

On characteristic varieties and the classification of primitive ideals in enveloping algebra of a semi-simple Lie algebra

W. Borho (Univ. GH Wuppertal)

J.-L. Brylinski (Brown Univ.)

(谷崎俊之記)

講演は Borho 氏が前半 50 分, Brylinski 氏が後半 50 分で, 内容は主に以下 $\S 1 \sim \S 5$ が前半に, また $\S 6$ と $\S 3$ の Proposition 3.1 が後半に対応している。本稿では講演時間以外に両氏(特に Brylinski 氏)から教わった事も含めて, なるべく完全な証明を付けるように努めた。また内容の配列や記号の選り方も必ずしも講演者のものと一致していない。これは記録者としての越権行為かもしれないが御容赦頂きたい。尚当然ながら文中の誤りは全て記録者の責任である。

$\S 1$. primitive ideal

[1.1] $\mathfrak{g}$ を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の半単純 Lie 環, $U(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の universal enveloping algebra とする。既約 $U(\mathfrak{g})$ -module M に対して $\mathfrak{a}$ の annihilator $\text{Ann } M = \{u \in U(\mathfrak{g}) \mid u \cdot M = (0)\}$ は $U(\mathfrak{g})$ の両側

ideal になるが, このような ideal $\in U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal といふ。 primitive ideal の分類は近年多くの人の貢献により一応の完成を見た。それは Weyl 群に関する完全に combinatorial な言葉で述べられる。我々の目標は, この primitive ideal の分類をより幾何学的に理解する事である。簡単に説明すると, まず trivial central character を持つ primitive ideal I に対してその characteristic variety $\in$ flag manifold $G/B = B$ の cotangent bundle T^*B の subvariety として定義する。我々の main conjecture はこの characteristic variety が既約であるといふものであるが, この事は ^(trivial) central character を持つ primitive ideal はその characteristic variety により特徴付けられるといふ事が出てくる (see §6)。ここではこの main conjecture の証明に向けてもう少し弱い結果を示す。

1.2 本論に入る前に, 記号の導入を兼ねて primitive ideal の combinatorial な記述について簡単にみておこう。 primitive ideal 全体の集合を $\mathcal{P}$ と書く事にする。 Schur の lemma により既約 $U(\mathfrak{g})$ -module M は central character を持つ。 すなわち $U(\mathfrak{g})$ の中心 $\mathcal{Z}$ とあるとき, algebra homomorphism $\mathcal{Z} \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}$ (central character) が存在して $z \cdot M = \chi(z) \cdot \text{id}_M$ ($z \in \mathcal{Z}$) となる。 central character χ に対して

$$\mathcal{P}_\chi = \{ \text{Ann } M \mid M \text{ は central character } \chi \text{ を持つ既約 } U(\mathfrak{g})\text{-module} \}$$

とあるとき $\chi = \sum_x \chi_x$ である。 χ_0 は Trivial central character (i.e. $\ker \chi_0 = \mathbb{Z} \cap \mathfrak{g} \cup \mathfrak{g}$) として $\chi_0 = \chi_x$ とおく。簡単のため今後 χ_0 のみに考察する事にする。

1.3 $\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{g}$ の Borel subalgebra, $\mathfrak{d}$ は $\mathfrak{b}$ に含まれる Cartan subalgebra とする。 $\mathfrak{b}$ に対して $(\mathfrak{g}, \mathfrak{d})$ の正 root 系 Δ^+ を定め正 root α と α の半分 $\rho \in \mathfrak{d}^*$ と置く。 $\lambda \in \mathfrak{d}^*$ に対して $\lambda - \rho$ は highest weight とする Verma module $V(\lambda)$, L は simple quotient $L(\lambda)$ とする。 Duflo [D] は $\chi = \{ \text{Ann } L(\lambda) \mid \lambda \in \mathfrak{d}^* \}$ を示したが, 特に central character が trivial な場合を考えて次を得る。

Proposition 1.1 (Duflo [D])

$$\chi_0 = \{ \text{Ann } L(-w\rho) \mid w \in W \}$$

($\mathbb{Z}$ は $(\mathfrak{g}, \mathfrak{d})$ の Weyl 群 W と置く。)

Notation $w \in W$ に対して

$$M_w = M(-w\rho), L_w = L(-w\rho), I_w = \text{Ann } L_w$$

1.4 $I_w = I_y$ となるための条件を求める事に帰着されたが, Joseph, Vogan はさらにこの問題が M_w の組成列を決定する事に帰着される事を示した ([J1], [V])。 M_w の組成列については Jantzen 等多くの人の研究があったが, Kazhdan-Lusztig [KL] がいわゆる Kazhdan-Lusztig 多項式を導入して, 組成列を具体的に書き表す方法を予想として提出した。 さらにこの Kazhdan-Lusztig 予想は Brylinski -

Kashiwara [BK], Beilinson-Bernstein [BeBe] により証明された。

という訳で、上に名前をあげた人達の結果をあわせて次を得る。

Theorem 1.2

$$I_M = I_Y \iff M \simeq Y$$

(ここで $\simeq$ は [KL] で定義された $\mathcal{W}$ の同値関係)

以上により $\mathcal{W}_0$ は同値類の集合 $\mathcal{W}/\simeq$ で parametrize される事がわかった。本当は $\simeq$ の定義を述べないといけないのだが、やや煩雑でまた以下の議論に直接必要ないので省略する。

§2. Beilinson-Bernstein 理論

[2.1] Brylinski-Kashiwara [BK], Beilinson-Bernstein [BeBe]

による Kazhdan-Lusztig 予想の証明にみるように

flag manifold $\mathcal{F}$ の $\mathcal{D}$ -Module (特に regular holonomic system) を考察する事が表現論のある種の問題に対して決定的役割を果たす。我々の立場は、ある種 $\mathcal{D}$ -Module, 特にその characteristic variety を考察する事により primitive ideal の研究を行おうというものであるが、まず本節ではその基礎となる Beilinson-Bernstein 理論 ($U(\mathfrak{g})$ -module と $\mathcal{D}$ -Module の対応)

に $\cap$ して置く。

[2.2] $G \in \text{Lie}$ 環 $\mathfrak{g}$ に持つ ^{半単純} 連結線型代数群, $B \in G$ の Borel 部分群 ($\text{Lie } B = \mathfrak{b}$) とする。また flag variety $B = G/B$ 上の algebraic differential operator $\alpha \rightarrow \mathfrak{D}_B$ とする。 G の B への作用により algebra isomorphism $U(\mathfrak{g}) \rightarrow \Gamma(B, \mathfrak{D}_B)$ が定まるが, これは surjective である ([BeBe]).

