

S6

実双曲型空間上の laplacian の固有函数の

Poisson 積分表示

元大理 峰村 勝弘

§ 0. 序

最近 Helgason は [6] に於いて, 単位円内部の Poincaré-metric から作られる laplacian の固有函数はすべて単位円上の (佐藤の) 超函数を Poisson 積分で得られることを示した。これは一般に実双曲型空間において同様の事実が成立することを述べる。すなわち実双曲型空間上の laplacian の任意の固有函数は, 境界上のある超函数の Poisson 積分として表わされる。

§ 1. 準備

G を連結な実半単純 Lie grp 2) 中心有限とす。 G の Lie alg. を $\mathfrak{g}_0$ とし $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ を一つの Cartan 分解とす。 $\mathfrak{o}_+$ を $\mathfrak{p}_0$ の一つの max. abelian subsp. $\mathfrak{o}_0$ を $\mathfrak{o}_+$ を含む $\mathfrak{g}_0$ の max. abel. subalg. (すなわち $\mathfrak{g}_0$ の Cartan subalg.) とし, $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}, \mathfrak{o}_\mathfrak{k}, \mathfrak{o}, \mathfrak{k}, \mathfrak{p}$ をそれぞれ $\mathfrak{o}_+, \mathfrak{o}_- = \mathfrak{o}_0 \cap \mathfrak{k}_0, \mathfrak{o}_0, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0$ の $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ における複素化とす。 $(\sqrt{-1}\mathfrak{o}_- + \mathfrak{o}_+)^*$ と $\mathfrak{o}_+^*$ は compatible order とし, この order に従って $(\mathfrak{g}, \mathfrak{o})$ の positive root 全体を P とす。 $P_+ = \{\alpha \in P; \alpha|_{\mathfrak{o}_+} \neq 0\}$ とす。 $\mathfrak{g}_\alpha$ は α の root subsp. を表す。

$\alpha \in \mathfrak{o}^+$ に対して $\bar{\alpha} = \alpha$ $\alpha \in \mathfrak{o}_p$ 上の制限を表わす。

$\mathfrak{p} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathfrak{p}_+} \alpha$, $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{p}_+} \alpha$, $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{o}_0$, $\in \mathbb{C}$
 K, A, N をそれぞれ $\mathfrak{k}_0, \mathfrak{o}_+, \mathfrak{n}_0 \in \text{Lie alg.}$ である G の
 analytic subgroups である。 $x \in G$ に対して $H(x) \in \mathfrak{o}_+$ $\in$
 $x \in K \cdot \exp H(x) \cdot N$ として定まる。

$X = G/K$, $B = K/M$ (但し $M = Z_K(A)$) $\in \mathbb{C}$, dk, db はそれぞれ
 K, B 上の K -inv. な normalized meas. である。

§ 2. B 上の連続関数の Poisson 積分。

以後は ∞ までの $\text{rank}(X) = 1$ である。

$s \in \mathbb{C}$ に対して $X \times B$ 上の関数 $P_s(z, b) \in$

$$P_s(xK, kM) = \exp\{-(1+s)\rho H(x^{-1}k)\} \quad x \in G, k \in K$$

で定義し, $\varphi \in C(B)$ (B 上の連続関数) に対して X 上の関数
 $P_s(\varphi)$ を

$$P_s(\varphi)(z) = \int_B P_s(z, b) \varphi(b) db \quad z \in X$$

で定義する。

$R \in K$ の irred. unit. rep. の equi. class 全体を $\mathbb{R}^0$ $\in \mathbb{C}$ として M
 に属する class 1 の $\mathbb{R}^0$ 全体とする。 $R \in \mathbb{R}^0$ の代表元 (τ^R, W^R)
 $\in \mathbb{C}$ として fix. $d(R) = \dim W^R$ とおく。 W^R の orthonormal base
 $\{w_1^R, \dots, w_{d(R)}^R\} \in \mathbb{R}^0$ $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して w_α^R の M -fixed vector
 である β に対して $\alpha = \beta$ とおく。 $(\cdot, \cdot)$ は W^R 上の unitary 内積を表わす。

$$\bar{L}_{ij}^\sigma(k) = (L^\sigma(k) w_j^\sigma, w_i^\sigma)$$

$$\varphi_{ij}^\sigma(k) = d(\sigma)^{1/2} \bar{L}_{ij}^\sigma(k)$$

$$\varphi_i^\sigma = \varphi_{i1}^\sigma \quad (\sigma \in R^0)$$

とある。 $\pi \in K \cap C(K), C(B), C(X)$ 上の left regular rep. である。

$$V^\sigma = \{f \in C(K) \mid f \text{ は } \pi \text{ かつ } \sigma \text{ に従って変換する}\}$$

