

既約な概均質ベクトル空間の 分類について

東大 理 木村 達雄

§1. 序

既約な概均質ベクトル空間の分類は 10 年程前に佐藤幹夫先生によって はじめられて かなりの結果が得られ いくつかの(有限個)未決定のものを残すのみとなった。

その後 1970 年に新谷卓郎先生によって スピン群 $Spin(n)$ ($n=11, 12, 14$) と scalar 倍の合成が その(半)スピン表現の表現空間に概均質に作用している事が 証明され, 翌71年には $n=13$ のとき 概均質にならない事が示された。

結局, 未決定の空間として スピン表現が関係するもの5つ(スピン型とよぶ), 例外群が関係するもの6つ(例外型とよぶ。そのうちの二つは色々な事情から概均質に違いないと思われていた)が残っていたが 1972年3月にスピン型, 同年5月に例外型の空間がすべて決定し, これによって既約な場合の概均質ベクトル空間の分類が完成した。

定義 V を $\mathbb{C}$ (=複素数体) 上有限次元のベクトル空間とし
 $G \subset GL(V)$ を $\mathbb{C}$ 上定義された連結線型代数群とする。 G の V
 への作用を $g \cdot x$ ($g \in G, x \in V$) と書き, $x \in V$ における G の isotropy
 subgroup を G_x と記す, $\therefore G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$
 $\dim G_x = \dim G - \dim V$ なる $x \in V$ が存在するとき 対 (G, V) を
概均質ベクトル空間 (Prehomogeneous vector space) という。これは
 V の algebraic set S があって G が $V-S$ に homogeneous に作用し
 ている事と同値である。このとき $S = \{x \in V \mid \dim G_x > \dim G - \dim V\}$
 更に V が G -module として既約であるとき (G, V) を 既約な
概均質ベクトル空間 という。

我々の目標は「既約な概均質ベクトル空間」をすべて求める
 事である。

さて一般に、概均質ベクトル空間 (G, V) が一つ与えられると
 Grassmann 構成 (裏返し変換ともいう) によって 無限に新しい概均
 質ベクトル空間を得る事ができる。(裏返し変換については P. 6 を
 参照) 裏返し変換によってより次元の小さい概均質ベク
 トル空間に帰着できないとき, その概均質ベクトル空間は 基本的
 であるという。但し G ; V 半単純線型代数群, $V(n)$ をその忠実
 な n 次元既約表現空間とすると $(G \times GL(n), V(n) \oplus 0)$ は G の
 ゼロ表現から得られた概均質ベクトル空間であるが 便宜上 これ
 も 基本的概均質ベクトル空間 と考える。但し 0 = 恒等表現

以下 $\boxed{\text{作用する群}} / \boxed{\text{その表現空間}} // \boxed{\text{generic な点における isotropy subgroup の連結成分}}$ と記す事にする。

既約な概均質ベクトル空間が正則 (= regular) とは generic な点における isotropy subgroup が reductive な事である。

概均質ベクトル空間の理論については [1] を参照のこと。

基本的な既約概均質ベクトル空間は 正則なものでは 5 つの系列とそれに属さない 24 個の空間, 正則でないものでは 5 つの系列とそれに属さない 1 つの空間がある。

5

⑤ 基本的既約概均質ベクトル空間

I) regular (正則) な場合

① $G \times GL(n) / \begin{matrix} V(n) \otimes \square \\ G \end{matrix}$, 但し G は任意の半単純線型代数群, $V(n)$ はその忠実な n 次元既約表現空間

② $GL(n) / \begin{matrix} \square \\ O(n) \end{matrix}$ ($n \geq 2$). 但し $\square$ は Young diagram (例えば Weyl: Classical groups 参照) を表す. 以下でも同様である.

③ $GL(2n) / \begin{matrix} \square \\ Sp(n) \end{matrix}$ ($n \geq 2$)

④ $O(m) \times GL(n) / \begin{matrix} \square \otimes \square \\ O(n) \times O(m-n) \end{matrix}$, 但し $m > n \geq 1$, $m < 2n$ のとき, 及び $m=2, 4$, $n=1$ のときは更に $m=3, 6$ の場合も省いてよい.