Definition abelian category $\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \mathcal{M}(\mathfrak{g})$ は次のように定める。

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \{\text{coherent } \mathfrak{D}_B\text{-Module}\}$$

$$\mathcal{M}(\mathfrak{g}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{finitely generated } U(\mathfrak{g})\text{-module with trivial} \\ \text{central character} \end{array} \right\}$$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}$ とし,

Theorem 2.1 ([BeBe])

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M}(\mathfrak{g}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{M} & \xrightarrow{\quad} & \Gamma(B, \mathfrak{M}) \\ \mathfrak{D}_B \otimes_{U(\mathfrak{g})} M & \xleftarrow{\quad} & M \end{array}$$

[2.3] $H \in G$ の closed subgroup ($\text{Lie } H = \mathfrak{h}$) とする。

Definition $U(\mathfrak{g})$ -module M に, 次の条件 (a) (b) (c) が満たされ H の線型作用が与えられるとき, $M \in$ (algebraic) $(\mathfrak{g}, H)$ -module とする。

(a) H の M への作用は有理的。すなわち任意の $m \in M$ に対して, m を含む H -不変な部分空間 V が存在して $H \rightarrow GL(V)$ は代数群として有限次元の表現型。

(b) (a) により H の作用を微分して $\mathfrak{h}$ に環としての M への作用が決まるが, これはもともと $\mathfrak{g}$ の M への作用を $\mathfrak{h}$ に制限したものと一致する。

(c) $\forall R \in H, \forall A \in \mathfrak{g}, \forall m \in M$ に対して

$$R \cdot (A \cdot m) = (\text{Ad}(R)A) \cdot (R \cdot m)$$

Definition

$$M(\mathfrak{g}, H) = \left\{ \begin{array}{l} (\mathfrak{g}, H)\text{-module which is finitely generated as} \\ \text{a } U(\mathfrak{g})\text{-module and has trivial central character} \end{array} \right\}$$

次に $M(\mathfrak{g}, H)$ と対応する coherent $\mathcal{D}_B$ -Module の category $\mathcal{M}(\mathfrak{g}, H)$ を与える。これは Th. 2.1 の対応のもとで $M(\mathfrak{g}, H)$ に対応するものと思っても差しつかえないが, 一応 intrinsic な定義を述べておく。まず記号を用意する。

$$\begin{array}{ccc} H \times B & \xrightarrow{P_2} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathfrak{h}, x) & \longmapsto & x \end{array} \quad \begin{array}{ccc} H \times B & \xrightarrow{\sigma} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathfrak{h}, x) & \longmapsto & R \cdot x \end{array} \quad \begin{array}{ccc} H \times H & \xrightarrow{\mu} & H \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2) & \longmapsto & R_1 R_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} H \times H \times B & \xrightarrow{P_3} & H \times B \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, x) & \longmapsto & (R_2, x) \end{array}$$

Definition $\mathcal{D}_B$ -Module M に対して, $\mathcal{D}_{H \times B}$ -Module $\tau(\tau)$ の同型

$$\mathcal{G}^* M \xrightarrow{\mathcal{G}} P_2^* M$$

τ 次 a cocycle condition を満たすものが存在する τ である

す, $M \in (\mathcal{D}_B, H)$ -Module である。

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G} \circ (1_H \times \mathcal{G}))^* M & \xrightarrow{(1_H \times \mathcal{G})^* \mathcal{G}} & (P_2 \circ (1_H \times \mathcal{G}))^* M \\ \parallel & & \parallel \\ (\mathcal{G} \circ (u \times 1_B))^* M & & (\mathcal{G} \circ P_{23})^* M \\ & \searrow (u \times 1_B)^* \mathcal{G} & \downarrow P_{23}^* \mathcal{G} \\ & & (P_2 \circ P_{23})^* M \\ & & \parallel \\ & & (P_2 \circ (u \times 1_B))^* M \end{array}$$

Definition

$$\mathcal{U}(\mathcal{G}, H) = \left\{ (\mathcal{D}_B, H)\text{-Module which is coherent} \right. \\ \left. \text{as a } \mathcal{D}_B\text{-Module} \right\}$$

Theorem 2.2 ([BeBe])

Th. 2.1 の対応 $\alpha \in \tau$

$$\mathcal{U}(\mathcal{G}, H) \xrightarrow{\sim} M(\mathcal{G}, H)$$

Remark 2.3 $(\mathcal{D}_B, H)$ -Module M があるとき,

$$\mathcal{G}^* M \xrightarrow{\mathcal{G}} P_2^* M \text{ に対して } \tau: M \longrightarrow \mathcal{G}_+ P_2^* M \text{ が定まる。}$$

τ は a global section $\tau: M \longrightarrow R(H) \otimes_{\mathcal{D}_B} M$ ($R(H) = \Gamma(H, \mathcal{O}_H)$),

$M = \Gamma(\mathcal{D}_B, M)$ が定まる。これは H の M への作用に対応する

$RCH)$ a M a coaction である。 ┘

§3. characteristic variety と associated variety

[3.1] $M \in \mathcal{M}(\mathfrak{g})$ に対し $\subset \mathbb{A}^n$ a characteristic variety $Ch(M)$ が, B a cotangent bundle T^*B a subvariety と $\subset \mathbb{A}^n$ 定義される。簡単に定義を復習しよう。 M a good filtration $\{M_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ に対し $\subset \text{gr } \mathbb{D}_B$ -Module $\text{gr } M$ が得られる。自然写射 $T^*B \xrightarrow{\pi} B$ に対し $\subset \pi_*(\mathcal{O}_{T^*B}) = \text{gr } \mathbb{D}_B$ に注意すると, $\text{gr } M$ は T^*B 上の coherent sheaf と考える (正確には $\mathcal{O}_{T^*B} \otimes_{\pi^*(\text{gr } \mathbb{D}_B)} \pi^*(\text{gr } M)$ を考える)。このとき $Ch(M) := \text{supp}(\text{gr } M)$ である。また $M \in \mathcal{M}(\mathfrak{g})$ に対し $\subset$ は, 対応する coherent $\mathbb{D}_B$ -Module $\mathcal{M} = \mathbb{D}_B \otimes_{U(\mathfrak{g})} M$ a characteristic variety $\subset M$ a characteristic variety と呼ぶ $Ch(M)$ と書く。

$M \in \mathcal{M}(\mathfrak{g})$ の good filtration を取ると, $\text{gr } M$ は $\text{gr } U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ 上の有限生成加群である。 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ は Killing form により同一視 $\subset \text{gr } M$ に対応する $\mathfrak{g}$ 上の coherent sheaf の support $\subset M$ a associated variety と呼ぶ, $V(M)$ と書く。

Remark 上の段々とは [KT] の用語法とは一致しない。 [KT] では $V(M)$ $\subset M$ a characteristic variety と呼ぶ, $Ch(M)$ と書くことはない。

3.2 B の Lie 環 $\mathfrak{b}$ の nilpotent radical $\mathfrak{z} \in \mathfrak{m}^+$ と書く。 $\mathfrak{g}$ の Killing form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ により $\mathfrak{m}^+ = \{A \in \mathfrak{g} \mid \langle A, \mathfrak{z} \rangle = 0\}$ となる。自然に

$$T^*\mathfrak{B} = \{(gB, A) \in \mathfrak{B} \times \mathfrak{g} \mid g^{-1}A \in \mathfrak{m}^+\} = G \times^B \mathfrak{m}^+$$

と同一視される。第2成分の射影により自然に projective morphism $T^*\mathfrak{B} \xrightarrow{\delta} \mathfrak{g}$ が得られる。

Proposition 3.1 ([BoBr2], see [KT])

$$M \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}) \iff \delta(\text{Ch}(M)) = \text{VCM} \quad \text{」}$$

(記録係注 Brylinski A の講演では、この証明の概略を (1) へてが、[KT] の $\mathfrak{m}$ と同じ $\mathfrak{z}$ の $\mathfrak{z}$ の $\mathfrak{z}$ は省略する。)

3.3 G 上の involution θ が与えられているとする。 K は G の部分群で $G^\theta \supset K \supset (G^\theta)_0$ なるものとする。このとき、

Proposition 3.2

(i) ([BeBe])

$$M \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}, K) \iff M \text{ は regular Kohnen}$$