とある。 Kostant [10] の結果より、 $\sigma \in R^0$ に対して W^σ が M -fixed vector は scalar $\{ \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} \}$ の w_σ に一致する。

$$L^2(B) = \sum_{\sigma \in R^0} V^\sigma, \\ V^\sigma = \sum_{i=1}^{d(\sigma)} \mathbb{C} \varphi_i^\sigma \quad (\sigma \in R^0).$$

$\Delta \in X = G/K$ 上の σ_0 の Killing form $\{ \cdot, \cdot \}$ が G -inv. Riemannian metric に対応する Laplacian Δ , $S \in \mathbb{C}$ に対して

$$\mathcal{H}_S(X) = \{ f \in C^\infty(X) \mid \Delta f = (S^2 - 1) \langle f, f \rangle \}$$

$$\mathcal{H}_S^\sigma(X) = \{ f \in \mathcal{H}_S(X) \mid f \text{ は } \pi \text{ かつ } \sigma \text{ に従って変換する} \}$$

μ_0 は positive reduced restricted root である。

$$P_{\mu_0} = \{ \alpha \in P_+ \mid \bar{\alpha} = \mu_0 \} \quad p = \# P_{\mu_0}$$

$$P_{2\mu_0} = \{ \alpha \in P_+ \mid \bar{\alpha} = 2\mu_0 \} \quad q = \# P_{2\mu_0}$$

とある。 $\mathbb{C}$ 上の函数 $e(s)$ は

$$e(s) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\frac{p}{2} + 1 + \left(\frac{p}{2} + q\right)s\right)\right)^{-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\left(\frac{p}{2} + q + \left(\frac{p}{2} + q\right)s\right)\right)^{-1}$$

で定められ Helgason [6] にある結果より次の命題を得る。

命題 2.1. (1) P_S は $C(B)$ を $\mathcal{H}_S(X)$ に写す。

$$(2) e(S) \neq 0 \Leftrightarrow P_S \text{ は } C(B) \text{ 上 } 1:1$$

$$(3) \mathcal{H}_S^\sigma(X) \neq \{0\} \Rightarrow \sigma \in R^0$$

$$(4) P_S(V^\sigma) \subset \mathcal{H}_S^\sigma(X) \quad (\sigma \in R^0). \quad \text{且 } P_S \text{ は } V^\sigma \text{ 上 } 1:1 \text{ 且 } P_S(V^\sigma) = \mathcal{H}_S^\sigma(X).$$

$$\text{以後 } f_{S,i}^\sigma = P_S(\varphi_i^\sigma) \quad f_S^\sigma = f_{S,1}^\sigma \quad \text{と定む。}$$

命題 2.2. $e(S) \neq 0$, $f \in \mathcal{H}_S(X)$ とする

$$(1) \text{ ある } a_i^\sigma \in \mathbb{C} \text{ が存在して } \forall z \in X \text{ に対し}$$

$$f(z) = \sum_{\sigma \in R^0} d(\sigma) \sum_{i=1}^{d(\sigma)} a_i^\sigma f_{S,i}^\sigma(z) \quad (\text{係数の有限性})$$

$$(2) \varphi_f^2(k) = f(kz) \quad (k \in K) \quad \text{と定む}$$

$$\varphi_f^2 = \sum_{\sigma \in R^0} d(\sigma)^{-1} \sum_{i=1}^{d(\sigma)} a_i^\sigma f_{S,i}^\sigma(z) \varphi_i^\sigma \quad (K \text{ 上 } \Delta \text{-線形性})$$

$$(3) \| \cdot \| \text{ は } L^2(K) \text{ の norm とする。}$$

$$\| \varphi_f^2 \|^2 = \sum_{\sigma \in R^0} d(\sigma)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{d(\sigma)} |a_i^\sigma|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{d(\sigma)} |f_{S,j}^\sigma(z)|^2 \right).$$

