

歪み解析と変形解析の数理：1. 一様変形

Lecture note on the theories of strain and deformation analyses: 1. Homogeneous deformations

山路 敦*

Atsushi Yamaji*

2016年2月3日受付.

2016年3月31日受理.

* 京都大学大学院理学研究科地球惑星科学専攻
Division of Earth and Planetary Sciences,
Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

Corresponding author: A. Yamaji,
yamaji@kueps.kyoto-u.ac.jp

Table 1. Contents of this lecture series. 本講座の目次.

1	Homogeneous deformations 一様変形
2	Infinitesimal deformations and their geological measurements 微小変形とその地質学的計測
3	Foundations of strain and deformation analyses 歪み解析・変形解析の基礎
4	Hyperbolic geometry and Rf/ϕ strain analysis 双曲幾何学と Rf/ϕ 歪み解析
5	Supplements to Rf/ϕ strain analysis 続 Rf/ϕ 歪み解析
6	Incremental deformations and kinematic vorticity analysis 累進変形と運動論的渦度解析
7	Inverse method for determining non-coaxial, finite deformations 非共軸変形解析のための逆解法

1. はじめに

地殻変動は固体地球を構成する物質の運動であるが、運動は一般に並進(重心の移動)と歪み(形状変化ないしサイズ変化)と剛体回転の合成とみなすことができる。専門用語としての変形は、この意味の歪みと剛体回転の両方を含む変化をさす。この講座では、歪み(strain)と変形(deformation)という言葉を用いて、そのように区別して使う。地質学的過去の歪みと変形を、地質学的データから推定する歪み解析や変形解析は、地殻変動の研究に基本的データを提供してくれる。そこで、歪み解析と変形解析について、理論的側面を本講座で解説しよう。

変形した化石やそのほかの物体の観察から、それを含む岩体の歪みや変形を定量的に評価するのが、歪み解析または変形解析である。そのためには、変形前の形と変形後の形を比べればよい。しかし一般に、露頭でみられる物体の、変形前の形はわからない。特別な場合にだけ、変形前の形について妥当な仮定ができる。例えば、種類の分かった化石がみつかった場合である。また、粒子ファブリックが変形前はランダムだったであろうというような、物体群の統計的性質について妥当な仮定ができることも、その条件になりうる。そうした仮定ができる物体を、変形マーカーまたは歪みマーカーという。変形マーカーを露頭でさがしだし、変形後の形状と比較することにより、その物体を含む岩体の変形の方法と量を定量的に把握する。その手法は、使える変形マーカーの種類ごとにいろいろと開発されてきた。そして、1970年代ははじめころまでの研究成果が Ramsay and Huber(1983)の教科書で網羅された。

こうしたテーマに関する最近の理論面での進歩の第1は、変形マーカーが任意形状でよいことが明らかになったことである。すなわち、純剪断の場合が Mulchrone and Choud-

hury(2004)によって示され、次いで一様変形の場合が Yamaji and Maeda(2012)によって示された。第2は、一種の非ユークリッド幾何学である双曲幾何学(hyperbolic geometry; 例えば深谷, 2004)の導入により、種々の歪み解析・変形解析から運動学的渦度解析(kinematic vorticity analysis; e.g., パスキエ・トゥロウ, 1999)までが統一的に理解され、誤差評価もできるようになったことである(Yamaji, 2008, 2013a, b)。最近20年ほどのこうした発展を体系的に説明した文献は英語でも存在しない。本講座の目的は、歪み解析や変形解析の技法の背後にある理論を、基礎から解説することにある。目次を Table 1 に示す。

本講座の第1回では、変形や歪みの基礎を説明し、主歪みと主歪み軸の方向を算出する方法を解説する。第2回では微小変形を扱う。その応用として、機械的的双晶や小断層のように、微小な不連続変形の重ね合わせとして変形を見積もる方法を紹介し、最後に断層関連褶曲にともなう岩体の変形を考える。第3回はそれ以降の議論を準備する回である。まず、二次元歪み解析の基礎として、変形マーカーの形状が任意でよいことを示す。次いで、楕円が一様変形でどんな楕円になるかを示す。最後に、非ユークリッド幾何学入門として、球面の幾何学を紹介し、非ユークリッド幾何学と歪み解析のあいだの意外な関係に触れる。第4回ではまず、歪み解析や変形解析に必要な範囲で、非ユークリッド幾何学の一種である双曲幾何学を説明し、その応用として Rf/ϕ 歪み解析の一手法である hyperbolic vector mean method を紹介する。そして Rf/ϕ 歪み解析の他の手法を第5回で批判的に検討する。第6回ではまず、微小変形の理論と有限変形の理論をいかにつなぐかを考え、次いで運動学的渦度解析を取りあげる。そして最終回(第7回)では、非共軸の有限変形

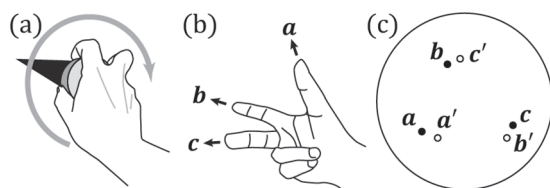


Fig. 1. (a) The right-hand screw rule. (b) Right-hand system. (c) Lower-hemisphere, stereogram showing the right-hand system made by the vectors, a , b and c , indicated by solid circles and the left-hand system made by the vectors, a' , b' and c' indicated by open circles. (a) 右ねじの進む方向 (黒いくさびの向き). (b) 右手系をなすベクトル. (c) 下半球ステレオ投影において、黒丸で示された右手系をなすベクトル a, b, c と白丸で示された左手系をなすベクトル a', b', c' .

を推定する逆問題について考える。

本講座に必要な予備知識として、ベクトルと行列および解析学のごく初歩のみを想定する。それらについては、入門的な教科書(例えば戸田・浅野, 1989)がカバーする範囲で十分である。ただし、固有値・固有ベクトルの理解が本講座では必須なので、このあとの §6 で図解により直感的にわかるように説明する。この第1回の内容は、第2回以降も折に触れて参照する。第1~2回でカバーする話題は、種々の構造地質学の教科書で触れていることであって、地質学の学部レベルのテーマを扱っている。本講座の第3回以降は大学院レベルの内容であるが、同様の話題を扱った教科書の存在を筆者は知らない。本講座のみで学習を進められるよう、拙著『理論テクトニクス入門』(山路, 2000)の第1, 2章と重複する内容も簡潔に紹介する。また、和文の解説がある内容なら、欧文のものよりそれを優先的に引用することにする。この講座では、行列とベクトルとテンソルを太字で表す。

2. 基本事項

全編でしばしば使う記法を説明しておく。ベクトルを断りなく位置ベクトルとみなして、その終点の意味で使うことがある。例えば、平面上の直交デカルト座標が(1, 1)にある点を、成分が(1, 1)^Tのベクトルで表現するという具合である。ただしここで、添え字のTは行列の転置記号である。ベクトルはとくに断らないかぎり列ベクトルで表現する。すなわち、二次元なら2×1の行列、三次元なら3×1の行列である。したがって、ベクトルの内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ は行列としての積 $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$ に等しい。また、自然対数を $\log$ と書く。証明または一区切りの説明の終端が、段落を改めるだけでは不明確な場合、■という記号で終端を示す。

行列の第 ij 成分を A_{ij} とすると、 $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{ij} = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 A_{ij}$ というように、和をとる順番が結果に影響しないことに注意しよう。このことは、表計算で、横に小計をとってから大計を求めるのと縦に小計をとってから大計を求めるのとで、結果が一致することと同断である。したがって、2つの総和記号の一方を省略し、これらの和を $\sum_{i,j=1}^3 A_{ij}$ と略記する。

回転にともなう右ねじの進む方向というのは、Fig. 1aの

灰色の矢印のように回転させたときに、その図の黒いくさびが指す方向である。3本のベクトル a, b, c が右手系をなすと言うことがある。その場合、 a, b, c の方向にそれぞれ右手の親指、人差し指、中指を向けることができる、そういうベクトルの並びということである(Fig. 1b)。これは覚えやすい説明ではあるが、指の開く角度には限界があり、その限界には個人差があるので、これでは定義として曖昧である。それらがゼロベクトルでないとして、右手系をなすというのは正確には次の意味である。3本のベクトルの始点をそろえ、 a から b の方に回転したとき、右ねじの進む方向と c が鋭角をなすなら、 a, b, c はその順番で右手系をなす。そうでなければ左手系である。Fig. 1cのステレオネットは、この順番が重要であることを示す。§3.2の記法を使うと、 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ の値が正なら右手系、負なら左手系である。

