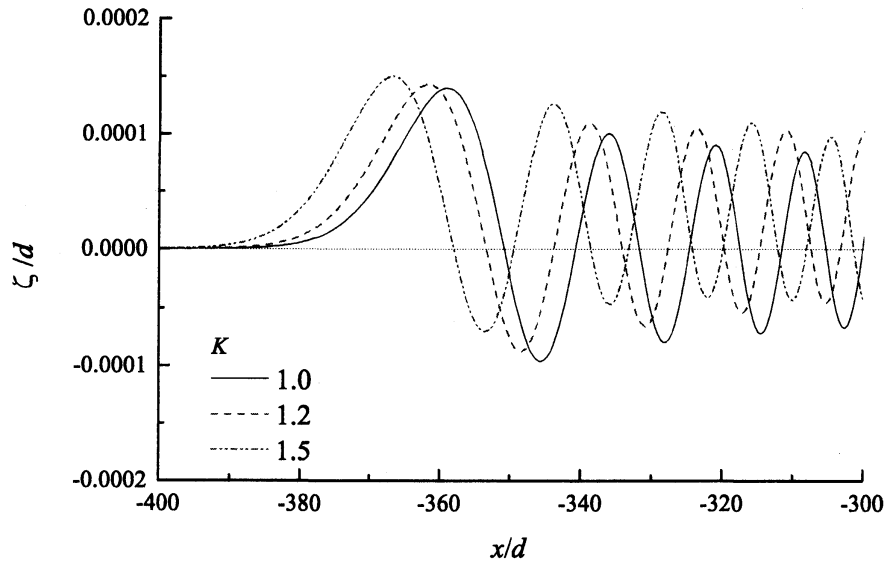


図 4: 時刻  $Ut/d = 40$  における水面変位の  $K$  依存性. パラメータ  $F_d = 0.1, Re = 500$  は共通.

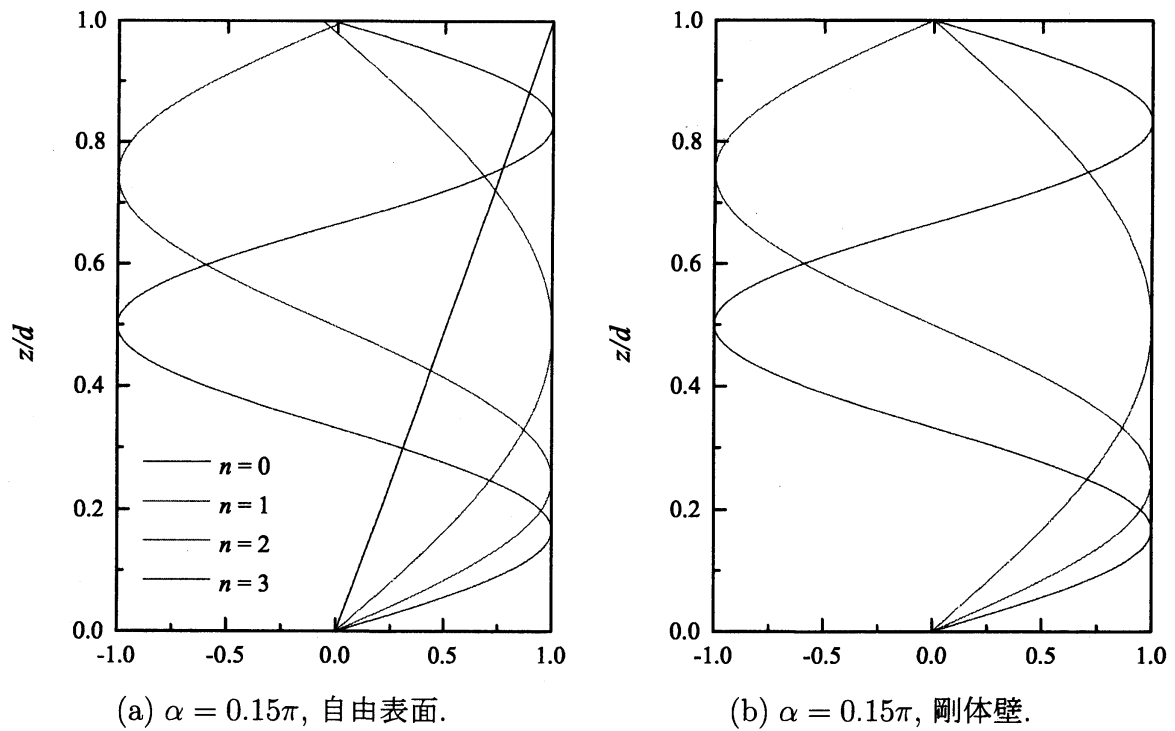


図 5:  $\alpha = 0.15\pi$  のときの固有関数. 左側は上側境界が自由表面の場合で, 右側は剛体壁の場合. 固有関数は (3.14) で規格化している.

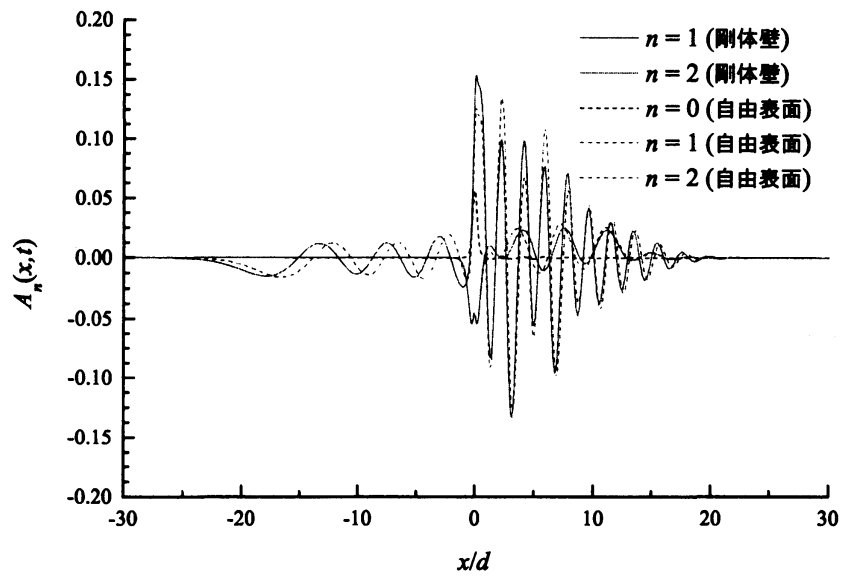


図 6: 上側境界が剛体壁の場合と自由表面の場合の  $A_n(x, t)$  の比較. 時刻  $Ut/d = 40$  で, パラメータ  $K = 1.5, Re = 500$  は共通. 水面波のパラメータは  $F_d = 0.1$ .