$\mathcal{L}$ は G の universal enveloping algebra と表わす。 $\mathcal{L}$ の元 X は G 上の left-invariant differential operator と見なす。 Ω は $\mathcal{L}$ の Casimir element とする。 $f \in C^\infty(X)$ に対し

$$(\Delta f)(x) = \Omega f(x).$$

一方 $u \in L^2(K)$ に対し $f \in C^\infty(X)$ に対し $uf = 0$ on X ならば

Ω を module L 上の $\mathbb{K}$ の変換群 Γ として、 $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ を $\langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle = 1$,

$H_1 \in \mathfrak{a}_p, H_2, \dots, H_m \in \mathfrak{a}_k$ を $\{H_1, \dots, H_m\}$ が $\mathfrak{a}$ の base として

$$\langle H_i, H_j \rangle = \delta_{ij}$$

に Γ の構に選んでおく。 $X_\alpha = Z_\alpha + Y_\alpha$ ($Z_\alpha \in \mathbb{K}, Y_\alpha \in \mathfrak{p}$) と分解

$$L2 \quad \omega_{\mu_0} = \sum_{\alpha \in P_{\mu_0}} (Z_\alpha Z_{-\alpha} + Z_{-\alpha} Z_\alpha)$$

$$\omega_\mu = \sum_{\alpha \in P_{\mu_0}} (Z_\alpha Z_{-\alpha} + Z_{-\alpha} Z_\alpha)$$

と置く。 $\mu_0(H_0) = 1$ なる $H_0 \in \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^\perp$ があり $a_t = \exp t H_0$ ($t \in \mathbb{R}$)

と置く。 A は parameter t に関する λ である。 $\sigma = p/2 + q$ と置く。

命題 2.3. $f \in \mathcal{H}_s(X)$ に対して $\sigma = p/2 + q$ と置く。

$$\frac{d^2}{dt^2} f(a_t k) + (p \cosh t + q \sinh 2t) \frac{d}{dt} f(a_t k)$$

$$- \frac{2p+8q}{(\sinh t)^2} [\Pi(\omega_{\mu_0}) f](a_t k) - \frac{2p+8q}{(\sinh 2t)^2} [\Pi(\omega_{\mu_0}) f](a_t k)$$

$$+ (1-s^2) \sigma^2 = 0$$

が成り立つ。

§ 3. Fatou type の定理.

この節では、次の § 1 にある f_s^σ を決定する時には必要で次の定理

を述べる。 $f_s = p_s(1_B)$ (1_B は B 上の恒等的に 1 である函数) と置く。

f_s は Harish-Chandra の p -函数 φ_λ ($\lambda = -\sqrt{1-s}p$) に一致する。

定理 3.1. $\operatorname{Re}(s) > 0$ とする。 $f_s(a_k)$ ($a \in A$) は $p(H(a))$

が十分大のとき 0 に近づく。 $\varphi \in C(B)$ に対して

$$\lim_{P(H(a)) \rightarrow \infty} \frac{1}{f_s(ak)} (P_s \varphi)(kak) = \varphi(kM)$$

が K 上 一様に成立する。

定理 3.1 の為の補題を述べる。

補題 3.2. $s \in \mathbb{C}$ とする

$$f_s(ak) = (\cosh t)^{(s-1)\sigma} F\left(\frac{1-s}{2}\sigma, \frac{1-s}{2}\sigma + \frac{1-\rho}{2}, \frac{\rho+s+1}{2}; (\tanh t)^2\right)$$

すなわち F は超幾何関数を表わす。

略証. 命題 2.3.10 より $\pi(\omega_{\mu_0})f = \pi(\omega_{\mu_0})f = 0$ なる s

$z = (\tanh t)^2$ とおくと

$$\frac{d^2}{dz^2} f_s + \frac{(p+q+1) + (q-3)z}{2z(1-z)} \frac{d}{dz} f_s + \frac{(1-s^2)\sigma^2}{4z(1-z)^2} f_s = 0$$

を得る。これを解くと $f_s(ek) = 1$ の補題を得る。

補題 3.3. $\xi = \operatorname{Re}(s) > 0$ とする。 $\exists \delta > 0$ なる δ と、十分大なる

t に対し

$$2\delta (\cosh t)^{(\xi-1)\sigma} \geq |f_s(ak)| \geq \delta (\cosh t)^{(\xi-1)\sigma}$$