⑤ $Sp(m) \times GL(2n) / \begin{matrix} \square \otimes \square \\ Sp(n) \times Sp(m-n) \end{matrix}$, $m > n \geq 1$ ($m < 2n$ のとき省いてよい)

以上の5つの系列に属さないものとして

$$1) \quad \frac{GL(2)}{\square\square} / 1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{isotropy subgroup は 位数 18 の} \\ \text{有限群である} \end{array} \right)$$

$$2) \quad \frac{GL(6)}{\square} / SL(3) \times SL(3)$$

$$3) \quad \frac{GL(7)}{\square} / (G_2)$$

$$4) \quad \frac{GL(8)}{\square} / SL(3)$$

$$5) \quad \frac{GSp(3)}{\square} / SL(3)$$

$$6) \quad \frac{GO(7)}{\text{スピン表現 (8次)}} / (G_2) \quad \left(\begin{array}{l} \text{以下 } O(n) \text{ は 正確には } Spin(n) \text{ だが} \\ \text{いちいち 断めろない。} \end{array} \right)$$

$$7) \quad \frac{GO(9)}{\text{スピン表現 (16次)}} / O(7)$$

$$8) \quad \frac{GO(11)}{\text{スピン表現 (32次)}} / SL(5)$$

$$9) \quad \frac{GO(12)}{\text{半スピン表現 (32次)}} / SL(6)$$

$$10) \quad \frac{GO(14)}{\text{半スピン表現 (64次)}} / (G_2) \times (G_2)$$

$$11) \quad \frac{GL(1) \times (G_2)}{7\text{次表現}} / SL(3)$$

$$12) \quad \frac{GL(1) \times E_6}{27\text{次表現}} / F_4$$

- 13) $GL(1) \times E_7 / E_6$
56 次表現
- 14) $SL(3) \times GL(2) / 1$ (*isotropy subgroup* は)
 $\square \otimes \square$ (位数 144 の有限群)
- 15) $SL(5) \times GL(3) / SL(2)$
 $\square \otimes \square$
- 16) $SL(5) \times GL(4) / 1$
 $\square \otimes \square$
- 17) $SL(6) \times GL(2) / SL(2) \times SL(2) \times SL(2)$
 $\square \otimes \square$
- 18) $O(7) \times GL(2) / SL(3) \times O(2)$
スピン表現 $\otimes \square$
(8 次)
- 19) $O(7) \times GL(3) / SL(2) \times O(3)$
スピン表現 $\otimes \square$
(8 次)
- 20) $O(10) \times GL(2) / (G_2) \times SL(2)$
半スピン表現 $\otimes \square$
(16 次)
- 21) $O(10) \times GL(3) / SL(2) \times O(3)$
半スピン表現 $\otimes \square$
(16 次)
- 22) $(G_2) \times GL(2) / GL(2)$
7 次表現 $\otimes \square$
- 23) $E_6 \times GL(2) / O(8)$
27 次表現 $\otimes \square$
- 24) $SL(3) \times SL(3) \times GL(2) / GL(1) \times GL(1)$
 $\square \otimes \square \otimes \square$

II) regularでない場合

$$1) \quad \frac{GL(2n+1)}{\square} \Big/ \begin{array}{|c|c|} \hline Sp(n) & * \\ \hline \square & * \\ \hline \end{array} \quad (n \geq 2)$$

$$2) \quad \frac{Sp(m) \times GL(2n+1)}{\square \otimes \square} \Big/ \begin{array}{|c|c|} \hline * & * \\ \hline \square & * \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} m > n \geq 0, \text{ 但し} \\ m < 2n+1 \text{ のとき省略可} \end{array}$$

$$3) \quad \frac{G \times GL(m)}{V(n) \otimes \square} \Big/ \begin{array}{|c|c|} \hline G & * \\ \hline \square & * \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{但し } G \text{ は } V \text{ 半単純線型代数群,} \\ V(n) \text{ はその } n \text{ 次元忠実既約表現空間} \\ m > n \geq 0 \text{ とする.} \end{array}$$