(ii) ([BeBe], [BK])

$$M \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}, B) \iff M \text{ は regular Kohnen} \quad \text{」}$$

M が Kohnen である事 (i.e. $\dim \text{Ch}(M) = \dim B$) は易しいが、regular Kohnen である事は non-trivial である。ここでは Kohnen である事を示す。よく知られているように、 B 上の B -orbit は W で parametrize できる。あるいは

$B_w = BwB/B$ とおくと $B = \bigsqcup_{w \in W} B_w$. 特に $|B \setminus B| < \infty$. また $[M]$ により $|K \setminus B| < \infty$. 以下の事を示せばよい。

Lemma 3.3. $H \in G$ a closed subgroup とする。このとき

$$m \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, H) \Rightarrow \text{Ch}(m) \subset \delta^{-1}(\mathfrak{f}^\perp) = \bigsqcup_{O: H\text{-orbit}} T_O^* B$$

$$\left(\begin{array}{l} T_O^* B \text{ は } O \text{ の conormal bundle} \\ \mathfrak{f}^\perp = \{x \in \mathfrak{g} \mid \langle x, \mathfrak{f} \rangle = 0\} \end{array} \right)$$

特に $|H \setminus B| < \infty$ ならば m は Kohnen 的

(証明) $M = \Gamma(B, \mathcal{U}) \in \mathcal{M}(\mathfrak{g}, H)$ とする。 M は有限生成である。 M の H -不変な有限次元部分空間 M_0 として $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot M_0 = M$ となるものがあつた。 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の filtration $\{\mathcal{U}_i(\mathfrak{g})\}_i$ により $M_i = \mathcal{U}_i(\mathfrak{g}) \cdot M_0$ とおくと $\{M_i\}_i$ は M の good filtration である。 $A \in \mathfrak{f} = \text{Lie } H$ として $A \cdot M_i \subset M_i$, かつ $\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{g} \cap M = 0$. $\therefore \text{Ch}(M) \subset \mathfrak{f}^\perp$

$$\therefore \text{Ch}(M) \subset \delta^{-1}(\mathfrak{f}^\perp) = \bigsqcup_{O: H\text{-orbit}} T_O^* B$$

§4. G-saturation theorem

4.1 一般に両側 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -module ($\mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$ -module) M を単に左 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -module と思つて $T \in M^2$ と書く事にする。

primitive ideal I_m は両側 ideal であつて $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I_m \in \mathcal{M}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$

である。 $(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I_m)^2 \in \mathcal{M}(\mathfrak{g})$ の characteristic variety

$\text{Ch}((\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I_m)^2) (\subset T^*B)$ が我々の考察の主要対象である。

Theorem 4.1 (G -saturation theorem, [BoBr2])

$$\mathrm{Ch}((U(\mathfrak{g})/I_N)^e) = G \cdot \mathrm{Ch}(L_N) = G^B \times V(L_{N^{-1}})$$

$T^*B = G^B \times m^+$ には G が自然に作用して 113。また $V(L_{N^{-1}})$ が m^+ に含まれて B -不変な事は定義から容易に示せるが, $\mathrm{Ch}(L_{N^{-1}}) \subset \bigcup_{\mathfrak{g}} T_{B, \mathfrak{g}}^* B = \delta^{-1}(m^+)$
 (⊙ Lemma 3.3) と Prop. 3.1 からわかる。

Corollary 4.2

$$(i) I_N \subset I_{N'} \Leftrightarrow V(L_{N^{-1}}) \subset V(L_{N'^{-1}})$$

$$(ii) V(L_{N'^{-1}}) \subset V(L_N) \Leftrightarrow \mathrm{Ch}((U(\mathfrak{g})/I_{N'})^e) \subset \mathrm{Ch}((U(\mathfrak{g})/I_N)^e)$$

G/B は 単連結な 2

Corollary 4.3

$$\begin{array}{ccc}
 \{V(L_{N^{-1}}) \text{ の既約成分}\} & \xleftrightarrow{1:1} & \{\mathrm{Ch}((U(\mathfrak{g})/I_N)^e) \text{ の既約成分}\} \\
 \cup & & \cup \\
 V & \longleftrightarrow & G^B \times V
 \end{array}$$

また Proposition 3.1 から

Corollary 4.4 $V((U(\mathfrak{g})/I_N)^e) = G \cdot V(L_N) = G \cdot V(L_{N^{-1}})$

[4.2] 詳しく証明は §5 にまわして, Theorem 4.1 の証明の 3 針を述べよう。

$G \times G$ に involution $\theta \in \theta(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$ により定めるとき, 固定部分群は $\Delta G = \{(g, g) \mid g \in G\}$ である。 $G \times G$ の flag variety $B \times B$ の ΔG -orbit の分解は

$$B \times B = \bigsqcup_{w \in W} Z_w \quad (Z_w = \Delta G \cdot (wB, eB))$$

で与えられる。 B の $B \times B$ の Δ -埋め込み $B \hookrightarrow B \times B$ を

$j(qB) = (qB, eB)$ により定義するとき、次が成り立つ。

Proposition 4.5 j による Δ -Module と $(\mathbb{C} \times \mathbb{C})$ 上の j^* により

$$\mathcal{U}(q \times q, \Delta G) \xrightarrow{j^*} \mathcal{U}(q, B)$$

Remark 4.6 実は $\mathbb{C}$ 上

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}(q \times q, \Delta G) & \xrightarrow{j^*} & \mathcal{U}(q, B) \\ \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \\ M(q \times q, \Delta G) & \xrightarrow{\quad} & M(q, B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \xrightarrow{\quad} & M(\mathcal{F})^\vee \otimes_{\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}} H \end{array}$$

である。 $\mathbb{C}$ 上で上から下に向かう 2 つの functor は $\mathbb{C}$ 上で与えられる。 $M(\mathcal{F})^\vee$ は $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(M(\mathcal{F}), \mathbb{C})$ 中の $\mathbb{C}$ -finite vector 全体を $\mathbb{C}$ 上の $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ -module。 以下は以下の議論では用いない。

$L_w \in M(q, B)$ に対応する $\mathcal{U}(q, B)$ の object を $\mathcal{L}_w$ と書く。 また $\mathcal{H}_w \in \mathcal{U}(q \times q, \Delta G)$ を $j^* \mathcal{H}_w = \mathcal{L}_w$ により定義する。 $\mathbb{C}$ 上

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_w & \longleftrightarrow & \mathcal{L}_w \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_w & \longleftrightarrow & L_w \end{array}$$

ように $\mathbb{C}$ 上とある。

$\mathcal{L}_w$ は B_w に $\text{regular holonomic } \Delta_B$ -Module として $(\mathcal{L}_w \in \mathcal{U}(q, B))$ 中で simple であるとして特徴付けられる ([BK], [BeBe])。

同様に $\mathcal{H}_w$ は $\overline{Z}_w$ に support を持つ regular holonomic $\mathbb{D}_{B \times B}$ -Module の $\mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G)$ 中で simple なものを w によって特徴付ける。
 する。

Lemma 3.3 により,

$$\begin{cases} \text{Ch}(\mathcal{H}) \subset \bigcup_{w \in W} \overline{T_{Z_w}^*(B \times B)} & (\text{for } \mathcal{H} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G)) \\ \text{Ch}(\mathcal{L}) \subset \bigcup_{w \in W} \overline{T_{B_w}^*(B \times B)} & (\text{for } \mathcal{L} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, B)) \end{cases}$$

