

RECTANGULAR NORMALITY OF PRODUCTS WITH A METRIC FACTOR

静岡大・教育

大田 春 外 (Haruto OHTA)

無限濃度 κ に対し, $\kappa^{<\omega} = \bigcup_{n \in \omega} \kappa^n$ とおく。位相空間 X の部分集合族 $\{G(\sigma) : \sigma \in \kappa^{<\omega}\}$ は,

$$\forall \sigma, \sigma' \in \kappa^{<\omega} \quad (\sigma \leq \sigma' \Rightarrow G(\sigma) \supseteq G(\sigma')) \quad (1)$$

とみられるとき, monotone decreasing であるという。また κ より小さい ID 数の X の ω zero-sets の和として表わされる集合を X の κ -open set, κ より小さい ID 数の zero-sets の共通部分として表わされる集合を κ -closed set とする。

ω_1 -open set と ω_1 -closed set は, それぞれ通常のコzero-set と zero-set である。 κ より大きい最小の濃度を κ^+ で表わす。次の定理を証明することが目標である。

定理 1. 完全正則空間 X の閉集合 A と無限濃度 κ に対し, 条件 $(*_\kappa)$ 「 A と交わる X の任意の κ^+ -closed set B に対し, $h[A] = 0$ かつ $h[B] = 1$ である $h \in C(X)$

が「存在する」が成り立っているとして仮定する。このとき、
 Baire の零次元距離空間 $M = \kappa^\omega$ に対して、次の (a), (b),
 (c) は同値である。

(a) $A \times M$ は $X \times M$ の C -embedded.

(b) $A \times M$ は $X \times M$ の C^* -embedded.

(c) A は X の C -embedded かつ A の κ^T -open sets
 によって成る $\{G(\sigma) : \sigma \in \kappa^{<\omega}\}$ の monotone decreasing family $\{G(\sigma) : \sigma \in \kappa^{<\omega}\}$ について、

$$\forall t \in \kappa^\omega, \left(\bigcap_{\sigma \leq t} \mathcal{C}_A G(\sigma) = \emptyset \right) \quad (2)$$

を満たすものが存在し、 X の κ^T -open sets によって成る $\{H(\sigma) : \sigma \in \kappa^{<\omega}\}$ について

$$\forall \sigma \in \kappa^{<\omega}, \left(G(\sigma) \subseteq H(\sigma) \right) \quad (3)$$

$$\forall t \in \kappa^\omega, \left(\bigcap_{\sigma \leq t} \mathcal{C}_X H(\sigma) = \emptyset \right) \quad (4)$$

を満たすものが存在する。

証明. (a) $\rightarrow$ (b) は明白. (b) $\rightarrow$ (c):

[1] まず、 A が X の C -embedded であることは注意する。

自然に $2^\omega \subseteq \kappa^\omega$ である。よって [H, Theorem 4.16] より

$A \times 2^\omega$ は $A \times M$ の C^* -embedded. 従って (b) より、

$A \times 2^\omega$ は $X \times 2^\omega$ の C^* -embedded. かつ [H, Lemma 4.6] より、 A は X の C -embedded.

[2] $\{G(\sigma) : \sigma \in \kappa^{<\omega}\}$ は (2) により δ かつ τ A の κ^+ -open sets であり δ かつ τ monotone decreasing family である。

各 $\sigma \in \kappa^{<\omega}$ に対し τ , A の zero-sets $Z_{\sigma\beta}$ と A の cozero-sets $W_{\sigma\beta}$ ($\beta \in \kappa$) を

$$G(\sigma) = \bigcup_{\beta \in \kappa} Z_{\sigma\beta} = \bigcup_{\beta \in \kappa} W_{\sigma\beta} \quad (5)$$

$$Z_{\sigma\beta} \subseteq W_{\sigma\beta} \quad (6)$$

により δ かつ τ であることが示される。

[3] 各 $\sigma \in \kappa^{<\omega}$ に対し τ , 異なる 2 点 $p_\sigma, q_\sigma \in [\sigma] (= \{\tau \in \kappa^{<\omega} : \tau \supseteq \sigma\})$ であり $\{p_\sigma, q_\sigma : \sigma \in \kappa^{<\omega}\}$ は互いに異なる点であり δ かつ τ である。

[4] $\sigma \in \kappa^n$ と $\beta \in \kappa$ に対し τ , $\sigma' \upharpoonright n = \sigma$ かつ $\sigma'(n) = \beta$ である δ かつ τ 定義される κ^{n+1} の元 σ' に対し $\sigma \hat{\sim} \beta \in \delta$ かつ τ である。