が成立する。

系 3.4. $\xi = \operatorname{Re}(s) > 0$ とする。 $\exists \eta > 0$ なる η と、十分大なる t

に対し

$$\frac{f_s(ak)}{|f_s(ak)|} \leq \eta$$

が成り立つ。

補題 3.5. $P_S(s) > 0$ である。 B に $\delta_1 + \delta_3 \in M$ の任意の近傍 U に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{b \in B-U} \left| \frac{P_S(a_t K, b)}{f_S(a_t K)} \right| = 0$$

定理 3.1 の略証 $a = a_t$ とおく。

$$P_S(\varphi)(ka_t K) = \int_B P_S(a_t K, b) \varphi(kb) db$$

に注意すれば

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{f_S(a_t K)} P_S(\varphi)(ka_t K) - \varphi(kM) \right| \\ & \leq \int_B \left| \frac{P_S(a_t K, b)}{f_S(a_t K)} \right| |\varphi(kb) - \varphi(kM)| db \end{aligned}$$

$\varphi \in C(B)$ より 任意の $\varepsilon > 0$ に対して ある近傍 $U \ni eM$ 2

$$|\varphi(kb) - \varphi(kM)| < \varepsilon \quad (b \in U)$$

が任意の $k \in K$ に対して成り立つ $\delta_1 + \delta_3$ の存在する。

$$m = 2 \sup_{b \in B} |\varphi(b)|$$

とすれば

$$\begin{aligned} & \int_B \left| \frac{P_S(a_t K, b)}{f_S(a_t K)} \right| |\varphi(kb) - \varphi(b)| db \\ & \leq \varepsilon \int_U \left| \frac{P_S(a_t K, b)}{f_S(a_t K)} \right| db + m \sup_{b \in B-U} \left| \frac{P_S(a_t K, b)}{f_S(a_t K)} \right| \\ & \leq \varepsilon \frac{f_S(a_t K)}{f_S(a_t K)} + m \sup_{b \in B-U} \left| \frac{P_S(a_t K, b)}{f_S(a_t K)} \right| \end{aligned}$$

従って系 3.4 と補題 3.5 からすぐ証明される。

§4. 実双曲型空間上の laplacian の k -finite 固有函数

以下 $G = SO_0(n, 1)$ (一般 n -レンツ群) として話を進める。

極大部分群 K は $SO(n)$ に同型で $X = G/K$ は実双曲型空間と呼ばれる。

$G = SO_0(n, 1)$ に属する性質を少し列挙する。(15) 参照)

$$(1) \quad P_{\mu_0} = P_+, \quad P_{2\mu_0} = \phi, \quad p = n-1, \quad q = 0.$$

(2) ω_K を K の Casimir 作用素とし $m_0 \in M$ のリ-環とすると

$$\omega_{\mu_0} \equiv \frac{n-2}{n-1} \omega_K \pmod{m_0}.$$

(3) R^0 は N^0 と同一視出来る。この同一視の下では次の性質がある。

$$l \in N^0, \quad f \in \mathcal{H}_s^l \text{ とする}$$

$$\pi(\omega_K)f = \lambda_l f \quad \text{但し } \lambda_l = \frac{l(l+n-2)}{2(n-2)}.$$

(2), (3) より $f \in \mathcal{H}_s^l$ ならば $a \in A$ に対して

$$[\pi(\omega_{\mu_0})f](a) = \frac{l(l+n-2)}{2(n-1)} f(a)$$

が成り立つ。従って命題 2.3 より次の補題を得る。

補題 4.1. $l \in N^0, f \in \mathcal{H}_s^l$ とする。

$$\frac{d^2}{dt^2} f + (n-1) \coth t \frac{df}{dt} - \frac{l(l+n-2)}{(\sinh t)^2} f + (1-s^2) \sigma^2 f = 0.$$

$z = (\tanh \frac{t}{2})^2$ 変数変換すると補題 4.1 の微分方程式は

$$z(1-z)^2 \frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{1}{2}(1-z)(nz - 4z + n) \frac{df}{dz} - l(l+n-2) \frac{(1-z)^2}{4z} + (1-s^2)\sigma^2 f = 0$$