であった。 $\Sigma = \Sigma'$ $\mathcal{H} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G)$, $\mathcal{L} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, B)$ に対して

$$\begin{cases} \text{Ch}(\mathcal{H}) = \bigcup_{w \in \Sigma_1(\mathcal{H})} \overline{T_{Z_w}^*(B \times B)} \\ \text{Ch}(\mathcal{L}) = \bigcup_{w \in \Sigma_2(\mathcal{L})} \overline{T_{B_w}^*(B \times B)} \end{cases}$$

により W の部分集合 $\Sigma_1(\mathcal{H})$, $\Sigma_2(\mathcal{L})$ が定まる。

Proposition 4.7

$\mathcal{H} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G)$, $\mathcal{L} = j^+ \mathcal{H} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, B)$ とすると

$$\Sigma_1(\mathcal{H}) = \Sigma_2(\mathcal{L})$$

Conjecture 4.8 ([BoBr2], [KT])

$$G = \text{SL}_n(\mathbb{C}) \implies \Sigma_2(\mathcal{L}_w) = \{w\} \quad (\forall w \in W)$$

$$(\text{i.e. } \text{Ch}(\mathcal{L}_w) = \overline{T_{B_w}^*(B)})$$

[4.3] 一般に $H \in M(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G)$ かつ $H^2 \in M(\mathfrak{g})$ である

(これは定義から容易にわかるが次の Proposition からわかる)。

$\Sigma = \Sigma'$ $\text{Ch}(H) \subset T^*(B \times B) = T^*B \times T^*B$ と $\text{Ch}(H^2) \subset T^*B$ の

関係を示す。 H, H^2 に対して $\mathcal{H} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta G)$, $\mathcal{H}^2 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$

を定めるとき, $\mathcal{H}^2 = p_{1*}(\mathcal{H})$ である ($B \times B \xrightarrow{p_1} B$ は projection)。

Remark 4.9 蛇足であるが、一般に $X \xrightarrow{f} Y$ と $\mathcal{D}_X$ -Module $\mathcal{H}$ があつて $\tau \in f_* \mathcal{H}$ は $\mathcal{D}_Y$ -Module に $\tau \in \tau_! \tau$ 。この場合は P_1 が projection τ の $\tau_!$ $P_1 \mathcal{H}$ に $\mathcal{D}_B$ -Module structure が自然に生まれるのである。」

Proposition 4.10 $B \times B \xrightarrow{P_1} B$, $T^*(B \times B) = T^*B \times T^*B \xrightarrow{\pi_1} T^*B$ は projection となる。 $\mathcal{H} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta \mathfrak{g})$ $\tau \in P_1 \mathcal{H} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ かつ $\tau \in \text{Ch}(P_1 \mathcal{H}) \subset \pi_1(\text{Ch}(\mathcal{H}))$ 。 $\perp$

$w \in W$ に対して $\tau \in \text{Ch}(w) = \text{Ad}(B)(\tau \cap w(\tau)) (= \delta(T_{B_w}^* B))$ とある。

Lemma 4.11 $w \in W$ となる。

$$\text{ci) } \pi_1(T_{Z_w}^*(B \times B)) = G \cdot T_{B_w}^* B = G^{\frac{B}{w}} M(w^{-1})$$

$$\text{cid) } \pi_1(\overline{T_{Z_w}^*(B \times B)}) = \overline{G \cdot T_{B_w}^* B} = G \cdot \overline{T_{B_w}^* B} = G^{\frac{B}{w}} \overline{M(w^{-1})} \quad \perp$$

Proposition 4.12

$$H \in \mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta \mathfrak{g}), I = \text{Ann}(H^e) \Rightarrow \text{Ch}(H^e) = \text{Ch}((\cup \mathfrak{g})/I)^e \quad \perp$$

Proposition 4.13 $\text{Ann}(H_w^e) = I_w (= \text{Ann } L_w) \quad \perp$

4.4 以上を Theorem 4.1 が導くことができる事を示す。

$$\text{Ch}((\cup \mathfrak{g})/I_w)^e = \text{Ch}(H_w^e) \quad (\odot \text{ Prop. 4.12, 4.13})$$

$$= \text{Ch}(P_1 \mathcal{H}_w)$$

$$\subset \pi_1(\text{Ch}(\mathcal{H}_w)) \quad (\odot \text{ Prop. 4.10})$$

$$= \bigcup_{y \in \Sigma_2(\mathcal{H}_w)} \pi_1(\overline{T_{Z_y}^*(B \times B)})$$

$$= \bigcup_{y \in \Sigma_1(\mathcal{H}_w)} G \cdot \overline{T_{B_y}^* B} \quad (\odot \text{ Prop. 4.11, Lem. 4.11})$$

$$= G \cdot \text{Ch}(\mathcal{L}_w)$$

$$= G \cdot \text{Ch}(L_w)$$

$\mathcal{L}$ に $(U(\mathfrak{g})/I_w)^{\mathfrak{e}} \longrightarrow L_w$ があるから $\text{Ch}((U(\mathfrak{g})/I_w)^{\mathfrak{e}}) \supset \text{Ch}(L_w)$ 。

$\text{Ch}((U(\mathfrak{g})/I_w)^{\mathfrak{e}})$ は G -不変だから $\text{Ch}((U(\mathfrak{g})/I_w)^{\mathfrak{e}}) \supset G \cdot \text{Ch}(L_w)$ 。

$$\therefore \text{Ch}((U(\mathfrak{g})/I_w)^{\mathfrak{e}}) = G \cdot \text{Ch}(L_w)$$

$$\text{すなわち } G \cdot \text{Ch}(L_w) = \bigcup_{y \in \Sigma_2(\mathcal{L}_w)} G \cdot \overline{T_{\mathcal{B}}^+ \mathcal{B}} = G^{\mathcal{B}} \left(\bigcup_{y \in \Sigma_2(\mathcal{L}_w)} \overline{m(y^{-1})} \right) \text{ である}$$

($\odot$ Lem 4.11)。そして $V(L_{w^{-1}}) = \bigcup_{y \in \Sigma_2(\mathcal{L}_w)} \overline{m(y^{-1})}$ であるから すなわち 。

$$V(L_{w^{-1}}) = \delta(\text{Ch}(L_{w^{-1}})) = \bigcup_{z \in \Sigma_2(\mathcal{L}_{w^{-1}})} \delta(\overline{T_{\mathcal{B}}^+ \mathcal{B}}) = \bigcup_{z \in \Sigma_2(\mathcal{L}_{w^{-1}})} \overline{m(z)}$$

だから $\Sigma_2(\mathcal{L}_{w^{-1}}) = (\Sigma_2(\mathcal{L}_w))^{-1}$ であるから すなわち 。

$$\Sigma_1(\mathcal{H}_{w^{-1}}) = (\Sigma_1(\mathcal{H}_w))^{-1} \text{ であるから}$$

$\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ 上の involution $f \in (\mathfrak{g}_1 \mathcal{B}, \mathfrak{g}_2 \mathcal{B}) \xrightarrow{f} (\mathfrak{g}_2 \mathcal{B}, \mathfrak{g}_1 \mathcal{B})$ により定義するとき $f(Z_w) = Z_{w^{-1}}$ 。そして $\mathcal{H}_w$ の特徴付けから $f^*(\mathcal{H}_w) = \mathcal{H}_{w^{-1}}$ 。 $\therefore \Sigma_1(\mathcal{H}_{w^{-1}}) = (\Sigma_1(\mathcal{H}_w))^{-1}$

以上で 4.2, 4.3 の証明は $\text{modulo } \odot$ Theorem 4.1 が証明された。

§5. Detailed proof of the G -saturation theorem.

