

ホッジ構造の変動と交叉コホモロジー群

京都大学数理解析研究所

柏原正樹 (Masaki Kashiwara)

河合隆裕 (Takahiro Kawai)

§0. X をコンパクトケーラー多様体と双有理形的に同値なコンパクト複素多様体, X^* を非特異, 且つ, Zariski-open な X の部分集合, H を X^* 上に与えられたホッジ構造の偏極変動 (polarized variation of Hodge structure) とする。この時, H の minimal extension πH に対し, $H^k(X; \pi H)$ はホッジ構造を持つか? という問に対し, X がコンパクトケーラー多様体, $X \setminus X^*$ は正規交叉超曲面の時, 肯定的な解答を与えることが出来たので ([K-K, 1]) その要旨を報告する。尚, 同様の結果が独立に E. Cattani, A. Kaplan & W. Schmid ([C-K-S]) によっても得られた。

§1. 我々の証明法は, X が 1次元の場合の

Zucker ([Z]) の議論に強く影響を受けている; 我々は

intersection cohomology 群 $H^k(X; \pi H)$ と

L^2 -cohomology 群が一致することを示し,

L^2 -cohomology 群に対して古典的な調和積分論

の手法を用いてホッジ構造を定める。尚, 以下

代数的な Hodge filtration の決め方に就て,

本報告後に得られた結果に関しては [K-IT, 2]

を参照されたい。

§2. 先ず, $Y = X \setminus X^*$ の各点の近傍で

次のように振舞う $\mathbb{C}$ -valued 計量 ω を与える:

$$\omega \sim \sum_{j \leq l} 2\bar{z}_j \log \log |z_j|^2 + \sum_{j > l} \sqrt{-1} dz_j d\bar{z}_j$$

(但し $(z_1, \dots, z_n)$ は局所座標系であって $\{z_1 \cdots z_l = 0\} = Y$)

となるものとする。この計算により X^* が完備と

なることに注意しておこう。

さて " L^2 - k -form" の層 $\mathcal{L}^k(H)$ と、次の

前層によって定めることとする。

$$X \supset U \longmapsto \{u \in L_{(2)}^k(X^* \cap U; H) ;$$

$$du \in L_{(2)}^{k+1}(X^* \cap U; H)\}.$$

さて、 k 次 L^2 -コホモロジー群 $H_{(2)}^k(X^*; H)$ は

定義によつて $H^k(\Gamma(X; \mathcal{L}^*(H)))$ に一致するか、

$\mathcal{L}^*(H)$ は soft sheaf の複体であること

を示し得るので、実は、 $H^k(X; \mathcal{L}^*(H))$ と

一致する。従つて $\mathcal{L}^*(H)$ と π^*H が quasi-isomor-

phic であることを示せば、我々の目標は達成

される。これは局所的な問題であるから

$$X = \Delta^n, \quad X^* = (\Delta^*)^n \quad (\Delta = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\},$$

$$\Delta^* = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1\} \quad \text{と仮定し, 更に}$$

Y の各 stratum の余次元に関する帰納法を

$$\text{用いて} \quad \mathcal{L}^*(H) \cong \pi^* H \quad \text{が} \quad X \setminus \{0\} \quad \text{上で}$$

成立しているとしても構わない。ここで

$$X \setminus \{0\} \cong \{t; 0 < t\} \times L$$

となる様に t -座標を導入すれば,

$$H^*(X; \mathcal{L}^*(H)) \cong H_{(2)}^*(X \setminus \{0\}; H) -$$

$$\text{が成立つ。更に} \quad H^k(X \setminus \{0\}; \mathcal{L}^*(H)) \cong H_{(2)}^k(L; H)$$

(か) 帰納法

の仮定より有限次元であることを用いて, このコホモロジー

群を調和型式の空間 f^k により表現すること

が出来る。この時 $H_{(2)}^*(X \setminus \{0\}; H)$ が

$$(*) \quad \int \|t^k h(t)\|^2 dt / t$$

(K は $f = \bigoplus f^k$ の endomorphism) なる 1/L

に関して L^2 になる f と f -valued forms

(of E) のコホモロジー群と一致することを示し得る。

従って intersection cohomology 群の特徴付けに関する Goresky - MacPherson の一結果に拠る,

$$(**) H_{(2)}^k(X \setminus \{0\}; H) \cong \begin{cases} f^k & (k < n) \\ 0 & (k \geq n) \end{cases}$$

を示せば, $L^*(H)$ と πH が quasi-isomorphic

であることが証明されたこととなる。

さて $(**)$ の証明には, $1/L/L$ の

定義 $(*)$ により, K の固有値の 評価 がある。

は良い, そのような評価は

(i) $H^k(\pi H)_0$ が H のモジュラーに拠って

定まる部分 Koszul 複体 $\Pi(N_1, \dots, N_n)$

のコホモロジー群として計算されること

及び

- (ii) $H^k(\pi(N_1, \dots, N_n))$ の混合ホッジ構造の weight が 高 $w+k$ (w は H の weight) であること (Purity Theorem)

の2つの結果を用いることに拠り得られる。

以上の議論の詳細に関しては [K-K, 3] を

参照されたい。

References

[C-K-S] Cattani, E., A. Kaplan and W. Schmid :

L_2 and intersection cohomologies for
a polarizable variation of Hodge
structure . To appear.

[K-K, 1] Kashiwara, M. and T. Kawai : The

Poincaré lemma for a variation of
polarized Hodge structure . Proc. Japan
Acad., 61 (1985), 164-167.

[K-K, 2] ——— : Hodge structure and

holonomic systems . Proc. Japan Acad.
62 (1986), 1-4.

[K-K, 3] The Poincaré lemma for variations

of Hodge structure . To appear.

[Z] Zucker, S. : Hodge theory with
degenerating coefficients : L_2 cohomology
in the Poincaré metric . Ann. of Math.
109 (1979) , 415-476.