[5] 各 $\sigma \in \kappa^{<\omega}$ に対し τ 。

$$P_\sigma = \bigcup_{\beta \in \kappa} (Z_{\sigma\beta} \times \{p_{\sigma \hat{\sim} \beta}\})$$

$$Q_\sigma = \bigcup_{\beta \in \kappa} (Z_{\sigma\beta} \times \{q_{\sigma \hat{\sim} \beta}\})$$

$$W_\sigma = \bigcup_{\beta \in \kappa} (W_{\sigma\beta} \times [\sigma \hat{\sim} \beta])$$

とある。このとき (6) により

$$(Z_{\sigma\beta} \times \{p_{\sigma \hat{\sim} \beta}\}) \cup (Z_{\sigma\beta} \times \{q_{\sigma \hat{\sim} \beta}\}) \subseteq W_{\sigma\beta} \times [\sigma \hat{\sim} \beta]$$

である。また、 $\{W_{\sigma\beta} \times [\sigma \hat{\sim} \beta] : \beta \in \kappa\}$ は $A \times M$ の cozero-sets であり δ かつ τ discrete family。したがって [H, Lemma 1.3] より、

P_σ と Q_σ は $A \times M$ の zero-sets。また W_σ は $A \times M$ の

ω zero-set である。

[6] $P = \bigcup \{P_\sigma : \sigma \in \kappa^{<\omega}\}$, $Q = \bigcup \{Q_\sigma : \sigma \in \kappa^{<\omega}\}$ である。

(2) より, $\{G(\sigma) \times [\sigma] : \sigma \in \kappa^{<\omega}\}$ は $A \times M$ 上で locally finite. $W_\sigma \subseteq G(\sigma) \times [\sigma]$ であり $\{W_\sigma : \sigma \in \kappa^{<\omega}\}$ も $A \times M$ 上で locally finite. $P_\sigma \cup Q_\sigma \subseteq W_\sigma$ であり, 再び [H, Lemma 1.3] より, P と Q は $A \times M$ の zero-sets.

[7] $A \times M$ は $X \times M$ 上で C^* -embedded である, $P \cap Q = \emptyset$ であり $g[P] = 0$ かつ $g[Q] = 1$ である $g \in C(X \times M)$ がある。各 $\sigma \in \kappa^{<\omega}$ に対して

$$H(\sigma) = \{x \in X : \sup_{t, t' \in [\sigma]} |g(x, t) - g(x, t')| > 2/3\}$$

である。

[8] $H(\sigma)$ は X の κ^+ -open set であること示そう。 $D \subseteq [\sigma]$ の濃度 κ の dense subset である。 $(t, t') \in D^2$ に対して

$$U(t, t') = \{x \in X : |g(x, t) - g(x, t')| > 2/3\}$$

は X の ω zero-set. $H(\sigma) = \bigcup \{U(t, t') : (t, t') \in D^2\}$ であり, $H(\sigma)$ は κ^+ -open.

[9] $G(\sigma) \subseteq H(\sigma)$ であること: $\forall x \in G(\sigma)$, (5) より $\exists \beta \in \kappa$ s.t. $x \in Z_{\sigma\beta}$. すると $g(x, p_{\sigma\beta}) = 0$ かつ $g(x, q_{\sigma\beta}) = 1$. したがって $x \in H(\sigma)$.

[10] $\tau \in \kappa^\omega$ に対して, $\bigcap_{\sigma \leq \tau} \mathcal{U}_x H(\sigma) = \emptyset$ である:

$\forall x \in X$, g の連続性より, X における x の nbd U と $\sigma \leq \tau$ として

$$(x', \tau') \in U \times [\sigma] \Rightarrow |g(x, \tau) - g(x', \tau')| < 1/3.$$

とすれば, x の nbd 存在する. このとき, $x' \in U$ ならば, $x' \notin H(\sigma)$.

ゆえに $x \notin \mathcal{U}_x H(\sigma)$.

[8] [9] [10] より, X の κ^+ -open sets の族 $\{H(\sigma) : \sigma \in \kappa^{<\omega}\}$

は (3)(4) を満たす. ゆえに (c) は成立する.

(c) $\rightarrow$ (a): $f \in C(A \times M)$ かつ $X \times M$ 上へ連続に拡張されることを証明する.