3. 一様変形

岩体の伸縮や方向の変化を定量的に記述し、それによってテクトニクスを物理現象として理解する手がかりを得ようとするのが歪み解析・変形解析である。伸縮を定量化するときの量として、変形前後の長さの比をとるのは最も素朴な歪みの指標である。変形前の長さを L 、変形後の長さを L' とすると、 L'/L を伸び(stretch または elongation)という。また、 $\log(L'/L)$ を対数歪み(logarithmic strain)、 $(L-L')/L$ を(狭義の)歪み(strain)という。また、変形前に直交していた2本の線が、変形後に $90^\circ - \phi$ という角度になったとすると、 $\gamma = \tan \phi$ を工学剪断歪み(engineering shear strain)、 ϕ を剪断角(angle of shear)という。剪断歪みというとき、 γ を指す場合と $\gamma/2$ を指す場合があるので、注意が必要である。

これらはスカラー量だが、一般にそれらの大きさは方向によって変わる。例えば、東西に2倍、南北に1/2倍に伸びる、といった具合である。すなわち異方的(anisotropic)な変形である。どの方向にも一様に拡大または縮小するなら、等方的(isotropic)な変形である。次に述べるように、行列を使うと、方向依存性を含めた伸縮や角度の変化を表現することができる。

3.1 変形勾配テンソル

岩石は一般に不均一であり、テクトニックな変形の様子は場所ごとに違う。その様子が場所とともに連続的に変化することも限らない。例えば断層は、変位や変形が不連続になる面である。現実の複雑な様相を扱うことを目標に置くにしても、まずは現象を単純化して考えよう。ある岩石片に注目することにして、その変形前の位置が、直交デカルト座標で (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 、変形後のそれが (x_1, x_2, x_3) と表されたとする。単純化のため、前者から後者への変化が、数学的には一次変換で表すことができると仮定する：

$$\begin{aligned} x_1 &= F_{11} \xi_1 + F_{12} \xi_2 + F_{13} \xi_3 \\ x_2 &= F_{21} \xi_1 + F_{22} \xi_2 + F_{23} \xi_3 \\ x_3 &= F_{31} \xi_1 + F_{32} \xi_2 + F_{33} \xi_3. \end{aligned} \quad (1)$$

右辺の9個の係数を束ねてつくった変形勾配テンソル(de-

formation gradient tensor)

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix}$$

および位置ベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3)^T, \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$$

を使うと、式(1)が

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}\xi \quad (2)$$

のように簡潔に表される ($\mathbf{F}$ を位置勾配テンソルとよぶこともある; 例えば金川, 2011). 二次元的変形(この言葉についてはあとで説明する)では $\mathbf{F}$ は 2×2 の行列になり、位置ベクトルは二次元ベクトルになる。しかしそれでも、式(2)はそのまま成り立つ。この柔軟さが、行列とベクトルを使う理由である。

$\mathbf{F}$ の成分が場所によらず、成分のそれぞれが一定値をとるなら、 $\mathbf{F}$ が表す変形を一樣変形 (homogeneous deformation) という。その場合、直線は直線に、長方形は平行四辺形に、円は楕円になる。また、平面は平面に、直方体は平行六面体に、球は楕円体になる (Fig. 2). $\mathbf{F}$ の成分が場所の関数であれば非一樣変形 (inhomogeneous deformation) である。その場合でも、局所的には一樣変形で近似できるから (Fig. 2c), 式(2)は変形を定量的にあつかうための基礎である。

非一樣変形でも局所的に一樣変形で近似できるなら、その領域内で式(2)を近似として利用することができる。近似ではなく厳密な扱いが必要となると、場所による変化を考慮するために、微分が必要になる。そのために式(1)を ξ の成分で微分するのだが、その前に、 ξ が指し示す点は、変形前のどの点でもありうることに注意する。つまり、その3成分はたがいに独立な変数である。したがって、ある成分をその成分自体で微分すると1、別の成分で微分すると0になる。すなわちクロネッカーのデルタ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

を使うと、式 $\partial \xi_i / \partial \xi_j = \delta_{ij}$ が成り立つ。したがって、式(1)から

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} = \sum_{k=1}^3 F_{ik} \frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_j} = \sum_{k=1}^3 F_{ik} \delta_{kj} = F_{ij}$$

となる。すなわち、

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \quad (2)$$

これは三次元では 3×3 、二次元では 2×2 の行列であり、微小領域において、変形前の相対位置 $d\xi$ を変形後の相対位置 $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\xi$ に結びつける式ができる。ただし本講座で使う

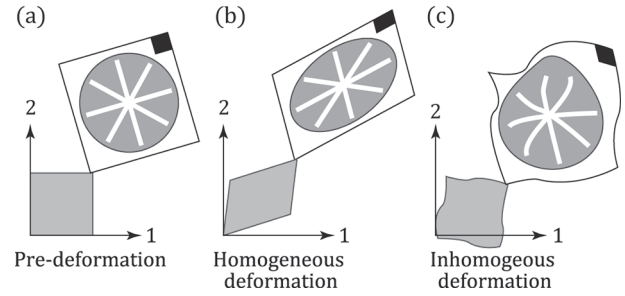


Fig. 2. Schematic illustration for homogeneous and inhomogeneous deformations. The former can locally approximate the latter, e.g., the black, upper left corner. 一樣変形と非一樣変形。非一樣変形でも、局所的には正方形が平行四辺形にという具合に(例えば右上の黒色部分)、一樣変形で近似できる。

変形勾配テンソルはもっぱら式(2)のものである。

3.2 体積変化

岩体の変形前後の体積をそれぞれ V_0 と V としたとき、変形前後の体積変化率は、 $V/V_0 = \det \mathbf{F}$ である。このことが後で重要な意味をもつので、この式を導きたい。そのためにまず、次の問題を考える。

【問題】 任意のベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ を考える。ただしそれらはその順番で右手系をなすとする。これらのベクトルを辺とする平行六面体の体積が、スカラー三重積とよばれる $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ というスカラー量に等しいことを示せ。

【答え】 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角を θ とすると $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos \theta$ 。ゆえに、単位ベクトルと任意のベクトル $\mathbf{x}$ とのスカラー積は、単位ベクトルの延長線上への $\mathbf{x}$ の正射影の長さに等しい (Fig. 3a)。 i, j, k を1から3の整数とし、置換記号を

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ or } (3, 1, 2) \\ -1 & (i, j, k) = (1, 3, 2), (3, 2, 1) \text{ or } (2, 1, 3) \\ 0 & (i=j, j=k \text{ or } k=i) \end{cases}$$

と定義する。ベクトル積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の i 成分は $\sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k$ である。このベクトル積は、長さが $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin \theta$ で $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の両方に直交したベクトルになる。この長さは、 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の張る平行四辺形の面積 S の値に等しい。 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の向きは、 $\mathbf{a}$ 方向から $\mathbf{b}$ 方向へと回転するとき右ねじの動く向きである (Fig. 3b)。ベクトル積には、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ という性質がある。3本のベクトルによって張られる平行六面体の体積は、底面積 (S) $\times$ 高さ (h) である。Fig. 3c の場合、底面に直交する単位ベクトルは $\mathbf{a} \times \mathbf{b} / |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ なので、 $h = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) / |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ であるが、右辺の分母は底面積に等しい。したがって平行六面体の体積は、スカラー三重積とよばれる $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ というスカラー量に等しい。

ところで、3つの列ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ の成分をならべてつくった、 3×3 の行列の行列式を $|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}|$ と書くことにする。これは $\sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \sum_{i=1}^3 a_i (\sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} b_j c_k)$ である。したがって、スカラー三重積には次の性質がある：

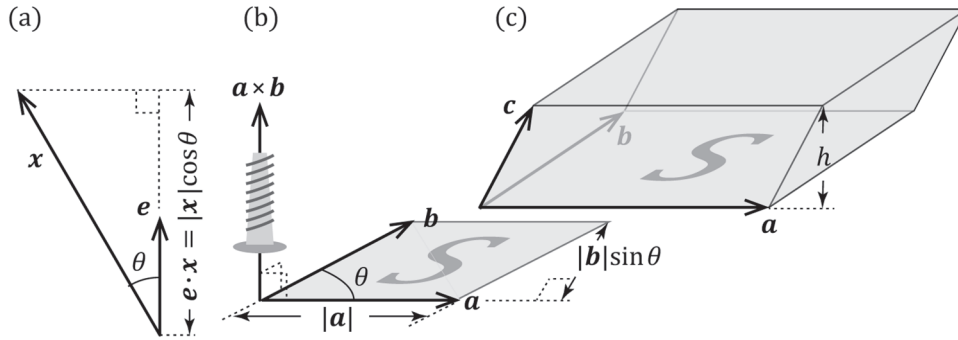


Fig. 3. Scalar and vector products. (a) The scalar product of an arbitrary vector, x , and a unit vector, e , equals the length of the orthogonal projection of x onto the straight line parallel to e . If the two vectors form an obtuse angle, then the length has a negative value. (b) The vector product of a and b , which has the direction perpendicular to the vectors and obey the right-hand rule. The product has a value that is equal to the area of the parallelogram spanned by the vectors. (c) The parallelepiped spanned by a , b and c has the volume that is equal to their triple scalar product, $a \cdot (b \times c)$. ベクトルとその積. (a) 任意のベクトル x と単位ベクトル e とのスカラー積は、 e と平行な直線に落とした x の正射影の長さに等しい。2つのベクトルが鈍角をなすなら、その長さは負の値になる。(b) ベクトル積 $a \times b$ の方向は、 a と b に直交し、 a を b にあわせるように回転するとき右ねじの進む向き。2本のベクトルの張る平行四辺形の面積が $|a \times b|$ の大きさに等しい。(c) 3本のベクトル a , b , c が張る平行六面体の体積は、それらのスカラー三重積 $a \cdot (b \times c)$ に等しい。