注). $GL(m)$ の恒等表現は 3) に帰着する事に注意.

$$4) \quad \frac{Sp(n) \times GO(3)}{\square \otimes \square} \Big/ \begin{array}{|c|c|} \hline * & * \\ \hline \square & * \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(not} \\ \text{reductive)} \end{array} \quad 5) \quad \frac{SL(2n+1) \times GL(2)}{\square \otimes \square}$$

$$6) \quad \frac{GO(10)}{\text{半スピノ表現 (16次)}} \Big/ \begin{array}{|c|c|} \hline * & * \\ \hline \square & * \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(not} \\ \text{reductive)} \end{array} \quad (n \geq 2) //$$

さて 裏返し変換について述べよう。群 G の忠実既約表現空間を V , $\dim V = m$ とする。 $GL(n)$ の恒等表現の表現空間を $V(n)$ と記す。 $m \leq n$ ならば $(G \times GL(n), V \otimes V(n))$ は常に概均質ゆえ $m \geq n$ とする。 V の n 次元部分空間全体のなす Grassmann 多様体を $M_n(V)$ と書くことにすれば, これは自然な方法で $M_{m-n}(V^*)$ と同一視できる。このとき次の事が成り立つ。

$$\begin{array}{l} \underline{(G \times GL(n), V \otimes V(n)) \text{ が概均質}} \iff G \text{ が } M_n(V) \text{ に概均質に作用} \\ \updownarrow \\ \underline{(G \times GL(m-n), V^* \otimes V(m-n)) \text{ が概均質}} \iff G \text{ が } M_{m-n}(V^*) \text{ に概均質に作用} \end{array}$$

しかも, この二つの空間の generic pt. における isotropy subgroup

は一致する。さて概均質ベクトル空間 (G, V) が与えられたとき G を $G \times GL(1)$, V を $V \otimes V(1)$ と考えて裏返し変換を行なうと $(G \times GL(n-1), V^* \otimes V(n-1))$ なる概均質ベクトル空間が得られる。但し $n = \dim V$. これをくりかえす事により新しい空間がいくらでも得られる。

佐藤幹夫先生によって行なわれた分類についての方針と結果を簡単に紹介する。(詳しくは[2]をみよ.)

「Cartanの定理: V が代数閉体 K 上のベクトル空間で $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{gl}(V)$ の部分リー環とする. V が $\mathfrak{g}$ -既約ならば $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{c}$, 但し $\mathfrak{g}_1$ は $\mathfrak{g}$ の半単純イデアル, $\mathfrak{c}$ は $\mathfrak{g}$ の中心で $\mathfrak{c} = 0$, or $\dim \mathfrak{c} = 1$ である。

$\dim \mathfrak{c} = 1$ の場合は $\mathfrak{c}$ は $\lambda \cdot 1$ ($\lambda \in K$) なる形の V の一次変換と一致する. 但し 1 は V の恒等変換を表わす。」 これによって既約な概均質ベクトル空間 (G, V) を求めるために (modulo isogeny で考えて) 次のように仮定してよい。

$$G = GL(1) \times G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k, \\ V = V(d_1) \otimes \cdots \otimes V(d_k) \quad d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_k$$

但し $G_1, \dots, G_k$ は単純群, $V(d_i)$ は群 G_i の忠実な d_i -次既約表現空間. 以下 $\dim G_i = g_i$ ($i=1, \dots, k$) と書く。