[11] 各 $k \in \omega$ と各 $\sigma \in \kappa^{<\omega}$ に対して,

$$G_k(\sigma) = \{x \in A : \sup_{\tau, \tau' \in [\sigma]} |f(x, \tau) - f(x, \tau')| > 1/2^{k+1}\}$$

と置く. このとき [8] と同様にして, $G_k(\sigma)$ は A の κ^+ -open set. 以下, この定義から

$$\sigma \leq \sigma' \Rightarrow G_k(\sigma) \supseteq G_k(\sigma')$$

$$\tau \in \kappa^\omega \Rightarrow \bigcap_{\sigma \leq \tau} \mathcal{U}_A G_k(\sigma) = \emptyset$$

(c) より, 各 $k \in \omega$ に対して, X の κ^+ -open sets である族 $\{H_k(\sigma) : \sigma \in \kappa^{<\omega}\}$ として

$$\forall \sigma \in \kappa^{<\omega}, G_k(\sigma) \subseteq H_k(\sigma)$$

$$\forall \tau \in \kappa^\omega, \bigcap_{\sigma \leq \tau} \mathcal{U}_X H_k(\sigma) = \emptyset$$

とすれば, x の nbd 存在する. 以下, このとき

$$\sigma \subseteq \sigma' \Rightarrow H_R(\sigma) \supseteq H_R(\sigma')$$

に ありと 仮定 する。

$$\boxed{12} \quad \forall R \in \omega \text{ と } \sigma \in K^{\omega} \text{ に対して, } F_R(\sigma) = X \setminus H_R(\sigma) \text{ と}$$

あり。 二のとき

$$F_R(\sigma) \text{ は } X \text{ の } K^T\text{-closed set} \quad (7)$$

$$\sigma \subseteq \sigma' \Rightarrow F_R(\sigma) \subseteq F_R(\sigma') \quad (8)$$

$$t \in K^{\omega} \Rightarrow \bigcup_{\sigma \subseteq t} \text{int}_X F_R(\sigma) = X \quad (9)$$

$$x \in F_R(\sigma) \cap A \Rightarrow \sup_{t, t' \in [\sigma]} |f(x, t) - f(x, t')| \leq 1/2^{R+1} < 1/2^R \quad (10)$$

$$\boxed{13} \quad \forall \sigma \in K^{\omega} \text{ に対して, } t_{\sigma} \in [\sigma] \text{ を任意に選んで固定する,}$$

$$f_{\sigma}(x) = f(x, t_{\sigma}) \quad ; \quad x \in A$$

に すると, $f_{\sigma} \in C(A)$ と 定義 せよ。 二のとき (8) と (10) のよ

$$\sigma \subseteq \sigma' \Rightarrow \forall x \in F_R(\sigma) \cap A,$$

$$|f_{\sigma}(x) - f_{\sigma'}(x)| < 1/2^R \quad (11)$$

$$\boxed{14} \quad \text{dom}(\sigma) = n \text{ 上の induction を, } f_{\sigma} \text{ に対しての条件 (12) を}$$

おけるように $g_{\sigma} \in C(X)$ に 拡張 する。

$$\sigma \subseteq \sigma', \quad R \leq \text{dom}(\sigma)$$

$$\Rightarrow \forall x \in F_R(\sigma), \quad |g_{\sigma}(x) - g_{\sigma'}(x)| < 1/2^R \quad (12)$$

induction の 手順 を 以上 に 述べる。

$K^0 = \{\emptyset\}$ と して, $f_{\emptyset}$ と $g_{\emptyset} \in C(X)$ と 任意に 拡張 する。 二の

二のとき A が X に C -embedded であることは可能である。

$\sigma \in K^m$ ($m \leq n$) に對しては, f_σ は (12) を満たすから

$g_\sigma \in C(X)$ に拡張されることを示す.

$\sigma' \in K^{n+1}$ とせよ. すると $f_{\sigma'} \in \bar{f}_{\sigma'} \in C(X)$ に任意に拡張する.

$$B = \bigcup_{\sigma \neq \sigma'} \bigcup_{k \leq \text{dom}(\sigma)} \left(\{x \in X : |g_\sigma(x) - \bar{f}_{\sigma'}(x)| \geq 1/2^k\} \cap F_k(\sigma) \right)$$

と置く. K^+ -closed sets の有限和は K^+ -closed である, B

は X の K^+ -closed set. また (11) より $A \cap B = \emptyset$. 従って

条件 $(*)$ より, $h[A] = 1$, $h[B] = 0$ より $0 \leq h \leq 1$ に

対応する $h \in C(X)$ が存在する. $g_{\sigma'} \in C(X)$ と

$$g_{\sigma'} = g_{\sigma'}|_A - h(g_{\sigma'}|_A - \bar{f}_{\sigma'})$$

によって定義する. このとき $h[A] = 1$ である $g_{\sigma'}|_A =$

$\bar{f}_{\sigma'}|_A = f_{\sigma'}$. (12) を満たすことを示すために, $\sigma \subseteq \sigma'$, $k \leq$

$\text{dom}(\sigma)$ とする. $\sigma \neq \sigma'$ の場合 $F_k(\sigma)$ は空集合である. 任意の

$x \in F_k(\sigma)$ に対して, 帰納法仮定より

$$|g_\sigma(x) - g_{\sigma'}|_A(x)| < 1/2^k \quad (13)$$

CASE 1. $x \in B$ のとき. $h[B] = 0$ である $g_{\sigma'}(x) = g_{\sigma'}|_A(x)$.