$$a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b) = |a, b, c|.$$

つまり、 3×3 の行列の行列式は、その行列を構成する3本のベクトルの張る平行六面体の体積に等しい。

ここまでの準備にもとづいて、式 $\det F = V/V_0$ を導く。まず、変形前、岩体は直方体であったとする。その辺と平行に座標軸をとり、辺の長さをベクトル $\xi^{(1)} = (\xi^{(1)}, 0, 0)^T$, $\xi^{(2)} = (0, \xi^{(2)}, 0)^T$, $\xi^{(3)} = (0, 0, \xi^{(3)})^T$ で表す。太字のベクトル量と細字のスカラ量表記の違いに注意していただきたい。この直方体の体積は、 $V_0 = \xi^{(1)} \xi^{(2)} \xi^{(3)}$ である。変形により第1の辺は、 $x^{(1)} = F \xi^{(1)} = \xi^{(1)} (F_{11}, F_{21}, F_{31})^T$ となる。ほかの辺は、 $x^{(2)} = F \xi^{(2)} = \xi^{(2)} (F_{12}, F_{22}, F_{32})^T$, $x^{(3)} = F \xi^{(3)} = \xi^{(3)} (F_{13}, F_{23}, F_{33})^T$ となる。これらが張る平行六面体の体積は、 $V_0 = x^{(1)} \cdot [x^{(2)} \times x^{(3)}] = |x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}|$ 。すなわち、

$$V = \left| \xi^{(1)} \begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ F_{31} \end{pmatrix}, \xi^{(2)} \begin{pmatrix} F_{12} \\ F_{22} \\ F_{32} \end{pmatrix}, \xi^{(3)} \begin{pmatrix} F_{13} \\ F_{23} \\ F_{33} \end{pmatrix} \right|. \quad (4)$$

ところで、 $i=1, 2$ or 3 とすると、 $x^{(i)}$ はベクトル $(F_{1i}, F_{2i}, F_{3i})^T$ の $\xi^{(i)}$ 倍の長さをもつ。したがって、3本のベクトル $(F_{11}, F_{21}, F_{31})^T$, $(F_{12}, F_{22}, F_{32})^T$, $(F_{13}, F_{23}, F_{33})^T$ が張る平行六面体の体積よりも、 $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ が張る平行六面体の体積のほうが $\xi^{(1)} \xi^{(2)} \xi^{(3)}$ 倍大きい(もちろん $\xi^{(1)} \xi^{(2)} \xi^{(3)} < 1$ ならその倍数だけ小さいというべきだが)。このことから、式(4)は、

$$V = \xi^{(1)} \xi^{(2)} \xi^{(3)} \left| \begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ F_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F_{12} \\ F_{22} \\ F_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F_{13} \\ F_{23} \\ F_{33} \end{pmatrix} \right| = V_0 \det F.$$

したがって、 $\det F = V/V_0$ である。■

このことから直ちに、 $\det F = 0$ なら岩体は消滅することがわかる。また、負の体積はありえないから、変形はしても消滅しない岩体を扱うかぎり、 $\det F > 0$ と考えてよい。こ

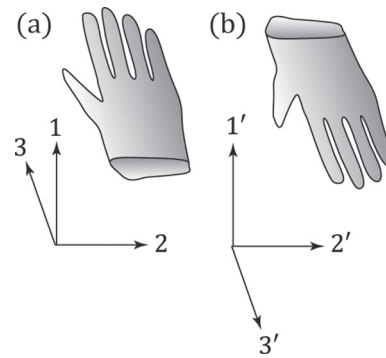


Fig. 4. Schematic illustration for space reflection. (a) A right-handed glove is extended in the direction of the third coordinate. (b) The glove is turned inside out with inversion of the third axis. 空間反転. (a) 右手用手袋の中指の向きに直交デカルト座標の第3座標をとる。(b) 第3座標の符号を変える空間反転操作により手袋が裏返しになる(その結果、左手用手袋になる)。

れは逆行列 F^{-1} が存在することを意味する。この逆行列は、変形をもとにもどす逆変形 (retrodeformation) $\xi = F^{-1}x$ を表す。負の体積とは、Fig. 4のような空間反転の結果である。手袋は裏返すことができるが、岩体は中身が詰まっている表面が閉曲面であるために、裏返すことはできない。これが $\det F > 0$ の幾何学的意味である。

あとの議論に有用なので、 2×2 と 3×3 の行列について、行列式の計算法を示す。前者では、

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

であり、正方行列の左上と右下の成分の積から右上と左下の成分の積を引いたものに等しい。このようなたすき掛けの算法は 3×3 の行列でも成り立ち、



Fig. 5. The rule of Sarrus to calculate the determinants of 2×2 and 3×3 matrices. 2×2 および 3×3 の行列の行列式の計算法。右下がりの線上の成分の積を足し、左下がりの線上の成分の積を引く。

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - ceg - bdi - ahf$$

である。つまり、右下がりの線上にある成分の積は足し、左下がりの線上にある成分の積は引く (Fig. 5)。ただし、このたすき掛け式算法は 4×4 より大きな行列では通用しない。これら 2 例からわかるように、 $n \times n$ の行列の行列式は、行列成分の n 次式になる。

4. 物理的実体とその表現

ここで、物理的実体 (physical entity) とその表現との違いを強調しておく (Aris, 1962; 甘利・金谷, 1987)。それを理解するために、式 $\mathbf{x} = \mathbf{F}\boldsymbol{\xi}$ において、変形の様子を示すのは $\mathbf{x}$ や $\boldsymbol{\xi}$ ではなく $\mathbf{F}$ であることをまず確認しよう。どの方向にどれだけ伸びるというような、変形の方法や量の情報をにうのは $\mathbf{F}$ である。 $\mathbf{F}$ の成分の値が座標系の取り方に依存することをみるために、東西には伸縮せず、南北に 2 倍に伸び、鉛直方向には 3 倍になる変形を考える。東向きに第 1 座標、北向きに第 2 座標、鉛直上向きに第 3 座標をとると、 $\mathbf{F}$ は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

である。同じ変形でも、第 1 座標と第 2 座標をそれぞれ北向きと西向きに選ぶと、

$\mathbf{F}$ は

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

になる。座標系の取り方は任意であるが、行列成分の値はそれに応じて変わる。それに対して、行列が表す変形は、東西に 1 倍、南北に 2 倍、鉛直に 3 倍と変わらない。この変形は $\mathbf{F}$ が表す物理的実体であり、それは座標系の取り方という人為には依存しない。それに対し、 $\mathbf{F}$ の成分は変形の表現にすぎず、それは座標系の取り方という人為に依存するのである。表現と実体の峻別は、理論的な問題を考えるとき必須である。しかし実際に計算するとすると、座標系を設定して、その座標系での表現を操作することになる。

5. 特別な変形

特別な変形には名前が付けられている。まず、変形で体積

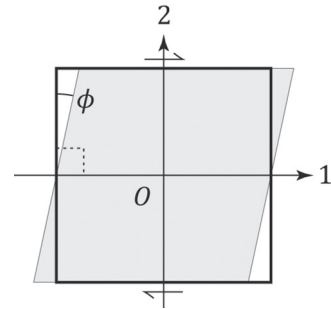


Fig. 6. Schematic illustrations for simple shear. The angle, ϕ , is the decrease of the angle at a corner that had a right angle prior to deformation, and the quantity, $\tan \phi$, is termed the engineering shear strain. 単純剪断の模式図。第 2 座標軸と平行だった側面が変形で ϕ だけ回転。その場合、工学剪断歪みは $\tan \phi$ 。

が保存するなら ($\det \mathbf{F} = 1$)、非圧縮 (incompressible) または等容 (isochoric) 変形という。第 3 座標の方向をうまく選ぶことにより $\mathbf{F}$ の成分が

$$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と書けるなら、第 3 座標に直交する平面上の平面変形 (plane deformation) という。この場合、第 3 座標方向には伸縮せず、変形はそれに直交する第 12 座標平面上でしかおこらない。そこでこの場合、変形はこの行列の左上 2×2 成分のみで表すことができ、二次元的変形という。変形はあくまで三次元空間で生起するが、その結果は金太郎飴のように、第 3 座標軸に直交した断面で同じ絵柄になるわけである。