さて (G, V) が概均質ならば $\dim G_x = \dim G - \dim V \geq 0$ ゆえ $\dim G \geq \dim V$, すなわち

$$1 + g_1 + g_2 + \cdots + g_k \geq d_1 d_2 \cdots d_k \text{ でなければならぬ。}$$

このとき

Prop 1. (Sato) (G, V) が概均質で, かつ $2^{k-2}d_1 - 2 \geq d_2$ ならば $1 + g_1 \geq 2^{k-1}d_1 - 3(k-1)$

Cor. $(GL(1) \times G_1 \times \cdots \times G_k, V(d_1) \otimes \cdots \otimes V(d_k))$, $k \geq k_0 \geq 3$ が概均質ならば $1 + g_1 \geq 2^{k_0-1}d_1 - 3(k_0-1)$

Proof) Prop 1 を認めれば Cor は自明であるから Prop 1 のみ証明する.

その為にまず次の lemma を証明する.

lemma; $x_1^2 + \cdots + x_n^2 - cx_1 \cdots x_n \leq na^2 - ca^n$, 但し

$a \leq x_\nu \leq ca^{n-1} - a$, $(\nu = 1, \dots, n)$ とする.

lemma の証明) 各変数について 2 次式で 2 次の項は正ゆえ
最大値は区間の端点でとる. $l = ca^{n-1} - a$ とおく. ($a \leq l$)

$x_1, \dots, x_n$ のうち μ 個が a , 残りの $(n-\mu)$ 個が l とすれば 与式の
左辺の値は $M_\mu = \mu a^2 + (n-\mu)l^2 - ca^\mu l^{n-\mu}$ であるから 特に
 $M_n = na^2 - ca^n$ である. 従って

$$\frac{M_n - M_\mu}{l - a} = -(n-\mu)(l+a) + ca^\mu(l^{n-\mu-1} + l^{n-\mu-2}a + \cdots + a^{n-\mu-1})$$

$$\geq -(n-\mu)(l+a) + (n-\mu)ca^{n-1} = 0 \quad \therefore M_n \geq M_\mu$$

よって $M_n = na^2 - ca^n$ が最大値である. /lem の証)

さて Prop 1 の証明にもどる. (G, V) が概均質ならば

$1 + g_1 + \cdots + g_k \geq d_1 \cdots d_k$ であるが $G_i \subset SL(d_i)$ ゆえ $d_i^2 - 1 \geq g_i$

$(i=2, \dots, k) \quad \therefore 1 + g_1 \geq (k-1) - (d_2^2 + \cdots + d_k^2 - d_1 d_2 \cdots d_k) *$

P.7において G_1 として順次 $SL(n)$, $Sp(n)$, $SO(n)$ (または $Spin(n)$), G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 をとって Prop 1 とその Cor. および Prop 2 を使って 有限個の空間 (または系列) に帰着させるのである。これを段階として, そこで得られた空間が実際に概均質になるかどうかを各々について考察するのである。

Prop 1 や Prop 2 が実際にはどのように使われているかをいくつかの例 (§2, §3 に関係のあるところ) によって示そう。

例えば $G_1 = SO(n)$ (または $Spin(n)$) $n \geq 7$ の場合でも G_1 の表現が恒等表現と異なる場合を考えよう。このとき

$$\text{lemma; } d_1 \geq \frac{1}{2}n(n-1) \ (n \geq 15), \ d_1 \geq 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \ (14 \geq n \geq 7)$$

(i) 基本的な既約表現の次数は

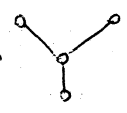
$$d(\Lambda_\nu) = \begin{cases} \binom{n}{\nu}, & \nu = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor \\ 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \text{ (スピンの表現)}, & \nu = \begin{cases} \frac{n-1}{2} \ (n = \text{odd.}) \\ \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} \ (n = \text{even}) \end{cases} \end{cases}$$

であり $d(\Lambda_2) = \frac{1}{2}n(n-1)$ ($n \geq 7$) に関して

$$2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} < \frac{1}{2}n(n-1) \text{ if } 3 \leq n \leq 14, \quad 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} > \frac{1}{2}n(n-1) \text{ if } n \geq 15$$