ゆえに (13) より $|g_\sigma(x) - g_{\sigma'}(x)| < 1/2^k$.

CASE 2. $x \notin B$ のとき, B の定義より

$$|g_\sigma(x) - \bar{f}_{\sigma'}(x)| < 1/2^k. \quad (14)$$

また $0 \leq h \leq 1$ である $g_{\sigma'}$ の定義より

$$g_{\sigma'}|_A(x) \leq g_{\sigma'}(x) \leq \bar{f}_{\sigma'}(x) \quad \text{または}$$

$$\bar{f}_{\sigma'}(x) \leq g_{\sigma'}(x) \leq g_{\sigma' \upharpoonright n}(x). \quad (15)$$

(13)(14)(15) より $|g_{\sigma}(x) - g_{\sigma'}(x)| < 1/2^k$. 再び induction を完了する。

[15] $g \in C(X \times M)$ として次のように定義する。

$$g(x, t) = \lim_{\sigma \leq t} g_{\sigma}(x) \quad ; \quad (x, t) \in X \times M.$$

$\{g_{\sigma}(t) : \sigma \leq t\}$ が収束するとは証明した。 $\forall \varepsilon > 0$,

$1/2^k < \varepsilon$ なる $k \in \omega$ がある。(9)より, $x \in F_{k+1}(\sigma)$ かつ $\text{dom}(\sigma) \geq k+1$ なる $\sigma \leq t$ が存在する。このとき,

$\sigma \leq \sigma_i \leq t$ ($i = 1, 2$) かつ (12) より

$$\begin{aligned} |g_{\sigma_1}(x) - g_{\sigma_2}(x)| &\leq |g_{\sigma}(x) - g_{\sigma_1}(x)| + |g_{\sigma}(x) - g_{\sigma_2}(x)| \\ &< 1/2^{k+1} + 1/2^{k+1} = 1/2^k < \varepsilon \end{aligned}$$

再び $\{g_{\sigma}(x) : \sigma \leq t\}$ が収束する。 g が f の連続な拡張であることは証明された。

[16] $g \upharpoonright (A \times M) = f$ であること: $\forall (x, t) \in A \times M$, 各 $\sigma \leq t$ に対し, $x \in A$ に対し $g_{\sigma}(x) = f_{\sigma}(x) = f(x, t_{\sigma})$. $\lim_{\sigma \leq t} t_{\sigma} = t$ に対し, f の連続性より

$$g(x, t) = \lim_{\sigma \leq t} g_{\sigma}(x) = \lim_{\sigma \leq t} f(x, t_{\sigma}) = f(x, t).$$

[17] 最後に g が連続であることを示す。 $\forall (x, t) \in X \times M$

$\forall \varepsilon > 0$ (fixed), $1/2^k < \varepsilon$ なる $k \in \omega$ がある。(8), (9)より

g の定義から

$$\text{dom}(\sigma) \geq k+2,$$

$$x \in \text{int}_X F_{k+2}(x), \quad (16)$$

$$|g(x, \tau) - g_\sigma(x)| < 1/2^{k+2} \quad (17)$$

とみたとき $\sigma \subseteq \tau$ のみ 存在する。 g_σ の連続性から

$$x' \in V \Rightarrow |g_\sigma(x) - g_\sigma(x')| < 1/2^{k+2} \quad (18)$$

とある x の nbd V のみ 存在する。 (16) より $V \subseteq F_{k+2}(\sigma)$ と

あると仮定してよい。 ところで (12) より

$$\sigma \subseteq \sigma', x' \in V \Rightarrow |g_\sigma(x') - g_{\sigma'}(x')| < 1/2^{k+2}, \quad (19)$$