本節では, G -saturation theorem の証明に必要な 4.2, 4.3 における諸結果の証明を行う。

5.1 Proposition 4.5, 4.7

次の明らかな Lemma が証明の key point である。

Lemma 5.1 埋め込み $B \hookrightarrow B \times B$ ($gB \mapsto (gB, eB)$) により, Z_m と $j(B)$ は transversal に交わり, $j^{-1}(Z_m) = B_m$ である事を考慮すると Proposition 4.5, 4.7 は直観的には自明な事にも思えるが, もう少し説明を加えよう。

Riemann-Hilbert 対応を用いるとわかりやすいので, $\mathcal{D}$ は $\mathcal{Y}$ に $\mathcal{D}$ を説明する (See [K1])。今 $\mathcal{D}$ の $\mathcal{D}$ を $\mathcal{D}$ - algebraic $\mathcal{D}$ category で語ると $\mathcal{D}$ は $\mathcal{D}$ projective $\mathcal{D}$ の $\mathcal{D}$ complex analytic $\mathcal{D}$ category で考えても同じである事を断り, $\mathcal{D}$ (Serre の GAGA)。

一般に complex manifold X に対し, $\mathcal{D}_X$ -Module (resp. $\mathcal{D}_X$ -Module) の bounded complex の cohomology sheaf は regular holonomic (resp. constructible) な $\mathcal{D}$ の $\mathcal{D}$ derived category $\mathcal{D}_{\text{rh}}^b(\mathcal{D}_X)$ (resp. $\mathcal{D}_c^b(\mathcal{D}_X)$) と $\mathcal{D}$ 。このとき

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{\text{rh}}^b(\mathcal{D}_X) & \xrightarrow{\text{DR}} & \mathcal{D}_c^b(\mathcal{D}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}^* & \xrightarrow{\quad} & \text{DR}(\mathcal{M}^*) = \mathcal{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X, \mathcal{M}^*), \end{array}$$

また $\mathcal{D}$ に対し $\mathcal{D}$ の $\mathcal{D}$

$$\{\text{regular holonomic } \mathcal{D}_X\text{-Module}\} \xrightarrow{\text{DR}} \{\text{perverse complex on } X\}$$

である。さらに $X \xrightarrow{f} Y$ が holomorphic $\mathcal{D}$ とき

$$\begin{array}{ccc}
 D_{\text{DR}}^b(\mathcal{O}_Y) & \xrightarrow{\sim} & D_c^b(\mathbb{C}_Y) \\
 \mathbb{L}f^* \downarrow & \curvearrowright & \downarrow S^![-2(\dim X - \dim Y)] \\
 D_{\text{DR}}^b(\mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\sim} & D_c^b(\mathbb{C}_X)
 \end{array}
 \quad \uparrow \text{ (chain complex } \in \mathbb{Z} \text{ a degree a shift) }$$

とある。

元に戻って

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(\mathcal{O}_Y \times \mathcal{O}_Y, \Delta_G) &= \{ \text{perverse complex on } \mathcal{B} \times \mathcal{B} \text{ with } \Delta_G\text{-action} \} \\
 \mathcal{F}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{B}) &= \{ \quad \quad \quad \mathcal{B} \quad \quad \mathcal{B} \quad \quad \}
 \end{aligned}$$

とあると、上の事は

$$\mathcal{U}(\mathcal{O}_Y \times \mathcal{O}_Y, \Delta_G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(\mathcal{O}_Y \times \mathcal{O}_Y, \Delta_G), \quad \mathcal{U}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{B})$$

である。

$$\begin{aligned}
 \{ \mathcal{F}(\mathcal{O}_Y \times \mathcal{O}_Y, \Delta_G) \text{ a simple object} \} &= \{ \pi_{\mathbb{C}_{Z_w}}[-\text{codim } Z_w] \mid w \in W \} \\
 \{ \mathcal{F}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{B}) \quad \quad \quad \} &= \{ \pi_{\mathbb{C}_{B_w}}[-\text{codim } B_w] \mid w \in W \}
 \end{aligned}$$

であるが、~~最~~ $\mathbb{P}^1$ に引いた Transversality (Lemma 5.1) と

$\mathcal{B} \times \mathcal{B} = \bigsqcup_w Z_w$, $\mathcal{B} = \bigsqcup_w B_w$ が Whitney stratification である事は、

$j^!(\pi_{\mathbb{C}_{Z_w}}) = \pi_{\mathbb{C}_{B_w}}$ が成り立つ。 $\pi_{\mathbb{C}_{Z_w}}$, $\pi_{\mathbb{C}_{B_w}}$ は self-dual である。

$j^!(\pi_{\mathbb{C}_{Z_w}}[-\text{codim } Z_w])[\geq \dim \mathcal{B}] = \pi_{\mathbb{C}_{B_w}}[-\text{codim } B_w]$ とある。 また

$F \in \mathcal{F}(\mathcal{O}_Y \times \mathcal{O}_Y, \Delta_G)$ に対して $j^*(F)$ は $\mathcal{B}$ -action を持つので $j^*(F) \in \mathcal{F}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{B})$ 。

従って

$$\mathcal{F}(\mathcal{O}_Y \times \mathcal{O}_Y, \Delta_G) \xrightarrow{j^* = j^![\geq \dim \mathcal{B}]} \mathcal{F}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{B})$$

この j^* である functor は Grothendieck 群 の 同型 を 与 える。

よって Riemann-Hilbert 対応 により $\mathbb{L}j^* = j^*$ である。

$\text{For } i^{*} \circ j^{*} (O_B, j^{*} m) = 0 \ (i \neq 0, m \in \mathcal{M}(G \times G, \Delta G))$ なる

$$\mathcal{M}(G \times G, \Delta G) \xrightarrow{j^{*}} \mathcal{M}(G, B)$$

は Grothendieck 群の同型を引き起こす。

よって j^{*} の同値性を示すには、任意の $m \in \mathcal{M}(G, B)$ に対して $j^{*} \mathcal{H} = m$ となる $\mathcal{H} \in \mathcal{M}(G \times G, \Delta G)$ の存在を示せばよい。
 11. $G \times B \xrightarrow{g} B \ ((g, x) \mapsto g^{-1}x)$ に対して $g^{*}m$ を考える。
 B の $G \times B$ への作用 $b \cdot (g, x) = (gb^{-1}, x)$ により $g^{*}m$ は B -action を持つ。
 $G \times B \xrightarrow{r} G/B \times B = B \times B \ ((g, x) \mapsto (gB, x))$ は B -principal fiber bundle となる。
 $B \times B$ -Module $\mathcal{H}$ が存在して $r^{*} \mathcal{H} = g^{*}m$ 。また G の $G \times B$ への action $g \cdot (g', x) = (gg', g \cdot x)$ により $g^{*}m$ は G -action を持つのである、 $\mathcal{H}$ は ΔG -action を持つ。この $\mathcal{H}$ が求まるものであることは容易にわかる。以上より Proposition 4.5 が示された。

次に Proposition 4.7 を示す。 $B \xrightarrow{j} B \times B$ により自然に

$$\begin{aligned} T^*(B \times B) \times_{B \times B} B &= (T^*B) \times \eta^* \xrightarrow{\varphi} T^*B \\ T^*(B \times B) \times_{B \times B} B &= (T^*B) \times \eta^* \xrightarrow{\omega} T^*(B \times B) \end{aligned}$$

が定まる。 $\mathcal{H} \in \mathcal{M}(G \times G, \Delta G)$ ならば $\text{Ch}(\mathcal{H}) \subset \coprod_{\omega} T^*_{Z_{\omega}}(B \times B)$ となる。
 $\omega^{-1}(\text{Ch}(\mathcal{H})) \xrightarrow{\varphi} T^*B$ は finite map。よって [K2] により $\text{Ch}(j^{*} \mathcal{H}) = \varphi(\omega^{-1}(\text{Ch}(\mathcal{H})))$ となり、Proposition 4.7 が従う。 q.e.d.