非圧縮の平面変形のうち重要なのは、純剪断 (pure shear) と単純剪断 (simple shear) と剛体回転 (rigid body rotation) で、それらは座標軸の方向をうまく選ぶことにより、それぞれ次の行列で表される：

$$\begin{aligned} \text{純剪断} & \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1/p \end{pmatrix} \\ \text{単純剪断} & \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{剛体回転} & \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

最初のものは、第 1 座標方向に p 倍に伸ばし、第 2 座標方向に $1/p$ に伸ばす変形である。単純剪断の場合の q は工学剪断歪みであり、変形前に直角だった角の角度の減量を ϕ とすると、 $q = \tan \phi$ である (Fig. 6)。工学剪断歪みの半分を狭義の剪断歪みとよぶことにしよう。また、最後のものは、角度 ϕ の反時計回り回転である。剛体といっても、ここでは物性のことではない。任意の 2 点間の距離が変形 (この場合は回転) の前後で保存されるという意味である。剛体回転を表す変形勾配テンソル $\mathbf{R}$ は直交行列でもあるから、式 $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ がなりたつ。逆回転を表す行列は、順回転を表す行列を転置すれば得られるということである。ただしこの式をみたす $\mathbf{R}$ は剛体回転を表すとは限らない。実際、第 3 座標の

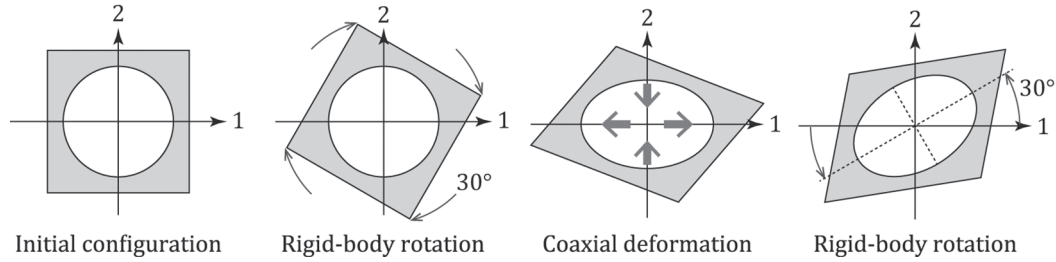


Fig. 7. The procedure to achieve coaxial deformation by the combination of rigid-body rotations and lateral and vertical coaxial deformations. 座標軸と斜交した方向の共軸変形を剛体回転と座標軸に平行な伸縮で実現する手続き(左から右に進む). 最終的に, 横軸から 30° 反時計回り方向に 1.2 倍, それと直交方向に 0.8 倍にする共軸変形. 右端の図の点線は歪み主軸(最大伸長方向と大小伸長方向)で, 最大伸長方向は確かに横軸から 30° 反時計回りの方向である.

符号のみを変える空間反転操作の行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

はこの式をみましたが, その行列式は -1 なので, $\det \mathbf{F} > 0$ の場合のみを考えるという条件をみたまない (Fig. 4). したがって, 以下では $\mathbf{R}$ は空間反転を含まないものとする ($\det \mathbf{R} = 1$).

座標系の方向をうまく選ぶことにより, $\mathbf{F}$ を対角行列

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \quad (6)$$

にすることができるなら, 共軸変形 (coaxial deformation) または非回転変形 (irrotational deformation) という. さもないければ非共軸変形 (non-coaxial deformation) とよぶ. 式 (6) の変形は, 第 1, 第 2, 第 3 座標方向にそれぞれ p 倍, q 倍, r 倍に伸ばす変形である. これらの倍率を主ストレッチ (principal stretches) という.

何ら変形がおこらない (無変形) なら, $\mathbf{F}$ は単位行列に一致する: $\mathbf{F} = \mathbf{I}$. ゼロ行列 $\mathbf{0}$ ではないことに注意すること. 単位行列との差を $\delta \mathbf{F}$ とすると ($\mathbf{F} = \mathbf{I} + \delta \mathbf{F}$), 微小な変形 (微小変形, infinitesimal deformation) なら $\delta \mathbf{F} \approx \mathbf{0}$ である. 微小でないなら, 有限変形 (finite deformation) という. 微小かどうかは, 単位行列との差がゼロ行列に近いかどうかで判断する.

何段階もの変形の結果が露頭で観察されることがある. 各段階の変形が一様変形として, 第 i 段階の変形を $\mathbf{F}^{(i)}$ とするなら, 最終的な全変形を表す変形勾配テンソルは, それらの積 $\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(n)} \cdots \mathbf{F}^{(1)}$ になる. 一般に行列の積は可換ではない. つまり掛け合わせる順番が結果に影響する. ということは, 各段階の変形勾配テンソルを知っているだけでなく, 順番も知らないと, 全変形を正しく評価できないわけである.

【問題】 2 段階の変形が可換な行列で表される例をあげよ.

【答え】 共軸変形の伸縮する方向が 2 段階の変形で共通なら, $\mathbf{F}^{(1)} \mathbf{F}^{(2)} = \mathbf{F}^{(2)} \mathbf{F}^{(1)}$ である. ■

多段階のすべてが微小変形ならばどうだろう. 第 i 段階の変形を $\mathbf{I} + \delta \mathbf{F}^{(i)}$ とするなら, $\mathbf{F}^{(i)} \approx \mathbf{I}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) と仮定するわけである. 全変形は, $\mathbf{F} = [\mathbf{I} + \delta \mathbf{F}^{(n)}] \cdots [\mathbf{I} + \delta \mathbf{F}^{(1)}] = \mathbf{I} +$

$\delta \mathbf{F}^{(1)} + \cdots + \delta \mathbf{F}^{(n)} + O(\delta \mathbf{F}^2)$ となる. 最後の項は 2 次の微小量という意味であるが, 仮定によりこれは無視できる. つまり, 多段階微小変形なら全変形は, 2 次の微小項を省いて,

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \delta \mathbf{F}^{(1)} + \cdots + \delta \mathbf{F}^{(n)} \quad (7)$$

という式で近似できる. 行列の積は非可換だが, 行列の和は可換である. したがって, すべて微小変形なら, 変形の順番を知らずとも全変形を評価することができるのである. このことを使って本講座の第 2 回で地質学的に有用な結果を導く.

座標軸と平行に伸縮させる共軸変形なら, 変形勾配テンソルは式 (6) のように対角行列の形になる. では, 座標軸と斜交した方向に伸縮させる場合はどうか. 筆者の使う描画ソフトウェアでは, 剛体回転と縦横の伸縮は自由にできるが, 斜め方向に任意の倍率で伸縮させる機能はない. この制約のもとでも, 例えば水平方向から 30° 反時計回り方向に伸ばし, それと直交方向に短縮させる共軸変形は, Fig. 7 の手続きで実現できる. すなわち, (1) 対象とする図形をまず 30° 時計回り回転, (2) 縦横方向に伸縮, (3) 30° の反時計回り回転, という 3 段階の変形である. したがって, 最初の状態から最終状態への全変形 $\mathbf{F}$ は, 30° の反時計回り回転を表す行列 $\mathbf{R}$ と座標軸に平行な伸縮を表す共軸変形の変形勾配テンソル $\mathbf{F}_0$ を使って,

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{F}_0 \mathbf{R}^T \quad (8)$$

と書くことができる. $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ だから, この式を 3 段階変形として解釈すると, $\mathbf{R}^{-1}$ という逆回転ののちに $\mathbf{F}_0$ の変形をし, 最後に $\mathbf{R}$ という順回転を加えることに等しい. このように何らかの作用を表す行列を角度 ϕ の順回転とその逆回転の行列ではさんで積をとると, 座標軸から反時計回りに ϕ だけ傾いた方向に同じ作用をほどこすのと同じ結果になるのである. 第 1 座標軸から ϕ だけ傾いた方向に p 倍に伸ばし, それからまた 90° 反時計回りに回転した方向に q 倍に伸ばす二次元的共軸変形は,