となる。この微分方程式の解の基本系は

$$\begin{aligned} & z^{\frac{l}{2}} (1-z)^{(1-s)\sigma} F(l+(1-s)\sigma, -s\sigma + \frac{1}{2}, l+\sigma + \frac{1}{2}; z), \\ & z^{-\frac{l-1}{2}-\sigma} (1-z)^{(1-s)\sigma} F(-l-(1+s)\sigma+1, -s\sigma + \frac{1}{2}, -l-\sigma + \frac{3}{2}; z) \end{aligned}$$

で与えられる。 $f \in \mathcal{H}_s^l$ は $t \rightarrow \infty$ に C^∞ である f は最初の解の定数倍で与えられる。RPT 系 $C \in \mathbb{C}$ が存在して $f \in \mathcal{H}_s^l$ は

$$\begin{aligned} f(a_2 t k) &= C (\tanh t)^l (\cosh t)^{2(s-1)\sigma} \\ &\quad \times F(l+(1-s)\sigma, -s\sigma + \frac{1}{2}, l+\sigma + \frac{1}{2}; (\tanh t)^2) \end{aligned}$$

と表わされる。

ここで $f_s = p_s(1_0) = f_{s,1} (= f_s^0)$ 1: 注意する。 $f_s(ek) = 1$ となる, $C=1$ RPT

$$f_s(a_2 t k) = (\cosh t)^{2(s-1)\sigma} F((1-s)\sigma, -s\sigma + \frac{1}{2}, \sigma + \frac{1}{2}; (\tanh t)^2).$$

今 $\operatorname{Re}(s) > 0$ と仮定する。 $\Rightarrow$ a と σ ([11, p. 244])

$$\lim_{z \rightarrow 1} F(l+(1-s)\sigma, -s\sigma + \frac{1}{2}, l+\sigma + \frac{1}{2}; z) = \frac{\Gamma(l+\sigma + \frac{1}{2}) \Gamma(2s\sigma)}{\Gamma(s\sigma + \frac{1}{2}) \Gamma(l+(1+s)\sigma)}$$

従って $\varphi \in V^l$, $f = p_s(\varphi)$ とあると $f \in \mathcal{H}_s^l$ 2:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(a_2 t k)}{f_s(a_2 t k)} = C \frac{\Gamma(l+\sigma + \frac{1}{2})}{\Gamma(s\sigma + \frac{1}{2})} \cdot \frac{\Gamma(l+(1+s)\sigma)}{\Gamma(2s\sigma)}$$

一方定理 3.1 より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(a_2 t k)}{f_s(a_2 t k)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{f_s(a_2 t k)} \quad \mathcal{P}_s(\varphi)(a_2 t k) = \varphi(eM)$$

従って $\operatorname{Re}(s) > 0$ あり。

$$f(a_2 t k) = \varphi(eM) e(l, s) (\tanh t)^l (\cosh t)^{2(s-1)\sigma} \\ \times F(l + (1-s)\sigma, -s\sigma + \frac{1}{2}, l + \sigma + \frac{1}{2}; (\tanh t)^2) \quad \dots (*)$$

かゝり立つ。ゆゑ

$$e(l, s) = \frac{\Gamma(\sigma + \frac{1}{2}) \Gamma(l + (1+s)\sigma)}{\Gamma(l + \sigma + \frac{1}{2}) \Gamma((1+s)\sigma)}.$$

$\epsilon = 3$ の $e(l, s)$ は l を固定した時 s の有理式に、従って $\mathbb{C}$ 上 holomorphic. 従って l, t を固定すれば (*) の両辺は s に関して holomorphic. よって一致の定理より (*) は任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して成立する。よって

命題 4.2. $s \in \mathbb{C}$, $l \in \mathbb{N}^0$, $\varphi \in V^l$, $f = \mathcal{P}_s(\varphi)$ ならば

$$f(a_2 t k) = \varphi(eM) e(l, s) (\tanh t)^l (\cosh t)^{2(s-1)\sigma} \\ \times F(l + (1-s)\sigma, -s\sigma + \frac{1}{2}, l + \sigma + \frac{1}{2}; (\tanh t)^2)$$

$\epsilon \leq 1$ の $\varphi = \varphi_i^l$ に対し、 $\varphi_i^l(eM) = \delta_{i1} d(l)^{1/2}$ ($d(l)$ は表現 l の degree) となる。

命題 4.3. $s \in \mathbb{C}, l \in \mathbb{N}^0$

$$f_{s,1}^l(a_2+k) = f_{s,1}^l(a_2+k) = d(l)^{1/2} e(l,s) (\tanh t)^l (\cosh t)^{2(s-1)\sigma} \\ \times F(l+(1-s)\sigma, -s+\frac{1}{2}, l+\sigma+\frac{1}{2}; (\tanh t)^2).$$

$$f_{s,i}^l(a_2+k) = 0 \quad (2 \leq i \leq d(l)).$$

§5. $B = K/M$ 上の (佐藤の) 超函数のホップ・ソベリヤン積分.