であり, かつ $d(2\Lambda_1) = \frac{1}{2}(n-1)(n+2) > d(\Lambda_2) = \frac{1}{2}(n-1)n$

ゆえ lemma が証明された。 /

さて $n=8$ のときは リー環の Dynkin diagram が  であるから G_1 の半スピン表現は G_1 内の自己同型で恒等表現に帰着できるから省いてよい。 さて $k \geq 3$ のとき Prop 1 の Cor. によ

って $1 + \frac{1}{2}n(n-1) \geq 2^2 \cdot \frac{1}{2}n(n-1) - 3 \cdot 2$. これを整理して

$n(n-1) \leq \frac{14}{3}$ で これは $n \geq 15$ で 解なし. (半)スピン表現に

ついては ($7 \leq n \leq 14$, $n \neq 8$) $1 + \frac{1}{2}n(n-1) \geq 2^2 \cdot d_1 - 3 \cdot 2$

より $d_1 \leq \frac{1}{4}(7 + \frac{1}{2}n(n-1)) \dots *$

n	7	9	10	11	12	13	14
*より $d_1 \leq$	7	10	13	15	18	21	24
(半)スピン表現の d_1	8	16	16	32	32	64	64

ゆえ 解なし.

よって $k=1$, または $k=2$ である.

$k=2$ の場合 Prop 1 により $2 \leq d_2 \leq d_1 - 2$ ならば

$1 + \frac{1}{2}n(n-1) \geq 2d_1 - 3 \geq 2 \cdot \frac{1}{2}n(n-1) - 3 \quad \therefore n(n-1) \leq 8$

これは $n \geq 15$ で 解なし. (半)スピン表現 ($7 \leq n \leq 14$, $n \neq 8$) に

ついては

n	7	9	10	11	12	13	14
$d_1 \leq$	12	20	24	29	35	41	47
d_1	8	16	16	X	32	X	X

即ち

$n=7, 9$ (スピン表現) $n=10, 12$ (半スピン表現) が 条件をみたす.

$$\text{このとき} \begin{cases} n=7; & 1+21+g_2 \geq 8d_2, & 2 \leq d_2 \leq 7 \\ n=9; & 1+36+g_2 \geq 16d_2, & 2 \leq d_2 \leq 14 \\ n=10; & 1+45+g_2 \geq 16d_2, & 2 \leq d_2 \leq 14 \\ n=12; & 1+66+g_2 \geq 32d_2, & 2 \leq d_2 \leq 30 \end{cases}$$

まず $g_2 = d_2^2 - 1$ のとき, 上記の d_2 に関する二次不等式を解けば (裏返し変換によって $d_2 \leq \frac{1}{2}d_1$ に限ってよい事に注意せよ),

$$n=7; 2 \leq d_2 \leq 4 \quad \text{i.e.} \quad \underset{\text{スピン表現} \otimes \square}{O(7) \times GL(2)}, \underset{\text{スピン表現} \otimes \square}{O(7) \times GL(3)}, \underset{\text{スピン表現} \otimes \square}{O(7) \times GL(4)}$$

$$n=9; d_2=2 \quad \text{i.e.} \quad \underset{\text{スピン表現} \otimes \square}{O(9) \times GL(2)}$$

$$n=10; 2 \leq d_2 \leq 3 \quad \text{i.e.} \quad \underset{\text{半スピン表現} \otimes \square}{O(10) \times GL(2)}, \underset{\text{半スピン表現} \otimes \square}{O(10) \times GL(3)}$$

$$n=12; d_2=2 \quad \text{i.e.} \quad \underset{\text{半スピン表現} \otimes \square}{O(12) \times GL(2)}$$