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (9)$$

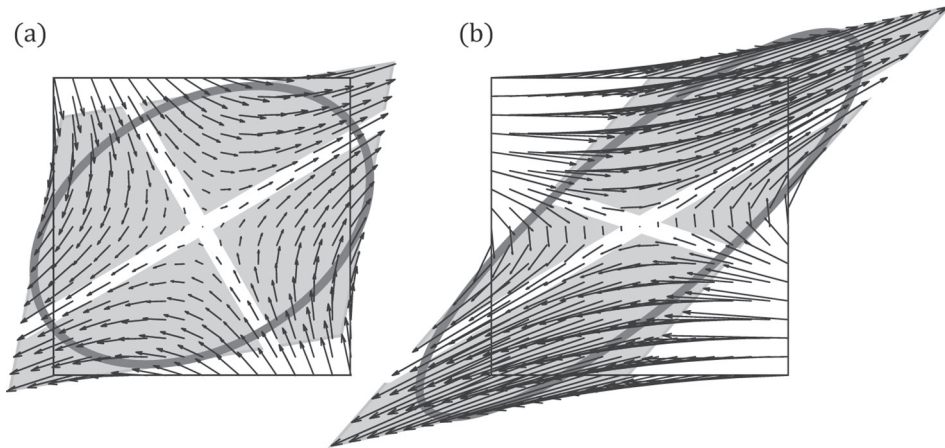


Fig. 8. Schematic illustrations for (a) pure shear and (b) subsimple shear. Thin arrow, displacement vector; thick white line, apophysis. 純剪断変形(a)と subsimple shear の場合(b)の変位ベクトル(細かい矢印), apophysis(太い白線), 歪み楕円。

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (p+q) + (p-q) \cos 2\phi & (p-q) \sin 2\phi \\ (p-q) \sin 2\phi & (p+q) - (p-q) \cos 2\phi \end{pmatrix} \quad (10)$$

である。順回転を表すのは、式(9)の右辺の最初の正方行列である。その第1列を取り出すと単位ベクトル $(\cos \phi, \sin \phi)^T$ であり、 F にはその方向に p 倍に伸ばす作用がある。また第2列を取り出すと単位ベクトル $(-\sin \phi, \cos \phi)^T$ であり、 F にはその方向に q 倍に伸ばす作用がある。これらのことは三次元にも拡張できる。例えば最大伸び方向・中間伸び方向・最小伸び方向が互いに直交する単位ベクトル u, v, w で表され、それぞれ p 倍、 q 倍、 r 倍になる共軸変形であるとする。これを表す変形勾配テンソルは次のようになる：

$$F = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}^T. \quad (11)$$

6. 固有値・固有ベクトル

変形勾配テンソルには特別の方向がある。変位ベクトルは $u = x - \xi = (F - I)\xi$ であるから、 u は ξ に依存する。つまり、同じ F でも場所により変位ベクトルは異なる。一様変形の際の変位ベクトルの例を Fig. 8 に示す。変位ベクトルの方向はまちまちだが、この図の太い白線の上では、変位ベクトルの始点と終点と原点が一直線にならんでいる。すなわち、 x が ξ と平行ということである。この線は F に特有の方向を表す線であり、構造地質学では apophysis (複数形は apophyses. 定着した和訳はない) とよぶ (e.g., Fossen, 2010)。この方向は x が ξ と平行であることにより定義されるので、それを満たす ξ は、次の式を満たさねばならない：

$$x = F\xi = \lambda\xi. \quad (12)$$

ξ が x になるときの倍率が、スカラー量 λ である。 $F\xi = \lambda\xi$ という形の式は線形代数の教科書にかならずでてくるもので、これをみたと ξ は、 F の固有値と固有ベクトルに

ほかならない。つまり apophyses とは、 F の固有ベクトルの方向のことである。また、固有ベクトルとは、 x と ξ が平行であるような点 ξ を連ねた方向のことであり、固有値とはその方向の線上において x は ξ の何倍になるかという倍率のことである。

線形代数の教科書にあるように、 F の成分からこの固有値を計算することができる。すなわち、式(12)は $(F - \lambda I)\xi = 0$ と変形できるが、 ξ は apophysis 上の位置によらずこの式を満たすので、右辺をゼロにする原因は ξ ではなく、 $F - \lambda I$ のほうにある。Apophysis 上にある任意の長さの ξ でゼロになるから、 $\det(F - \lambda I) = 0$ である。これを F の固有方程式という。この等式の左辺は 3×3 の行列の行列式だから、その成分の3次式で、この式は λ に関する3次方程式

$$-\lambda^3 + (\text{trace } F)\lambda^2 + \frac{1}{2}[(\text{trace } F)^2 - (\text{trace } F^2)]\lambda - \det F = 0 \quad (13)$$

である。ただし、 $\text{trace } F = F_{11} + F_{22} + F_{33}$ 、 F の固有値は、方程式(13)の根である。式(13)は3次方程式であるから、少なくとも1つ実根をもつ。つまり、どんな変形でも apophysis が少なくとも1本存在する。実根は apophysis 方向の伸び(stretch)であるから、1という固有値を持つなら、 F は平面変形を表す。

ここでまた、物理的実体とその表現の区別を整理しておく。Fig. 8a の純剪断では、2本の apophyses は互いに直交し、それらの方向に1.2倍と1/1.2倍にする変形である。どの方向にどれだけ伸ばすというこれらの情報は、この場合の F の固有の性質である。ところが、 F の各成分の値は、前述のように座標軸をどの方向に選ぶかによって変わる。すなわち行列成分は表現にすぎない。しかし、固有値と固有ベクトルは F の成分から計算できるにもかかわらず、上述のように座標系の取り方に依存しない。これは固有値と固有ベクトルが行列の物理的実体だからである。座標系の取り方への

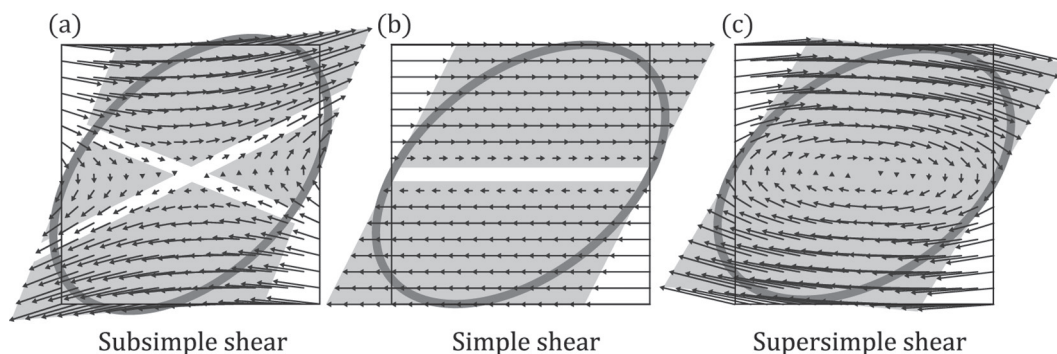


Fig. 9. Sub- and supersimple shear near simple shear, and their strain ellipses. 単純剪断に近い subsimple shear および supersimple shear. 楕円は歪み楕円.

こうした非依存性を、座標回転に対して不変 (coordinate invariance) という。また、固有値は座標回転に対して不変量 (invariant) であるという。固有値は固有方程式 (13) の根であるから、固有方程式の係数 $\text{trace } \mathbf{F}$, $[(\text{trace } \mathbf{F})^2 - (\text{trace } \mathbf{F}^2)]/2$, $\det \mathbf{F}$ も座標回転の影響を受けない。これらをそれぞれ $\mathbf{F}$ の第 1, 第 2, 第 3 主不変量 (basic invariant) という。2×2 の行列 $\mathbf{A}$ の固有方程式は

$$\lambda^2 - (\text{trace } \mathbf{A})\lambda + \det \mathbf{A} = 0$$

であるから、やはりトレースと行列式は不変量である。本講座第 5 回では、座標回転に対して不変であることが重要な意味を持つ。

純剪断では最大伸長方向と最小伸長方向 (最大短縮方向) が apophyses に一致する。固有値が p , $1/p$ という純剪断の最大伸び方向が、第 1 座標軸から反時計回りに ϕ だけ回転した方向である場合、変形勾配テンソルは式 (10) により、

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(p + \frac{1}{p}\right) + \left(p - \frac{1}{p}\right) \cos 2\phi & \left(p - \frac{1}{p}\right) \sin 2\phi \\ \left(p - \frac{1}{p}\right) \sin 2\phi & \left(p + \frac{1}{p}\right) - \left(p - \frac{1}{p}\right) \cos 2\phi \end{pmatrix}$$

となる。つまり、純剪断変形の変形勾配テンソルは実対称行列である。また、変形勾配テンソルが実対称行列で表されるなら、純剪断変形である。このことは、三次元の共軸変形 (式 6) でもなりたつ。共軸変形で互いに直交する最大伸長方向・最小伸長方向およびそれらに直交する方向という 3 方向を座標軸に選べば、 $\mathbf{F}$ は式 (6) のように対角行列になる。

$\mathbf{F}$ によって apophyses の本数は決まっている。Fig. 9b の単純剪断の場合、第 1 座標に沿っては $\mathbf{x} = \xi$ というように $\mathbf{x}$ と ξ は平行である。そこで、第 1 座標軸方向を apophysis とみなす。Figs. 9a, b はともに平面変形を仮定して作った図であるから、紙面と直交する第 3 座標軸の方向には伸縮しない変形である。その場合も第 3 座標軸に沿っては $\mathbf{x} = \xi$ なので、第 3 座標方も apophysis であると考え、Fig. 9a では紙面に直交するものを含めて apophysis は 3 本存在するが、Fig. 9b では 2 本しか存在しない。また、剛体回転な