任意の $(x', \tau') \in V \times [\sigma]$ とする。 ところで $\tau' \in [\sigma]$ である

$\sigma \subseteq \tau'$ 。 $\sigma \subseteq \forall \sigma' \subseteq \tau'$ に注意して、(19) より

$$|g_\sigma(x') - g_{\sigma'}(x')| < 1/2^{k+2}$$

ゆえに

$$|g_\sigma(x') - g(x', \tau')| \leq 1/2^{k+2} \quad (20)$$

(17)(18)(20) より

$$\begin{aligned} & |g(x, \tau) - g(x', \tau')| \\ & \leq |g(x, \tau) - g_\sigma(x)| + |g_\sigma(x) - g_\sigma(x')| + |g_\sigma(x') - g(x', \tau')| \\ & < 1/2^{k+2} + 1/2^{k+2} + 1/2^{k+2} < 1/2^k < \varepsilon \end{aligned}$$

ゆえに $g \in C(X \times M)$ 。

16 17 より、(2) は 成立する。 $\square \square$

注意 1. 定理 1 の条件 $(*_K)$ は, $(c) \rightarrow (a)$ を証明する
ためだけに使われる。 A が X で C -embedded ならば,
 $(*_\omega)$ は自動的に成り立つので, $K = \omega$ の場合, 条件 $(*_K)$
は不要である。 さて, $A \times K^\omega$ が $X \times K^\omega$ で C^* -embedded
ならば, $A \subseteq X$ は条件 $(*_K)$ を満たすか? 更に一般的に
この問題を述べるために

$$lw(M) = \sup \{ w(\tau, M) : \tau \in M \},$$

但し $w(\tau, M) = \min \{ w(U) : U \text{ は } \tau \text{ の nbd } \}$, と定義する。

M が $lw(M) = K$ である距離空間とする。このとき, $A \times M$
が $X \times M$ で C^* -embedded ならば, $A \subseteq X$ は $(*_K)$ を満た
すか?

注意 2. 定理 1 は Przymusiński [P, Proposition 5]
から $A \times M$ が M -independent であるという仮定を取り
除くことが出来る可能性を示している。 [P, Proposition 5]
は, $A \subseteq X$ が条件 $(*_K)$ を満たすことを要求しているが,
Przymusiński の (iii) $\rightarrow$ (i) の証明は, $(*_K)$ を必要と
しているように思う。少なくとも [P, Proposition 5] から $(*_K)$
なしで証明できるかどうか, 或いは, (iii) から $(*_K)$ が
導かれるかどうか分らない。定理 1 の $(b) \rightarrow (c)$ は
本質的に [P, Proposition 5] の (ii) $\rightarrow$ (iii) に含まれる。
ただし, 彼の (ii) $\rightarrow$ (iii) の証明は, $w(M) = K$ である

距離空間 M は, 空でない open sets による濃度 κ の discrete family を含むことと便である. $\kappa=3$ の, $cf(\kappa) = \omega$ の場合は, これは必ずしも正しくない. 例として, $M = \omega_\omega + 1$ とし, ω_ω の basic nbd は通常の順序位相によるもの, ω_ω 以外の各点は孤立点として M に位相を与える. このとき, $w(M) = \omega_\omega$ であるが, M は空でない open sets による濃度 ω_ω の discrete family を含む. この gap は 藤井清治氏によって指摘されたものである.

最後に当面の目標である, Hoshina, Przymusiński, Wasiko 等による問題を挙げる.

問題 1. M を距離空間とする. このとき, $A \times M$ が $X \times M$ に C^* -embedded であるための, $A \subseteq X$ の必要十分条件を求めよ. また $A \times M$ が $X \times M$ に C^* -embedded ならば, これは $X \times M$ に C -embedded である.

問題 2. X の任意の開集合 A と任意の距離空間 M に対して, $A \times M$ が $X \times M$ に C^* -embedded であるならば位相空間 X を特徴付けよ.

参考文献

- [H] T. Hoshina, Extensions of mappings II, in: K. Morita and J. Nagata eds. Topics in General Topology, North-Holland (1989), 41-80.
- [P] T. C. Przymusiński, Notes on extendability of continuous functions from products with a metric factor, preprint, (1983).

この話題に関連するもの:

- T. Hoshina, Extensions of mappings, to appear in: M. Husek and J. van Mill eds. Recent Progress in General Topology, North-Holland (1992)
- H. Ohta, Extensions of zero-sets in the product of topological spaces, Topology Appl. 35 (1990), 21-39.
- T. C. Przymusiński, Product spaces, in: G. M. Reed ed. Surveys in General Topology, Academic Press (1980), 399-429.
- , Extending functions from products with a metric factor and absolutes, Pacific J. Math. 101 (1982), 463-475.
- , A solution to a problem of E. Michael, Pacific J. Math. 114 (1984), 235-242.
- A. Wasko, Extensions of functions defined on product spaces, Fund. Math. 124 (1984), 27-39.
- , Extensions of functions from products with compact or metric factors, Fund. Math. 125 (1985), 81-88.