5.2 Proposition 4.10, Lemma 4.11

Lemma 5.2

$$\bigsqcup_{w \in W} T_{Z_w}^*(B \times B) \xrightarrow{\pi_1|_{\bigsqcup_{w \in W} T_{Z_w}^*(B \times B)}} T^*B$$

is projective morphism

$$(\text{BIA}) \quad \mathcal{P} = \{(x, -x) \mid x \in \mathcal{O}_B\} \subset \mathcal{O}_B \times \mathcal{O}_B \quad \text{is } \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{O}_B$$

$$T^*(B \times B) = T^*B \times T^*B \xrightarrow{\delta \times \delta} \mathcal{O}_B \times \mathcal{O}_B \quad \text{is } \mathcal{A}_1 \text{ and}$$

$$\tilde{\mathcal{P}} := (\delta \times \delta)^{-1}(\mathcal{P}) = \bigsqcup_{w \in W} T_{Z_w}^*(B \times B) \quad \text{is } \mathcal{A}_1. \quad \delta \times \delta \text{ is projective}$$

to $\mathcal{A}_1$, $\tilde{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{P}$ is projective is $\mathcal{A}_1$. $\text{is } \mathcal{A}_1$ and

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{P}} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{P} \cong \mathcal{O}_B \\ \pi_1|_{\tilde{\mathcal{P}}} \searrow & \subset & \nearrow \delta \\ & T^*B & \end{array} \quad \text{is } \mathcal{A}_1 \quad \pi_1|_{\tilde{\mathcal{P}}} \text{ is projective} //$$

(Proposition 4.10 の証明) $\mathcal{F}$ a good filtration $\{\mathcal{F}_i\} \in$
 定めて, $P_{i+\mathcal{F}}$ a filtration $\{P_{i+\mathcal{F}_j}\}$ is $\mathcal{A}_1$. (仮定は $\mathcal{A}_1$)

i) $gr \mathcal{F}$ is coherent $\mathcal{O}_{T^*(B \times B)}$ -Module, $\pi_1^* gr(P_{i+\mathcal{F}})$ is
 $\mathcal{O}_{T^*B}$ -Module is $gr(P_{i+\mathcal{F}}) = \pi_{1+}(gr \mathcal{F})$ is $\mathcal{A}_1$. $\text{is } \mathcal{A}_1$ and

$$\text{Supp}(gr \mathcal{F}) = \text{Ch}(\mathcal{F}) \subset \bigsqcup_{w \in W} \pi_{1+}(gr \mathcal{F}) \quad \text{is } \mathcal{A}_1 \text{ Lemma 5.2}$$

is $\pi_{1+}(gr \mathcal{F}) = gr(P_{i+\mathcal{F}})$ is coherent $\mathcal{O}_{T^*B}$ -Module

(Grauert の定理). $\mathcal{F} \supset P_{i+\mathcal{F}}$ is coherent $\mathcal{O}_B$ -Module is

$$\{P_{i+\mathcal{F}_j}\} \text{ is good filtration. } \therefore \text{Ch}(P_{i+\mathcal{F}}) = \text{Supp}(\pi_{1+}(gr \mathcal{F})) \subset \pi_{1+}(\text{Ch}(\mathcal{F})) //$$

(Lemma 4.11 の証明) ci) is $\mathcal{A}_1$ and ci). Lemma 5.2 is

$$\text{ii) } \pi_1(\overline{T_{Z_w}^*(B \times B)}) = \overline{G \cdot T_{B_w}^*B} \quad \text{is } \mathcal{A}_1. \quad \text{is } \overline{G \cdot T_{B_w}^*B} \supset G \cdot \overline{T_{B_w}^*B} \\ \supset G \cdot \overline{M(w^{-1})} \quad \text{is } \mathcal{A}_1 \text{ } G \cdot \overline{M(w^{-1})} \text{ is closed is } \mathcal{A}_1 \text{ ci) is } \mathcal{A}_1. //$$

5.3 Proposition 4.12, 4.13

(Proposition 4.12 の証明)

$H = \sum_{i=1}^m (U(\mathfrak{g}) \otimes 1) e_i$ なる $e_i \in E$ がある。このとき

$$(U(\mathfrak{g})/I)^m \longrightarrow H^2 \quad (P_1, \dots, P_m) \longmapsto \sum_{i=1}^m (P_i \otimes 1) e_i$$

は $U(\mathfrak{g})$ -module としての全射準同型。よって

$$\text{Ch}((U(\mathfrak{g})/I)^2) = \text{Ch}(H^2). \text{ 次に } H = \sum_{j=1}^m (1 \otimes U(\mathfrak{g})) f_j \text{ なる}$$

$f_j \in E$ がある。このとき

$$U(\mathfrak{g}) \longrightarrow (H^2)^m \quad (Q \longmapsto (Q \otimes 1) \cdot f_1, \dots, (Q \otimes 1) \cdot f_m)$$

はやはり左 $U(\mathfrak{g})$ -module としての準同型で $\text{kernel} = I$ 。

$$\text{よって } U(\mathfrak{g})/I \hookrightarrow (H^2)^m. \quad \therefore \text{Ch}((U(\mathfrak{g})/I)^2) \subset \text{Ch}(H^2) //$$

Proposition 4.13 は $L_w = M(\mathfrak{g})^\vee \otimes_{1 \otimes U(\mathfrak{g})} H_w$ なる事を認めては (see Remark 4.6), 既に知っている事だが, ここでは $\mathcal{O}$ -Module の言葉で直接証明しよう。

[BK] により, L_w は $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_B}^{\text{codim } B_w}(\mathcal{O}_B)$ の unique non-zero minimal submodule だった。同様に $\mathcal{H}_w$ は $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_w}^{\text{codim } Z_w}(\mathcal{O}_{B \times B})$ の unique non-zero minimal submodule だった。

Lemma 5.3 $u \in H_w - \{0\} \in \mathcal{H}_w$ a non-zero section とすると, ΔG の non-empty open subset U があって,

$$g \in U \implies j^+(g \cdot u) \neq 0$$

(証明) $x \in B$ に対して $B \xrightarrow{j_x} B \times B$ と $j_x(x') = (x', x)$

により定める。このとき次を証明しよう。

" B の non-empty open subset $V \subset$ "

$x \in V \Rightarrow j_x^* u$ は $j_x^* \mathcal{H}_W$ の non-zero section

たるとある。

))

$\text{Supp}(\mathcal{H}_W) = \overline{Z}_W$, また $\mathcal{H}_W$ は $\overline{Z}_W - Z_W$ に support を持たない non-zero section を持たない" u は Z_W 上の点 $(g_W B, g_B)$