ら、回転軸方向が唯一の apophysis である。このように、apophysis の数は変形様式に依存する。固有ベクトルと apophyses との対応からわかるように、この数は $\mathbf{F}$ の実固有値の数に一致するのである。線形代数によると、実対称行列の固有値はすべて実数で、固有ベクトルはすべて直交する。つまり、apophyses が直交するのは $\mathbf{F}$ が対称行列の場合である。その場合、固有ベクトルの方向に座標軸を選べば、 $\mathbf{F}$ は式 (6) のように対角行列になる。つまり、共軸変形なら apophyses は互いに直交し、3 次元的変形なら 3 本、2 次元的変形なら 2 本の apophyses が存在する。非対称行列の次元数以下の本数であり、上述のように $\mathbf{x} = \xi$ となる apophyses が互いに直交することはない。紙面を横切るものも考慮すると Fig. 9a のように apophysis が 3 本存在する変形を subsimple shear という。Fig. 9c のようにのように紙面に直交する apophysis しか存在しないなら supersimple shear という。

7. 極分解

前節の apophyses の本数との関連で、極分解 (polar decomposition) 定理を紹介する。すなわち、与えられた任意の変形勾配テンソル $\mathbf{F}$ に対して、共軸変形を表すある変形勾配テンソル $\mathbf{U}$ および $\mathbf{V}$ ならびに剛体回転を表す変形勾配テンソル $\mathbf{R}$ が存在し、 $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ が成り立つという定理である。つまり任意の $\mathbf{F}$ を、共軸変形と剛体回転の合成としてこの式のように表現することができ、なおかつ、 $\mathbf{F}$ に対して $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{R}$ はユニークに決まるという定理である。共軸変形を表す $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ をそれぞれ、左右のストレッチ・テンソル (left and right stretch tensors) という。 $\mathbf{F}$ をそれらの積に置き換えることを、極分解するという。この定理の証明については、田村 (2000) を参照されたい。

【問題】 $\mathbf{F}$ から $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{R}$ を得るにはどうしたらよいか。

【答え】 $\det \mathbf{F} > 0$ を仮定する。また、 $\xi \neq 0$ とすれば $\mathbf{x} \neq 0$ なので、 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \xi^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \xi > 0$ である。ただし、ここで任意の行列の転置と積の公式 $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ を使った。 $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ とすると、 $\mathbf{C}^T = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^T = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{C}$ だから $\mathbf{C}$ は対称行列である。実対称行列の固有値 C_1 , C_2 , C_3 は実数である。それらに対応した固有ベクトルの方向に座標軸をとると、 $\mathbf{C}$

は対角行列になるから、 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\xi} = C_1 \xi_1^2 + C_2 \xi_2^2 + C_3 \xi_3^2 > 0$. これが任意の $\mathbf{x}$ で成立するためには、 $C_1 > 0$ かつ $C_2 > 0$ かつ $C_3 > 0$ でなければならない. そこで新たに実対称行列

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \sqrt{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{C_3} \end{pmatrix}$$

を定義すると、 $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$ である. 明らかに逆行列 $\mathbf{U}^{-1}$ が存在するので、 $\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}$ とおく. しかしに $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = (\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1})^T \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} = (\mathbf{U}^{-1})^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{U} \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I}$. つまり、 $\mathbf{R}$ は直交行列である. ゆえに、 $\mathbf{U}$ と $\mathbf{R}$ は求めていたものである. さらに、 $\mathbf{V} = \mathbf{F}\mathbf{R}^{-1}$ が求めていた右ストレッチテンソルである. ■

Fig. 9b の単純剪断では、apophysis と平行ではない線分が時計回りに回転してゆく. この種の回転を、 $\mathbf{F}$ を極分解したときの $\mathbf{R}$ が表している. 共軸変形では $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, つまり無回転であることがわかる. これが irrotational の意味で、apophysis に平行な線分は伸縮はしても変形による回転はない. 非共軸変形なら $\mathbf{R} \neq \mathbf{I}$ である.

この定理を利用して、単純剪断とそれに近い 2 種類の変形を描いたのが Fig. 9 である. つまりまず、単純剪断変形の変形勾配テンソル $\mathbf{F}_0$ を使って Fig. 9b を描いた. そして時計回りの微小回転を表す $\mathbf{R}$ を作成し、 $\mathbf{R}^T \mathbf{F}_0$ と $\mathbf{R}\mathbf{F}_0$ を変形勾配テンソルとして描いたのが Fig. 9a と Fig. 9c である. $\mathbf{R}$ を順回転とよぶなら、 $\mathbf{R}^T$ は逆回転である. つまり、単純剪断より回転量が足りない変形は、紙面と平行な面上に 2 本の apophyses をもち、紙面と直交する方向に第 3 の apophysis をもつ. 単純剪断より回転量が多い変形では、紙面と直交する apophysis しか存在しない. 構造地質学では、単純剪断より回転量が少ない変形を subsimple shear, それより回転量が多い変形を supersimple shear という. 本講座の第 6 回でそれらを扱う.

8. 歪み楕円と歪み楕円体

変形前、単位球の形だった岩体が一様変形を受けたとする. 変形後の形状を歪み楕円体 (strain ellipsoid) という. 二次元的変形の場合は、変形前に単位円の形をしていた岩体を想定し、変形後の形状を歪み楕円 (strain ellipse) という. 楕円体には最長半径と最小半径の方向があり、互いに直交する. またそれらに直交する第 3 の方向がある. それらを楕円体の主軸よび、それらに沿った半径を、最小主半径・中間主半径・最大主半径という. 歪み楕円体の場合、主軸の方向を主歪み軸 (principal strain axis), 主半径を主歪み (principal strain) という. 最大主半径と最小半径の方向は、それぞれ変形で最終的に最も伸びた方向と最も短縮した方向である. 構造地質学では最大主半径・中間主半径・最小主半径の方向をそれぞれ X 軸, Y 軸, Z 軸とよび、それらに沿った主半径を X, Y, Z とする.

歪み楕円を表す式を導くためにまず、平面上で直交デカル

ト座標を考える. 原点を中心とする単位円を表す式は $x_1^2 + x_2^2 = 1$ である. これを第 1 座標方向に a 倍に伸ばし、第 2 座標方向に b 倍に伸ばしてできた楕円は、式

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

で表される. 行列を使ってこれを書き換えると、

$$(\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2) \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1. \quad (14)$$

この式で楕円の主軸方向と主半径の情報を担っているのは左辺中央の正方行列である. この場合それは対角行列である. この楕円という実体を止めたまま座標軸を回転させると、行列成分は変化する. つまりこの行列の不変量が、楕円を特徴付けるパラメータに対応しているのである. 上の式は楕円の主軸が座標軸と一致する場合であるが、その場合に行列は対角行列になっている. 座標回転すると行列成分は変化するが、つねに対称行列である.

線形代数学によると、実対角行列を座標回転すると実対称行列になる. つまり、原点を中心とする楕円と実対称行列とを 1 対 1 対応させ、両者を同一視することができる. したがって 2×2 の実対称行列 $\mathbf{A}$ を使って、一般に、原点を中心とする楕円の式 (14) を

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 1 \quad (15)$$

と書き換えることができる. ここで $\mathbf{x}$ はこの楕円の上の点を表す位置ベクトルである. 式 (14) が表す楕円の主半径は a と b であるが、 $\mathbf{A}$ の固有値は $1/a^2$ と $1/b^2$ である. つまり楕円を表す実対称行列の固有値の逆数の平方根が楕円の主半径を表す. じつは同じこの式 (15) で楕円のみならず、楕円体を表すこともできる. その場合、位置ベクトルは三次元ベクトルである.

次に、歪み楕円体の式を考える. 変形前のその形を単位球とする. 単位球の上の点はどこでも原点からの距離が 1 なので、変形前の単位球を表す式は $|\boldsymbol{\xi}|^2 = \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi} = 1$ である. さて、 $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{F}^T \mathbf{x}$ であるから、これを単位球の式に代入すると、 $(\mathbf{F}^{-1} \mathbf{x})^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{x} = 1$. 転置記号を括弧の中に分配して、

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{x} = 1 \quad (16)$$

となる. 左辺の正方行列について $[(\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{F}^{-1}]^T = (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{F}^{-1}$ になりたつので、それは実対称行列である. 式 (15) と比べると、式 (16) が楕円体を表していることがわかる (二次元なら楕円). 単位球から導かれ、変形後の位置ベクトル $\mathbf{x}$ が表す楕円体であるから、これは歪み楕円体を表す式にほかならない. ここで行列式に関する公式 $\det \mathbf{F}^{-1} = 1/\det \mathbf{F}$ および $\det \mathbf{F}^T = \det \mathbf{F}$ により、 $\det \mathbf{F} \neq 0$ なら $\det [(\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{F}^{-1}] \neq 0$ である. つまり、歪み楕円体および歪み楕円を表す実対称行列は、行列式がゼロではないと考えてよい (ゼロなら岩体の体積がゼロになる).