$g_2 \neq d_2^2 - 1$ のとき Prop 2 により $g_2 \leq \frac{1}{2}d_2(d_2+1)$, ($d_2 \geq 3$) で
上記の結果から $n=7, 10$ の場合に限るが 再び不等式を解い
て $n=7$ のとき $d_2=3, 4$ i.e. $\underset{\text{スピン表現} \otimes \square}{O(7) \times GL(2)}$, $\underset{\text{スピン表現} \otimes \square}{O(7) \times GSp(2)}$
($d_2=3$) ($d_2=4$)

$$n=10 \text{ のとき } d_2=3, \quad \text{i.e.} \quad \underset{\text{半スピン表現} \otimes \square}{O(10) \times GL(2)}$$

次に $2 \leq d_2 = d_1$, または $d_2 = d_1 - 1$ のとき, $g_2 \neq d_2^2 - 1$ ならば
Prop 2 によつて $g_2 \leq \frac{1}{2}d_2(d_2+1)$, これを $1 + g_1 + g_2 \geq d_1 d_2$ に代入
すれば $d_2 = d_1$ でも $d_2 = d_1 - 1$ でもともに $1 + g_1 \geq \frac{1}{2}d_1(d_1 - 1)$.
 $g_1 = \frac{1}{2}n(n-1)$ ゆえ $2 + n(n-1) \geq d_1(d_1 - 1) \quad \therefore n \geq d_1$ すなわち
 $d_1 = n$ (恒等表現) でなければ ならないが, 現在の場合には 恒等表現
以外の場合を考えているから不可. よつて $g_2 = d_2^2 - 1$, よつて

$$\underset{\text{スピン表現} \otimes \square}{O(n) \times GL(d_1)}, \underset{\text{スピン表現} \otimes \square}{O(n) \times GL(d_1 - 1)} \quad \text{となるが 前者は P.3 の ①}$$

(i.e. $O(n)$ のゼロ表現の裏返し変換) の特殊な場合, 後者は 裏返し変換に

より $k=1$ の場合に帰着する。

$k=1$ の場合 $d_1 \neq n$ $n \geq 7$ かつ $G_0(n)$ および
随伴表現

$G_0(n)$ ($7 \leq n \leq 14$, $n \neq 8$) である。

(*) スピン表現

随伴表現のときは概均質ではない。(p. 16)

結局 $G_1 = SO(n)$ (非 $Spin(n)$, 簡単の為 $O(n)$ と書く事は前に
 注意した, リー環はすべて同じ), $n \geq 7$ の場合で, しかも G_1 の表現
 が恒等表現と異なる場合は, 次に挙げる空間に帰着する事が
 わかった。すなわち

$G_0(7)$ $G_0(9)$, $G_0(10)$, $G_0(11)$, $G_0(12)$, $G_0(13)$, $G_0(14)$
スピン表現 (8 次) スピン表現 (16 次) 半スピン表現 (16 次) スピン表現 (32 次) 半スピン表現 (32 次) スピン表現 (64 次) 半スピン表現 (64 次)

$O(7) \times GL(2)$, $O(7) \times GL(2)$, $O(7) \times GL(3)$, $O(7) \times GL(4)$
スピン表現の $\square$ スピン表現の $\square$ スピン表現の $\square$ スピン表現の $\square$

$O(7) \times GSp(2)$, $O(9) \times GL(2)$, $O(10) \times GL(2)$, $O(10) \times GL(2)$
スピン表現の $\square$ スピン表現の $\square$ 半スピン表現の $\square$ 半スピン表現の $\square$

$O(10) \times GL(3)$, $O(12) \times GL(2)$
半スピン表現の $\square$ 半スピン表現の $\square$

次にこれ等の各々について実際に概均質ベクトル空間にな
 っているかどうかを判定しなければならないが 空間の次元が高
 くなるとそれはかなり難しい。(例えば $G_0(14)$ $O(12) \times GL(2)$ などは
半スピン表現 半スピン表現の $\square$
 (64 次元である。)) $G_0(n)$ ($n=7, 9, 10$), $O(7) \times G_2 \times GL(1)$ (5 つある)
(*) スピン表現 スピン表現の $\vee(d_1)$
 については 佐藤先生が, $G_0(n)$ ($n=11, 12, 13, 14$) については 新谷
(*) スピン表現
 先生が解決した。残りは 1972 年 3 月に解決。(本村-佐藤) を
 れについては §2 に詳しく書いてある。

