

- 15) P. Glansdorff and I. Prigogine: Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations (Wiley-Intersciences, London and N. Y., 1971).
- 16) D. D. Joseph: Stability of Fluid Motions, I and II (Springer, 1976).
- 17) G. Matsumoto: Biol. Bulletin **150** (1976) 279.

Fluctuation and Relaxation of Transient Laser

東大・理 有 光 敏 彦

急に発振状態におかれたレーザーが、自然放出により光を出しはじめ、定常的発振状態におちつくまでの極く短い時間の間に、光子数分布にひじょうに大きなゆらぎが観測されている¹⁾。この現象は、非平衡系の不安定点近傍では、一般的にみられるものである。このような現象を扱う一つの方法として、スケーリング理論²⁾が提出された。このスケーリング理論を、H. Risken³⁾によって導びかれた半古典的レーザーモデルに応用し、F. T. Arecchi et al.¹⁾による自分たちの実験の解析と比較し、スケーリング理論がひじょうに有効であることを示す。また、レーザーの過渡的現象を扱った種々の理論があるが^{4)~7)}、今興味ある実験の解析としては、スケーリング理論が物理的直観にもうったえやすく、すぐれていることがわかる。ちなみに、スケーリング理論では分布関数が解析的に求まるが、他の理論では固有関数展開による無限級数でしか求められない。

初期状態の不安定点からのずれを示すパラメータ δ と、系の大きさ（レーザー系ではポンピング強度の2乗、つまり定常発振時の光子数）の逆数 ϵ において、(i) 不安定点上からの緩和 ($\epsilon^\mu/\delta \rightarrow \infty$)、(ii) 不安定点近傍での緩和 ($\epsilon^\mu/\delta \equiv \tau^\mu = \text{finite}$)、(iii) Ω 展開⁸⁾の使える緩和 ($\epsilon^\mu/\delta \rightarrow 0$) と分類できるが、紙面の都合上 (i) の場合の結果だけをここに記すことにする。

Risken³⁾の式を変数変換すると、

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{ 2x(1-x)R \} - 2\epsilon \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x} R = 0 \quad (1)$$

とかける。ただし、 x は光子数に比例し、 R は光子数分布関数、 $\epsilon = 2/a^2$ で、 a はポンピング強度に比例した量である。(1) より、初期領域及びスケーリング領域での分布関数 R_{ini} 、 R_{sc} と、母関数 $Z_{ini}(\xi)$ 、 $Z_{sc}(\xi)$ は次のように与えられる。

1) 初期領域

$$R_{ini}(x, \tau) = \frac{1}{2\tau - \epsilon} \exp\left[-\frac{x}{2\tau - \epsilon}\right], \quad (2)$$

$$Z_{ini}(\xi) = 1/\{1 - (2\tau - \epsilon)\xi\}, \quad \tau = \frac{\epsilon}{2} e^{2t}. \quad (3)$$

2) スケーリング領域

$$R_{sc}(x, \tau) = \frac{\tau}{2\mu\{\tau - (\tau_1 - \tau)x\}^2} \exp\left[-\frac{x}{2\mu\{\tau - (\tau_1 - \tau)x\}}\right], \quad (4)$$

$$Z_{sc}(\xi) = e^{\xi\beta} \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi^m}{m!} (-\alpha\beta)^m \Gamma(1-m, \alpha) \right\}, \quad (5)$$

ただし、 $\alpha = 1/\{2\mu(\tau - \tau_1)\}$ 、 $\beta = \tau/(\tau - \tau_1)$ 、 $\mu = 1 - \epsilon/(2\tau_1)$ 、

$\Gamma(z, p) = \int_p^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ 、 $Z(\xi) = \langle e^{\xi x} \rangle$ である。 τ_1 は初期領域とスケーリング領域のつなぎ目をあらわす。

図1に $a = 25$ の場合の分布関数の時間発展を示す。また、(3) (5) から求めた、光の強度とゆらぎの時間発展を図2に示す。図3にスケーリング理論で求めた $\langle (\Delta I)^2 \rangle_{sc} / I_{sc}^2$ と、Arecchi et al. が、実験の解析に用いた $\langle (\Delta I)^2 \rangle / I^2$ を示す。スケーリングの結果で、 $\mu = 1$ 、 $t_1 = 0$ (つまり $\tau_1 = \frac{\epsilon}{2}$) とおいたのが、Arecchi et al. の式と一致することがわかる。