ここで、フィンガー・テンソル (Finger tensor または Left Cauchy-Green tensor)

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$$

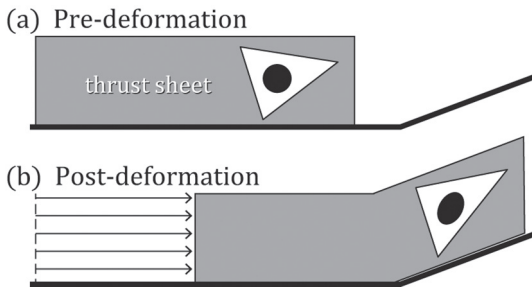


Fig. 10. Schematic illustrations for the fault-bend folding of a thrust sheet. A strain ellipse can be determined for the homogeneous deformation in an area defined by three points, if the pre- and post-deformation positions of the points are given. Triangles indicate the positions by their vertices. 平面変形では、変形前後の3点の位置がわかれば、一様変形を仮定して、歪み楕円を描くことができる。断層折れ曲がり褶曲によるスラストシートの変形を模式的に示す。

を導入する。 $\mathbf{B}^T = (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^T = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{B}$ だからこれは対称である。また、 $\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^{-1} = (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{F}^{-1}$ であるから、 $\mathbf{B}$ の固有値は $(\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{F}^{-1}$ の固有値の逆数に等しい。つまり、 $\mathbf{B}$ の固有値の平方根が、歪み楕円(体)の主半径に一致し、固有ベクトルが主歪み軸に一致する。つまり、主歪みと主歪み軸を計算するには、 $\mathbf{F}$ から $\mathbf{B}$ をつくって、その固有値問題を解けばよい。

【問題】 単純剪断の場合、主歪みと主歪み軸の方向はどうなるか計算せよ。また、無限小の単純剪断変形では、主歪み軸の方向はどうなるだろうか。

【答え】 変形勾配テンソルを

$$\begin{pmatrix} 1 & 2q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

とおくと、 $2q$ が工学剪断歪みである。フィンガー・テンソルは

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2q \\ 2q & 4q^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

したがってその固有方程式は $|\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}| = \lambda^2 - 2(1 - 2q^2)\lambda + 1 = 0$ であり、その解である固有値は $1 + 2q^2 \pm 2q(q^2 + 1)^{1/2}$ 。ゆえに主歪みはその平方根で、それらに対応する固有ベクトル(主歪み軸)は $(q \pm (q^2 + 1)^{1/2}, 1)^T$ である(複号同順)。無限小の単純剪断($q \rightarrow 0$)のとき、それらは $(1, \pm 1)^T$ に収束する。つまりその場合、主歪み軸は変位方向と 45° で交わる。

■ 逆センスの無限小単純剪断($q \rightarrow -0$)では、主歪み軸は $(1, \mp 1)^T$ であるから、 X 軸の方向が $q \rightarrow +0$ の場合と 90° 異なる。負の値から正の値に q が連続的に変化する場合、 $q = 0$ において X 軸が突然 90° ジャンプするわけである。ただしその瞬間の主歪みは 0 であるから、歪みテンソルに不連続性は生じない。主歪み軸の方向だけでは不連続だが、歪みも考慮すると連続というこの観察は、歪み解析の誤差論で重要になる(本講座第5回)。実際、式(17)の $\mathbf{F}$ の各成分が、 $q = 0$ で不連続に変化するわけではない。

【問題】 三角測量やGPS観測などで、地表における3点の

相対位置の変化が検出されれば、その変化にもとづいて歪み楕円を描くことができる(Fig. 10)。

バランス断面を描いた場合にも、岩体内の各点の変形前にどこにあったか推定することができるので、変形後の位置とくらべるにより、同じく歪み楕円を描くことができる。そこで、変形前後それぞれで、対応する3点が与えられているとして、第 i 点の変形前後の位置ベクトルを $\xi^{(i)}$, $\mathbf{x}^{(i)}$ とする($i = 1, 2$ or 3)。それら3点の付近で一様な平面歪みを仮定して、歪み楕円を計算せよ。ただし、 $\det \mathbf{F} > 0$ とする。

【答え】 相対位置ベクトル $\mathbf{p} = \xi^{(2)} - \xi^{(1)}$, $\mathbf{q} = \xi^{(3)} - \xi^{(1)}$, $\mathbf{p}' = \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{q}' = \mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{(1)}$ を定義する。一様な平面変形なので、変形勾配テンソルを

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とすると、 $\mathbf{p}' = \mathbf{F}\mathbf{p}$, $\mathbf{q}' = \mathbf{F}\mathbf{q}$ から連立方程式

$$\begin{cases} p'_1 = ap_1 + bp_2 \\ q'_1 = aq_1 + bq_2 \end{cases} \quad \begin{cases} p'_2 = cp_1 + dp_2 \\ q'_2 = cq_1 + dq_2 \end{cases} \quad (18)$$

が成り立つことがわかる。これを解いて $\mathbf{F}$ の成分が得られたなら、フィンガー・テンソルを構成して、その固有値固有ベクトルを求めればよい。しかし、連立方程式(18)が解を持たない場合がある。それは2つの連立方程式系のそれぞれの係数行列の行列式がゼロの場合

$$\det \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} = p_1 q_2 - p_2 q_1 = \mathbf{p} \times \mathbf{q} = 0$$

である。これが成り立つのは、 $\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$ のいずれかまたは両方がゼロベクトルのときと、これらが一次従属のときである。つまり、変形前に異なる3点を選べば、歪み楕円を描くことができる。

9. Flinn と Hsü のダイアグラム

歪み楕円体の形状を図解で示そうとして、よく使われるのが Flinn ダイアグラムである(Flinn, 1962)。実際は下で説明するように、Hsü ダイアグラム(Hsü, 1966)のほうが優れているのだが、工学系の雑誌で提案されたせいか、Hsü ダイアグラムが地質学界であまり利用されていないのは残念なことである。最近の Fossen (2010) の教科書 *Structural Geology* は両者を紹介しているが、長短を論じてはいない。ここでそれを論じよう。

まず、Flinn ダイアグラムは、歪み楕円体の主半径を X , Y , Z として、 Y/Z と X/Y を両対数プロットした図である。定義により $X \geq Y \geq Z$ なので、Flinn ダイアグラムでは $X/Y \geq 1$, $Y/Z \geq 1$ である。両者とも等号がなりたつのは球の場合だが、それには無変形 $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ の場合と等方的膨縮の場合である。そして、Flinn パラメータとよぶ

$$k = \frac{X/Y - 1}{Y/Z - 1}$$

の値が 0 なら歪み楕円体は円盤型、 ∞ ならハマキ型、そして 1 ならちょうど中間の $X:Y:Z = X:1:(1/X)$ である。最後の場合を平面歪みと書く文献もあるが、正確には、非圧縮でかつ $k = 1$ なら平面歪みである。

さて、歪み楕円体を持つ情報は、サイズ・主軸方向・形状

(円盤型(oblate)かハマキ型(prolate)かの違い)・歪み量に分解できる。最後のものは、歪み楕円が球とどれだけ異なるか、すなわち球との非類似度である。例えばアスペクト比 X/Z がその指標である(Yamaji et al., 2007)。Flinn ダイアグラムは横軸も縦軸も主半径の比であるから、サイズ情報はダイアグラムから捨象されている。また、主軸方向の情報もちろん捨象されている。Flinn パラメータでハマキ型を表そうとすると、値が無限大に発散してしまうところがある。ハマキ型($k=\infty$)と中間的な形状($k=1$)との非類似度が無限大であるのに対し、円盤型($k=0$)と中間的な形状との非類似度は1であり、本来対等であるべきハマキ型と円盤型で、 k の値が文字通り無限に異なることに問題がある。こうしたことは、形状情報に関する量と歪み量の等値線がダイアグラムの上で単純な図形にならないことという Flinn ダイアグラムの欠点に由来する。Mookerjee and Peek (2014)は k 値のバリエーションが、形状のばらつき具合とうまく対応しないことを指摘している。例えば $k=100$ と $k=1000$ の形状の違いと $k=0.01$ と $k=0.1$ の形状の違いでは、どちらが大きいかわからない。