$B = K/M$ は real-analytic $(n-1)$ 次元球面 S^{n-1} と同相である. compact connected orientable な real analytic manifold である. 従って B は複素近傍 U に含まれる ([2]). U 上の open set V に対して $H(V)$ は V 上の holomorphic な函数全体の集合である. compact set 上の α -持ち収束に対する位相を入れた空間を表わす. $\alpha \in \mathbb{R}$.

B 上の real analytic function の全体 $A(B)$ は

$$A(B) = \text{ind. lim}_{V \supset B} H(V)$$

上の位相 α (通常) 導入される. $A(B)$ から $\mathbb{C}$ への一次写像 λ は α 位相で連続なものの全体を $A'(B)$ で表わす. $A'(B)$ の元は analytic functional と呼ばれる ([4]). 一方 B が compact orientable ならば (orientation を fix (2) する) 佐藤 [8] により $A'(B)$ は B 上の (佐藤の) 超函数の空間 $\mathcal{B}(B)$ に同型となる. 以下, $A'(B)$ の代りに $\mathcal{B}(B)$ とかく, 超函数と書く. $\mathcal{B}(B) = \mathcal{B}_0(B)$ niemannian manifold $\alpha \in \mathbb{R}$ は B 上の laplacian を用いて $\mathcal{B}(B)$

characterize $\mathcal{H}_B$. 次のように述べる。

$\mathcal{B}(B) \ni T$ の $\varphi \in A(B)$ の値を積分の形に

$$\int_B \varphi(b) dT(b)$$

と表す。 $\mathcal{H}_B \subset \mathbb{C}^N$ は

$$\mathcal{H}_B = \left\{ (a_i^l)_{\substack{l \in \mathbb{N}^0 \\ 1 \leq i \leq d(l)}} \mid a_i^l \in \mathbb{C}, \sum_{l \in \mathbb{N}^0} \sum_{i=1}^{d(l)} |a_i^l| \exp(-t\lambda_l^{1/2}) < \infty \quad (\forall t > 0) \right\}$$

$$\text{且つ } \lambda_l = \frac{l(l+n-2)}{2(n-2)}$$

で定義し、 $\mathcal{B}(B)$ の $\mathbb{C}^N$ への map Φ は

$$\Phi(T) = (a_i^l) \quad T \in \mathcal{B}(B)$$

$$a_i^l = \int_B \bar{\varphi}_i^l(b) dT(b)$$

で定めると Φ は $\mathcal{B}(B)$ の $\mathcal{H}_B$ への isomorphism である。 ([, 定理 1.8])。 $\mathcal{H}_B$ は又

$$\mathcal{H}_B = \left\{ (a_i^l)_{\substack{l \in \mathbb{N}^0 \\ 1 \leq i \leq d(l)}} \mid a_i^l \in \mathbb{C}, \sum_{l \in \mathbb{N}^0} \sum_{i=1}^{d(l)} |a_i^l|^2 \exp(-t\lambda_l^{1/2}) < \infty \quad (\forall t > 0) \right\}$$

と表すことに注意しておく。

$T \in \mathcal{B}(B)$ に対して T のポアソン積分を次の様に定義する。

$P_S(z, b)$ は b に依りて real analytic なる T の関数である。

$$P_S(T)(z) = \int_B P_S(z, b) dT(b)$$

とある。

命題 5.1. $T \in \mathcal{B}(B)$, $(a_i^p) = \Phi(T)$ とすると、任意の $z \in X$ には

$$\mathcal{P}_S(T)(z) = \sum_{l \in \mathbb{N}^0} \sum_{i=1}^{d(l)} a_i^p f_{s,i}^p(z)$$

命題 5.2. (1) $s \in \mathbb{C}$, $(a_i^p) \in \mathcal{F}_b$ ならば

$$\sum_{l \in \mathbb{N}^0} \sum_{i=1}^{d(l)} a_i^p f_{s,i}^p(z)$$

は X 上広義一様絶対収束する。

(2) $\ell(s) \neq 0$ とし, $f \in \mathcal{H}_s(X)$ と命題 2.21-5.2

$$f = \sum_{l \in \mathbb{N}^0} \sum_{i=1}^{d(l)} a_i^p f_{s,i}^p$$

と展開すれば $(a_i^p) \in \mathcal{F}_b$.