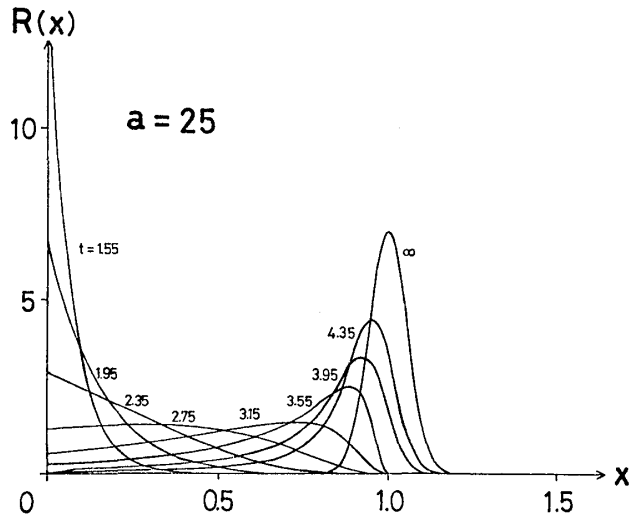


図1. $a = 25$ の場合の分布関数の時間発展

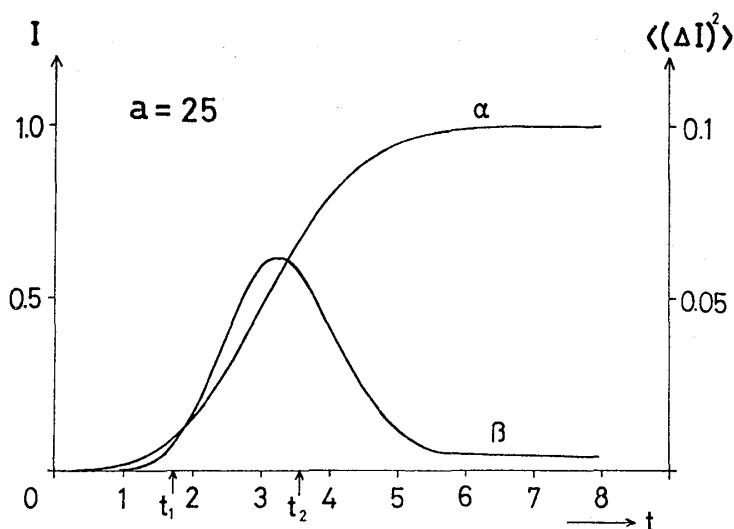


図2 $a = 25$ の場合の光強度 (α) とゆらぎ (β) の時間発展

Scaling

$$\frac{\langle (\Delta I)^2 \rangle_{sc}}{I_{sc}^2} = \frac{\zeta \{1 + E(\zeta)\} - E(\zeta)^2}{\{1 + E(\zeta)\}^2}, \quad \tau = \frac{\epsilon}{2} e^{2t}$$

$$\zeta = [2\mu(\tau - \tau_1)]^{-1}, \quad \mu = 1 - \frac{\epsilon}{2\tau_1}.$$

Arecchi et al.,

$$\frac{\langle (\Delta I)^2 \rangle}{I^2} = \frac{\varepsilon \{1 + E(\varepsilon)\} - E(\varepsilon)^2}{\{1 + E(\varepsilon)\}^2}, \quad \varepsilon = [\tau(e^{2t} - 1)]^{-1},$$

$$E(\zeta) = \zeta e^\zeta \int_\infty^\zeta t^{-1} e^{-t} dt = -\zeta e^\zeta \Gamma(0, \zeta).$$

図3 スケーリング理論のスケーリング領域での $\langle (\Delta I)^2 \rangle_{sc} / I_{sc}^2$ と, Arecchi et al. が実験の解析に用いた $\langle (\Delta I)^2 \rangle / I^2$ の表式の比較。

最後に, 最近長谷川先生, その他⁹⁾によって議論されている entropy production rate の時間発展を図4に示す。不安定点近傍では $dp/dt > 0$ なる時間帯があることがわかる。(p は entropy production)

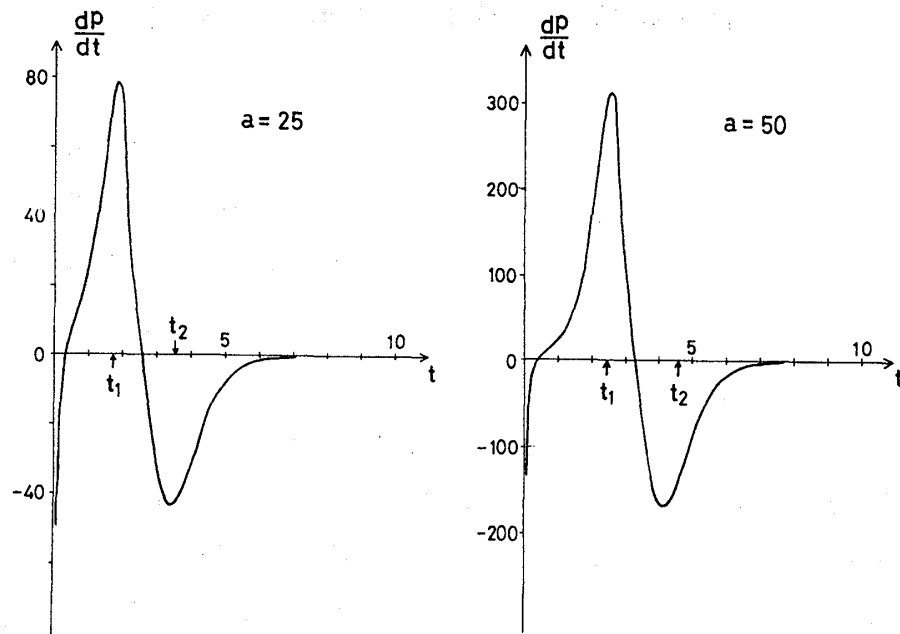


図4 $a = 25$ と $a = 50$ の場合の entropy production rate dp/dt の時間発展

参考文献

- (1) F. T. Arecchi and V. Degiorgio, Phys. Rev. A3 (1971) 1108
- (2) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. 57 (1977) 380 及びこの中の Ref.
- (3) H. Risken, in "Progress in Optics", vol. VIII, ed. E. Wolf (North-Holland 1970)
- (4) H. Risken, Z. für Physik, 186 (1965) 85
- (5) H. Risken and H. D. Vollmer, Z. für Physik, 204 (1967) 240
- (6) M. Sargent III, M. O. Scully and W. E. Lamb, Jr., Applied Optics 9 (1970) 2423
- (7) Y. K. Wang and W. E. Lamb, Jr., Phys. Rev. A8 (1973) 866
- (8) R. Kubo, K. Matsuo and K. Kitahara, J. Stat. Phys. 9 (1973) 51
- (9) H. Hasegawa, Prog. Theor. Phys. 57 (1977) 1523; H. Hasegawa, S. Sawada and M. Mabuchi, the 4th Rochester Conference (pre-print)