次に $G_1 =$ 例外群 の場合を述べよう。(これは §3 と関係がある.)
 二番目の群 G_2 と例外群 G_2 (14次元, rank 2) を区別する為, 後者を (G_2) と記す. $k \geq 3$ のとき Prop 1 の Cor 1 において $k_0 = 3$ とおくと
 $1 + g_1 \geq 2^2 \cdot d_1 - 3 \cdot 2$ i.e. $g_1 \geq 4d_1 - 7$. しかしに

	(G_2)	F_4	E_6	E_7	E_8
g_1	14	52	78	133	248
$d_1 \geq$	7	26	27	56	248

ゆえ 不成立.

従って $k=1$, または $k=2$ である.

$k=2$ のとき) $1 + g_1 + g_2 \geq d_1 d_2$, $d_1 \geq d_2 \geq 2$ であるが
 $d_1 \geq g_1 (\geq 14)$ ならば ($d_2 = d_1$, または $d_2 = d_1 - 1$) が $G_2 = SL(d_2)$
 となる事を示す。(そのとき前者は P.3 の ①, 後者は裏返し変換により $k=1$ へ帰着する.)
 $g_2 \leq d_2^2 - 1$, $g_1 \leq d_1$ より $1 + d_1 + (d_2^2 - 1) \geq d_1 d_2$
 よって $d_2 \geq \frac{d_1 + \sqrt{d_1^2 - 4d_1}}{2}$, or $d_2 \leq \frac{d_1 - \sqrt{d_1^2 - 4d_1}}{2} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{d_1}}} < 2$
 $d_2 \geq 2$ より $d_2 \geq \frac{d_1 + \sqrt{d_1^2 - 4d_1}}{2}$
 簡単な計算により $d_1 > 4$ ならば $\frac{d_1 + \sqrt{d_1^2 - 4d_1}}{2} > d_1 - 2$ 従って
 ($d_1 \geq 14$ ゆえ) $d_1 \geq d_2 \geq d_1 - 1$ $\therefore d_2 = d_1$ または $d_2 = d_1 - 1$.

さて $g_2 \leq d_2^2 - 1$ とすると Prop 2 によって $g_2 \leq \frac{1}{2} d_2 (d_2 + 1)$, まず
 $d_2 = d_1$ のとき $1 + d_1 + \frac{1}{2} d_1 (d_1 + 1) \geq d_1^2$ i.e. $d_1 (d_1 - 3) \leq 2$ であるが
 $d_1 \geq 14$ ゆえ 不成立. $d_2 = d_1 - 1$ のときも $d_1 (d_1 - 3) \leq 2$ となり
 同様. よって $g_2 = d_2^2 - 1$. i.e. $G_2 = SL(d_2)$.

以上により $d_1 < g_1$ としてよい. とくに $G_1 = E_8$ の場合
 上記の表より 概均質にならない事がわかる。

$G_1 = (G_2)$ の場合 $d_1 = 7, 14$, ... で $g_1 = 14$ ゆえ $d_1 = 7$ となる。

このとき $g_2 = d_2^2 - 1$ ($2 \leq d_2 \leq 7$) となる事を示す。 $g_2 \neq d_2^2 - 1$ なら

Prop 2 により $g_2 \leq \frac{1}{2} d_2 (d_2 + 1)$, ($3 \leq d_2 \leq 7$) これに $1 + 14 + g_2 \geq 7 d_2$

に代入して整理すると $d_2 (13 - d_2) \leq 30$ $\therefore d_2 = 3$

$1 + 14 + g_2 \geq 7 \times 3$ より $g_2 \geq 6$, $\frac{1}{2} \times 3 \times (3 + 1) \geq g_2$ より $6 \geq g_2$