で non-zero になる。 $(g_W B, g_B)$ は $B \times B$ の座標

系 (y, z, x) を次の (i) (ii) を満たすようにとる。

$$\left(\begin{array}{l} \text{(i)} \quad y = (y_1, \dots, y_m) = 0 \iff (y, z, x) \in Z_W \\ \text{(ii)} \quad x \text{ は } g_B \text{ での } B \text{ の座標系 } B \times B \xrightarrow{p_2} B \text{ により} \\ \text{引く戻したものである。 } (x = (x_1, \dots, x_m)) \end{array} \right.$$

よって u は $\mathcal{H}_{Z_W}^{\text{codim } Z_W}(\mathcal{O}_{B \times B})$ の section と見做して local に座標系で書くと

$$u = \sum_{\substack{d=(d_1, \dots, d_m) \\ d_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} \frac{f_d(z, x)}{y^d} dz dx$$

と書ける (see [BoBr1])。各 d について $f_d(z, x) \neq 0$ となる x の集合は open, また $f_d \neq 0$ となる non-empty である。よって明らか //

(Proposition 4.13 の証明)

$p_{1*}(\mathcal{H}_W)$ の section は $\mathcal{H}_W$ の section と見做して j により引き戻す事にあり, sheaf isomorphism $p_{1*}(\mathcal{H}_W) \rightarrow \mathcal{H}_W = j^* \mathcal{H}_W$ が得られるが, これは $\mathcal{O}_B$ -Module としての同型である。

global section ε として, $U(\mathfrak{g})$ -homomorphism $H_W^2 \rightarrow L_W$ ε 得る。Lemma 5.3 により ε は non-zero map。 L_W は既約だから ε は surjective。 すると $\text{Ann } H_W^2 \subseteq \text{Ann } L_W = I_W$ 。

逆に $I_W \subseteq \text{Ann } H_W^2$ を示そう。 $P \in I_W, u \in H_W$ に対して $Pu = 0$ を示せばよい。 Lemma 5.3 から $j^*(g \cdot Pu) = 0$ ($\forall g \in \Delta G$) を示せばよい。 $j^*(g \cdot Pu) = j^*((\text{Ad } g)P \cdot (gu)) = (\text{Ad } g)P \cdot j^*(gu)$ だから $j^*(gu) \in L_W, \text{Ad } g)P \in I_W$ であるから $j^*(g \cdot Pu) = 0$ //

§6. primitive ideal の characteristic variety による特徴付け

Goldie rank 多項式について

6.1 Main Conjecture

我々の主予想は次のとおり。

Conjecture 6.1 ([BoBr2])

$\text{Ch}((U(\mathfrak{g})/I_W)^2)$ は既約 ($\forall W \in \mathcal{W}$)。』

G -saturation theorem (Theorem 4.1) によりこれは次の同値。

Conjecture 6.2

$V(L_W)$ は既約 ($\forall W \in \mathcal{W}$)。』

あとで述べるように, この予想が正しいことは

$\text{Ch}((U(\mathfrak{g})/I_W)^2)$ は I_W を特徴付ける事かわかるが, 我々はもう少し弱い次の定理を示す。

Theorem 6.3 ([BoBr2])

I_M は $(U(\mathfrak{g})/I_M)^e$ の characteristic cycle $\underline{\text{Ch}}((U(\mathfrak{g})/I_M)^e)$ により一意的に決まる。すなわち

$$\underline{\text{Ch}}((U(\mathfrak{g})/I_M)^e) = \underline{\text{Ch}}((U(\mathfrak{g})/I_{M'})^e) \iff I_M = I_{M'} \quad \square$$

且 characteristic cycle の定義は以下のとおり。一般に coherent $\mathcal{O}_X$ -Module M の characteristic variety とは, M の good filtration に対して決まる T^*X 上の coherent sheaf $\text{gr} M$ の support であつた。 $\text{supp}(\text{gr} M)$ の最大次元の既約成分の generic point での $\text{gr} M$ の重複度は good filtration の取り方によらずに事がある。この重複度を M の characteristic cycle と呼んで $\underline{\text{Ch}}(M)$ と書く。

6.2 Goldie rank 多項式

$U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal I に対して $U(\mathfrak{g})/I$ の全商環 $\text{Fr}(U(\mathfrak{g})/I)$ が $M_r(K)$ と同型になるような正整数 r と斜体 K が存在する。この r を I の Goldie rank と呼んで $\text{rk}(I)$ と書く。各 $w \in W$ に対して

$$\text{rk}(A(w, \mu)) = P_w(\mu) \quad \left(\begin{array}{l} \forall \mu: \text{regular, anti-dominant} \\ \mu \text{ integral weight } (\in \mathfrak{h}^*) \end{array} \right)$$

となる $\mathfrak{h}^*$ 上の齊次多項式 P_w が定まる。この $P_w \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] = S(\mathfrak{h})$ を Goldie rank 多項式 と呼ぶ。 $m_w = \deg P_w$ とおく。

$P_W = 1$ である Joseph の結果を述べよう。 W の同値関係 $\sim$ は (3.1 に従って) $W \sim W' \iff I_W = I_{W'}$ により定める。また $W \sim_R W' \iff W^{-1} \sim W'^{-1}$ とし, $\sim, \sim_R$ の両方で生成される同値関係を $\sim_{LR}$ とする。 W を含む $\sim_{LR}$ の同値類を $\mathbb{C}_W^{LR}$ と書く。

Proposition 6.4 (Joseph [J27])

- (i) $W \sim W' \iff P_W = c P_{W'} \quad (c > 0)$
- (ii) P_W は "harmonic polynomial", $\sigma(W) := (\mathbb{C}[W] \cdot P_W \subset S^{m_W}(\mathfrak{g}))$ は既約 W -module.
- (iii) $\dim \operatorname{Hom}_W(\sigma(W), S^m(\mathfrak{g})) = \begin{cases} 0 & (m < m_W) \\ 1 & (m = m_W) \end{cases}$
- (iii') $\sigma(W) = \bigoplus_{y \in \mathbb{C}_W^{LR}/\sim} \mathbb{C} P_y$, 特に $W \sim_{LR} y \Rightarrow m_W = m_y$.
- (iv) $y \sim_{LR} W \iff \sigma(W) = \sigma(y)$

[6.3] Goldie rank 多項式と Springer 表現

O は nilpotent orbit ($\subset \mathfrak{g}$) とすると, 11.4.13 Springer 対応により既約 W -module $Sp(O)$ が定まり, $\dim Sp(O) = (O \cap \mathfrak{m}^+ \text{ の既約成分の数 })$ である。また $d_O = \frac{1}{2}(\dim O - \dim \mathfrak{g})$ とおくと

$\dim \operatorname{Hom}_W(Sp(O), S^m(\mathfrak{g})) = \begin{cases} 0 & (m < d_O) \\ 1 & (m = d_O) \end{cases}$ である (Borho-MacPherson [BM17])。特に $S^{d_O}(\mathfrak{g})$ は $Sp(O)$ を重複度 1 で含む。これにより $Sp(O) \in S^{d_O}(\mathfrak{g})$ の subspace と

思う事にある。Joseph [J3] は $V \in I(\mathcal{O} \cap \mathfrak{m}^+)$

に $\{ \mathcal{O} \cap \mathfrak{m}^+ \text{ の既約成分 } \}$ に対して $P_V \in S^{\mathcal{O}}(\mathfrak{m})$ を定義したが,