命題 5.2 は f_s^p の具体的な形を用いて証明される。その為に超幾何函数に関するある不等式が必要であるが、ここでは省略する。

命題 5.3. $X = G/K$ は §2 にあける条件の空間とし, f_n ($n \in \mathbb{N}^0$) は Δ の固有値 μ の固有函数で, $\sum_{n \in \mathbb{N}^0} f_n$ が X 上広義一様絶対収束していることを示す。このとき $\sum_{n \in \mathbb{N}^0} f_n$ は固有値 μ

Δ の固有函数である

命題 5.3 は Mean value theorem を用いて言証される。詳しくは Helgason [7, Chap. X, §7] 参照。

定理 5.4. X を実双曲型空間とする。 $\lambda \in \mathfrak{a}^+$ とする。

- (1) $P_\lambda(s \in \mathbb{C})$ は $B(B)$ の $J_\lambda(X)$ への写像である。
- (2) $e(s) \neq 0$ ならば、 P_λ は $B(B)$ の $J_\lambda(X)$ への同型写像である。

系 5.5. Δ の任意の固有函数は B 上のある超函数のある $s \in \mathbb{C}$ によるホップ・ソーン積分として得られる。

References

- [1] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, 2, Interscience, New York (1962).
- [2] H. Grauert, On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds, *Ann. of Math.*, 68(1958), 460-472.
- [3] Harish-Chandra, Spherical functions on a semisimple Lie group I, *Amer.J.Math.*, 80(1958), 241-310.
- [4] M. Hashizume, A. Kowata, K. Minemura and K. Okamoto, an integral representation of an eigenfunction of the laplacian on the euclidean space, *Hiroshima Math.J.*, 2(1972), 535-545.
- [5] M. Hashizume, K. Minemura and K. Okamoto, Harmonic functions on hermitian hyperbolic spaces, *Hiroshima Math.J.*, 3(1973), 81-108.
- [6] S. Helgason, A duality for symmetric spaces with applications to group representations, *Advanced in Math.*, 5(1970), 1-154.
- [7] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York (1962).
- [8] K. Jhonson and N. R. Wallach, Composition series and intertwining operators for the spherical principal series, *Bull. Amer.Math.Soc.*, 78(1972), 1053-1059.
- [9] A. W. Knap, Fatou's theorem for symmetric spacws I, *Ann.of Math.*, 88(1968), 106-127.
- [10] B. Kostant, On the existence and irreducibility of certain series of representations, *Bull.Amer.Math.Soc.*, 75(1969), 627-642.
- [11] N. N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*, Prentice-Hall, London (1965).
- [12] J. L. Lions and E. Magenes, Problemes aux limites non homogenes (VII), *Ann.Math.Pura Appl.*, 4(1963), 201-224.

- [13] A. Martineau, Distributions et valeurs au bords des fonctions folomorphes, Theory of Distributions (Proc.Internat.Summer Inst.), Lisbon (1964), 193-326.
- [14] A. Martineau, Les hyperfonctions de M. Sato, Seminaire Bourbaki 13(1960/1), No.214.
- [15] K. Minemura, Harmonic functions on real hyperbolic spaces, Hiroshima Math.J., 3(1973), 121-151.
- [16] K. Okamoto, Harmonic Analysis on homogeneous vector bundles, Lecture notes in Math., Springer-Verlag, 266(1972), 255-271.
- [17] A. Orihara, Bessel functions and the euclidean motion group, Tohoku Math.J., 13(1961), 66-74.
- [18] M. Sato, Theory of hyperfunctions II, J.Fac.Sci.Univ.Tokyo, 8(1959), 387-436.
- [19] M. Sugiura, Fourier series of smooth functions on compact Lie groups, Osaka J.Math., 8(1971), 33-47.
- [20] R. Takahashi, Sur les representation unitaires des groupes de Lorentz generalises, Bull.Soc.Math.France, 91(1963), 289-433.