こうした問題は、Hsü ダイアグラムでは解決されている。形状情報に関する量と歪み量とが、直交座標で表されるためである。すなわち、形状は-1 から+1 までの値をもつ Lode 比

$$v = \frac{2Y - X - Z}{X - Z}$$

で表される。ハマキ型・中間型・円盤型はそれぞれ $v = -1, 0, +1$ で、Flinn パラメータの場合の不都合が v にはない。ハマキ型と円盤型が対等に扱われているということである。そして、歪み量の指標として

$$\varepsilon_s = \sqrt{[\log(X/Y)]^2 + [\log(Y/Z)]^2 + [\log(Z/X)]^2}$$

を使うのである。これは八面体剪断歪みとよばれるが(例えば Fossen, 2010)、微小歪みテンソルを使って定義される通常の八面体剪断歪み(例えば山路, 2000)とは異なることに注意すべきである。上の式の右边が主半径の比から計算される量であることから、サイズ情報はこのパラメータには含まれないことがわかる。このパラメータは3つの主半径の値のばらつきの大きさを表していて、球ならばばらつきはなく、 $\varepsilon_s=0$ である。Hsü ダイアグラムでは ε_s を動径とし(Fossen (2010)は $\sqrt{3} \varepsilon_s/2$ を動径としている)、Lode 角とよばれる

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{3}(v+1)}{3-v} \right]$$

を偏角とする極座標プロットを用いる。 θ と v は1対1対応し、 $\theta \approx 30^\circ(1+v)$ が成り立つ。この近似の誤差は最大で約2%である(Yamaji and Sato, 2006)。したがって Fig. 11 のように、この近似式の右边を偏角と考えても大きな間違いではない。極座標の動径座標と偏角座標は各点で直交するので、この図では形状の情報と歪み量の情報を容易に分解して読み出すことができる。このために、図上の点の位置とそれらの情報との対応関係がわかりやすい。Hsü ダイアグラ

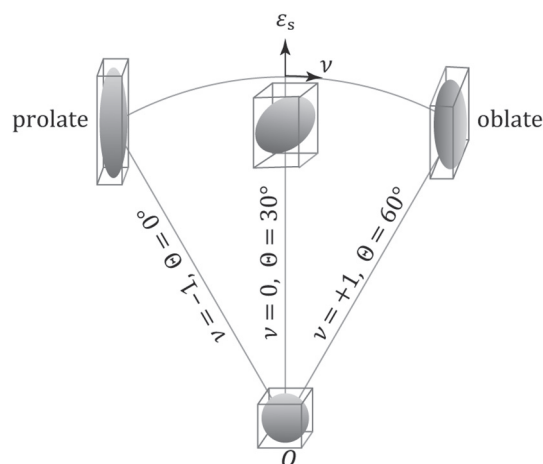


Fig. 11. Hsü diagram for plotting the shapes of strain ellipsoids. 歪み楕円体の形を表す Hsü ダイアグラム。

ムは、塑性論で応力の異方性を図示する π 平面(例えば山路, 2000, p. 191)を、歪み楕円体の形状に応用した図である。このため Hsü ダイアグラムは塑性論との相性がよい。

10. 教科書の紹介

次回以降のために、今回は連続体力学の基本的な事項を解説した。連続体力学について、最小限の事項を要領よくまとめる点で田村(2000)の教科書を勧める。倍のページ数だが、平易な語り口で数学的基礎から物性論の初歩までを扱った京谷(2008)の教科書も勧められる。上級の教科書としては、テンソル解析をきちんと解説した久田(1992)、そしてさらに変形と熱現象がカップリングした場合も扱っているセドフ(1977)の本が素晴らしい。

構造地質学の教科書で理論的な面を重点的に解説したものとして、和書では拙著『理論テクトニクス入門』がある。洋書では最近出た Hobbs and Ord (2015)は変成岩の構造を理論的に扱うことを目指して、岩石変形を理論的に扱っていて参考になる。地球物理学の教科書ではあるが、名著『Geodynamics』はもちろん役に立つ(最新版は, Turcotte and Schubert, 2014)。

謝 辞

査読者の石井和彦氏ならびに担当編集委員の増田幸治氏のコメントにより、本稿は読みやすくなった。また、この研究で科学研究費補助金(基盤研究(B)22340151)を使用した。記して感謝の意を表する。

文 献

- 甘利俊一・金谷健一(Amari, S. and K. Kanatani), 1987, 線形代数 (*Linear Algebra*)*. 講談社(Kodansha Co.), 276p.
- Aris, R., 1962, *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 286p.
- Flinn, D., 1962, On folding during three-dimensional progressive deformation. *Quat. Jour. Geol. Soc. London*, **118**, 385–433.

- Fossen, H., 2010, *Structural Geology*. Cambridge Univ. Press, 463p.
- 深谷賢治 (Fukaya, K.), 2004, 双曲幾何 (*Hyperbolic Geometry*)*. 岩波書店 (Iwanami Shoten), 167p.
- 久田俊明 (Hisada, T.), 1992, 非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎 (*Foundations of Tensor Analysis for Non-Linear Finite Element Method*)*. 丸善 (Maruzen Co.), 226p.
- Hobbs, B. and Ord, A., 2015, *Structural Geology. The Mechanics of Deforming Metamorphic Rocks: Volume 1, Principles*. Elsevier, 665p.
- Hsü, T. C., 1966, The characteristics of coaxial and non-coaxial strain paths. *Jour. Strain Anal. Eng.*, **1**, 216–222.
- 金川久一 (Kanagawa, K.), 2011, 地球のテクトニクス II : 構造地質学 (*Global Tectonics, II: Structural Geology*)*. 共立出版 (Kyoritsu Publ.), 253p.
- 京谷孝史 (Kyoya, T.), 2008, よくわかる連続体力学ノート (*A Note on Continuum Mechanics*)*. 森北出版 (Morikita Publ.), 281p.
- Mookerjee, M., Peek, S., 2014, Evaluating the effectiveness of Flinn's k -value versus Lode's ratio. *Jour. Struct. Geol.*, **68**, 33–43.
- Mulchrone, K. F. and Choudhury, K. R., 2004, Fitting an ellipse to an arbitrary shape: Implications for strain analysis. *Jour. Struct. Geol.*, **26**, 143–153.
- パスキエ・トゥロウ・鳥海光弘・金川久一訳 (Passchier, C. W. and Trouw, R. A. J., translated by Toriumi, M. and Kanagawa, K.), 1999, マイクロテクトニクス (*Microtectonics*). シュプリンガー・フェアラーク東京 (Springer-Verlag, Tokyo), 277p.
- Ramsay, J. G. and Huber, J. I., 1983, *The Techniques of Modern Structural Geology: Volume 1, Strain Analysis*. Academic Press, London, 307p.
- セドフ・大橋義男訳 (Sedov, L. I., translated by Ohashi, Y.), 1977, 連続体力学 (*A Course in Continuum Mechanics*). 培風館 (Baifukan Co.), 248p.
- 田村 武 (Tamura, T.), 2000, 連続体力学入門 (*Introduction to Continuum Mechanics*)*. 朝倉書店 (Asakura Publ.), 148p.
- 戸田盛和・浅野功義 (Toda, M. and Asano, N.), 1989, 行列と1次変換 (*Matrices and Linear Transformation*). 岩波書店 (Iwanami Shoten), 175p.
- Turcotte, D. L. and Schubert, G., 2014, *Geodynamics, 3rd Ed.* Cambridge Univ. Press, 623p.
- 山路 敦 (Yamaji, A.), 2000, 理論テクトニクス入門：構造地質学からのアプローチ (*Introduction to the Theories of Tectonics: Approach from Structural Geology*)*. 朝倉書店 (Asakura Publ.), 287p.
- Yamaji, A., 2008, Theories of strain analysis from shape fabrics: A perspective using hyperbolic geometry. *Jour. Struct. Geol.*, **30**, 1451–1465.
- Yamaji, A., 2013a, Comparison of methods of algebraic strain estimation from Rf/ϕ data: a unified theory of 2D strain analysis. *Jour. Struct. Geol.*, **49**, 4–12.
- Yamaji, A., 2013b, Two-dimensional finite deformations evaluated from pre- and post-deformation markers: Application to balanced cross sections. *Jour. Struct. Geol.*, **51**, 144–155.
- Yamaji, A. and Maeda, H., 2012, Determination of 2D strain from a fragmented single amonoid. *Island Arc*, **22**, 126–132.
- Yamaji, A. and Sato, K., 2006, Distances for the solutions of stress tensor inversion in relation to misfit angles that accompany the solutions. *Geophys. Jour. Int.*, **167**, 913–942.
- Yamaji, A., Yokokawa, M. and Sato, K., 2007, Analysis of clustering in three-dimensional grain fabric. *Geosphere*, **3**, 108–118.

* English translation from the original written in Japanese.

(著者プロフィール)



山路 敦 京都大学大学院理学研究科地球惑星科学専攻教授。88年 東北大学大学院理学研究科博士課程修了(理学博士), 10年から現職。研究内容: 構造地質学の基礎(特に応力インバージョンの方法論), テクトニクス。ホームページ: www.kueps.kyoto-u.ac.jp/~web-bs/yamaji/index.htm。