これに関して

Proposition 6.5 ([J3])

(i) 各 $w \in W$ に対して $V(L_w)$ は純次元で, その既約成分は ある nilpotent orbit $\mathcal{O}$ と, ある $V \in I(\mathcal{O} \cap \mathfrak{m}^+)$ に対する $\overline{V}$ と一致する。

(ii) $V(L_w)$ の既約成分ごとの重複度までこめて考えたものを $\underline{V}(L_w)$ とするとき,

$$\underline{V}(L_{w^{-1}}) = \sum_i m_i \overline{V_i} \quad (V_i \in I(\mathcal{O}_i \cap \mathfrak{m}^+))$$

$$\Rightarrow P_w = c \sum_i m_i P_{V_i} \quad (c \neq 0)$$

Proposition 6.6 (Hotta [H7])

$$S_p(\mathcal{O}) = \bigoplus_{V \in I(\mathcal{O} \cap \mathfrak{m}^+)} \mathbb{C} P_V$$

従って Proposition 6.4, 6.5, 6.6 により 各 $w \in W$ に対して

nilpotent class $\mathcal{O}_w$ が定まって $S_p(\mathcal{O}_w) = \mathcal{O}(w)$ とわかる。

また次は明らか。

Proposition 6.7 $\underline{V}(L_{w^{-1}}) \in \bigoplus_{V \in I(\mathcal{O}_w \cap \mathfrak{m}^+)} \mathbb{Z}_{\geq 0} \overline{V}$

より特に $G \cdot V(L_{w^{-1}}) = \overline{\mathcal{O}_w}$ である, Cor 4.4 から,

Theorem 6.8 (primitive ideal of associated variety の既約性, [BoBr1], [J4], [KT])

$$V((U(\mathfrak{g})/I_w)^{\ell}) = \overline{O_w}$$

この定理は [BoBr1] で case by case で証明して
いたが, 上述の Joseph, Hotta, Borho-MacPherson の定理と
我々の G -saturation theorem を組み合わせる事により, 統一
的証明が得られた (see [J4], [KT]).

なお上の事にし得られた O_w が nilpotent orbit 全て
をくすくすではな。 O_w の全体と Lusztig の意味の
special nilpotent orbit 全体が一致してゐる事が知られてい
る。

6.4 Main conjecture 再論

nilpotent orbit O に対し $I(O \cap \mathfrak{m}^+) = \{V_1, \dots, V_k\}$
とすると, $T^*B \xrightarrow{\delta} \mathfrak{g}$ で $\delta^*(O) = G^B(O \cap \mathfrak{m}^+)$ とする。

$$\begin{array}{ccc} I(O \cap \mathfrak{m}^+) & \xleftarrow{1:1} & I(\delta^*(O)) := \{\delta^*(O) \text{ の 既約成分} \} \\ \cup & & \cup \\ V_i & \xleftarrow{\quad} & G^B V_i \end{array}$$

となる。

いま Conjecture 6.1 が正しいとする。 $\alpha \in \mathfrak{V}(L_{w^{-1}})$
は既約な α で Proposition 6.7 が $\mathfrak{V}(L_{w^{-1}}) \in I(O_w \cap \mathfrak{m}^+)$ と
なり, α は I_w の α に depend する。 故に Proposition 6.4

(iv) (v) と Proposition 6.6, Theorem 4.1 から Conjecture 6.1 は次のように言える。

Conjecture 6.9 ([BoBr2])

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_0 & \xrightarrow{1:1} & \{ \delta(O) \text{ の既約成分} \mid O: \text{special} \} \\ \downarrow & & \downarrow \\ I & \longleftrightarrow & X \end{array}$$

$$(Ch((\mathcal{U}(0)/I)^e) = \overline{X})$$

6.5 Goldie rank 多項式の幾何学的意味

一般に algebraic variety X 上の coherent sheaf $\mathcal{F}$ がある abelian category の Grothendieck 群 $K(X)$ と書く。
(簡単なため係数環は $\mathbb{C}$ とする。) すでに知っているように $K(\mathbb{B}) \cong H^*(\mathbb{B}, \mathbb{C}) \cong \{\text{harmonic polynomial}\}$ である。

Proposition 6.10 ([BoBr2] or [BM2])

$$K_w = \mathcal{D}_{\mathbb{B}} \otimes_{\mathcal{U}(0)} ((\mathcal{U}(0)/I_w)^e) \text{ とあるとき}$$

$$\begin{array}{ccc} K(T^*\mathbb{B}) & \xrightarrow{\sigma^*} & K(\mathbb{B}) \cong \{\text{harmonic polynomial}\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [gr K_w] & \xrightarrow{\quad} & (\text{constant}) p_w \\ & & \uparrow \\ & & \mathbb{C} \end{array}$$

($\mathbb{B} \xrightarrow{\sigma} T^*\mathbb{B}$ は zero section への埋め込み) ↓

これは Prop 6.4 (i) から定理 6.3 が従う。

(記録係注) Proposition 6.10 の証明はわかりませんでした。
 また本節 a) の部分についても記録係の独断で証明を付けたので、講演者の意図するところとは違うかもしれません。特に Goldie rank 多項式に関する Joseph の結果を用いる部分は、Proposition 6.10 のおなじみ幾何学的考察から出てくるのかもしれません。

参考文献

- [BeBe] Beilinson, A. and Bernstein, J. : Localisation de $\mathfrak{g}$ -modules ; Comptes Rendus , 292, 15-18 (1981).
- [BoBr1] Borho, W. and Brylinski, J.-L. : Differential operators on homogeneous spaces I ; Invent. math. 69, 437-476 (1982).
- [BoBr2] ——— and ——— : ——— III ; To appear
- [BM1] ——— and MacPherson, R. : Représentations des groupes de Weyl et homologie d'intersection pour les variétés de nilpotents ; Comptes Rendus, 292, 707-710 (1981).
- [BM2] ——— and ——— : To appear.
- [BK] Brylinski, J.-L. and Kashiwara, M. : Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems ; Invent. math. 69, 387-410 (1981).

- [D] Duflo, M.: Sur la classification des idéaux primitifs dans l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple; Ann. Math. 105, 107-120 (1977).
- [H] Hotta, R.: On Joseph's construction of Weyl group representations; preprint (1982).
- [J1] Joseph, A: U -module structure in the enveloping algebra of a semisimple Lie algebra; Springer LNM 728, 116-135 (1979).
- [J2] —: Goldie rank in the enveloping algebra of a semisimple Lie algebra I, II; J. Alg. 65, 269-316 (1980).
- [J3] —: On the variety of a highest weight module; to appear in J. Alg.
- [J4] —: On the associated variety of a primitive ideal; preprint (1983).
- [K1] Kashiwara, M.: The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems; preprint (1983).
- [K2] —: Systems of microdifferential equations; Progress in Math 34. Birkhäuser, 1983.
- [KT] — and Tanisaki, T.: The characteristic cycles of holonomic systems on a flag manifold -related to the Weyl group algebra -; preprint (1983).

- [KL] Kazhdan, D. and Lusztig, G. : Representations of Coxeter groups and Hecke algebras; Invent. math. 53, 165-184 (1979).
- [M] Matsuki, T. : The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups; J. Math. Soc. Japan 31, 331-357 (1979).
- [V] Vogan, D. : Ordering of the primitive spectrum of a semisimple Lie algebra; Math. Ann. 248 195-203 (1980).