$\therefore g_2 = 6$ 他方 $d_2 = 3$ のときは $g_2 = 3$ or 8 に限るから不成立。

$\therefore g_2 = d_2^2 - 1$, $G_2 = \text{SL}(d_2)$ 裏返し変換により $d_2 = 4, 5, 6, 7$ は

不要ゆえ $\boxed{(G_2) \times \text{GL}(2)}$, $\boxed{(G_2) \times \text{GL}(3)}$ に帰する。

7次表現の口

7次表現の口

次に $G_1 = F_4, E_6, E_7$ (E_8 は不可 P.14) の場合 も $g_2 = d_2^2 - 1$

なら Prop 2 より $g_2 \leq \frac{1}{2} d_2 (d_2 + 1)$ ($d_2 \geq 3$) $\therefore 1 + g_1 + \frac{1}{2} d_2 (d_2 + 1) \geq d_1 d_2$

$\therefore 1 + g_1 \geq \frac{1}{2} d_2 (2d_1 - 1 - d_2) \geq \frac{1}{2} \cdot 3 (2d_1 - 1 - 3) = 3(d_1 - 2)$

$\therefore 1 + g_1 \geq 3(d_1 - 2)$ これが成立するのは

右の表より E_6 に限る。 そのとき

$1 + 78 + \frac{1}{2} d_2 (d_2 + 1) \geq 27 d_2$, ($3 \leq d_2 \leq d_1 = 27$)

$\therefore d_2 = 3$ 他方 $g_2 \leq \frac{1}{2} d_2 (d_2 + 1) = 6$, $d_2 = 3$ より $g_2 = 3$ or 8

$\therefore g_2 = 3$ よって

$\boxed{E_6 \times \text{GL}(2)}$
27次表現の口

	g_1	d_1
F_4	52	26, 52
E_6	78	27, 78
E_7	133	56, 133

$g_2 = d_2^2 - 1$ のとき $1 + g_1 + (d_2^2 - 1) \geq d_1 d_2$ より $g_1 \geq d_2 (d_1 - d_2)$

裏返し変換により $2 \leq d_2 \leq \frac{1}{2} d_1$ なる d_2 のみを考えれば十分。

($d_1 < g_1$ に注意)

F_4, E_6, E_7 の各々について調べる。

$$G_1 = F_4 \text{ のとき} \quad 52 \geq d_2(26-d_2), \quad 2 \leq d_2 \leq 13 \quad \therefore d_2 = 2$$

$$\text{よって } \boxed{F_4 \times GL(2)} \\ \text{26 次表現} \oplus \square$$

$$G_1 = E_6 \text{ のとき} \quad 78 \geq d_2(27-d_2), \quad 2 \leq d_2 \leq 13 \quad \therefore d_2 = 2, 3$$

$$\text{よって } \boxed{E_6 \times GL(2)} \quad \boxed{E_6 \times GL(3)} \\ \text{27 次表現} \oplus \square \quad \text{27 次表現} \oplus \square$$

$$G_1 = E_7 \text{ のとき} \quad 133 \geq d_2(56-d_2), \quad 2 \leq d_2 \leq 28 \quad \therefore d_2 = 2$$

$$\text{よって } \boxed{E_7 \times GL(2)} \\ \text{56 次表現} \oplus \square$$

$k=1$ の場合) 次の事が成り立つ

lemma. 単純群 G_1 のリ-環を $\mathfrak{g}$ とする。 G_1 の随伴表現は既約であるが $\text{rank } G_1 > 1$ ならば " G_1 (の随伴表現) と scalar 倍の合成は $\mathfrak{g}$ に概均質に作用しない。

これは $\mathfrak{g}$ の generic な点 (Cartan の意味の正則元) における isotropy subgroup が G_1 の Cartan subgroup である事から明らかである。

例外群の rank は 2 以上ゆえ $k=1$ の場合は

$$\boxed{(G_2) \times GL(1)} \quad \boxed{F_4 \times GL(1)} \quad \boxed{E_6 \times GL(1)} \quad \boxed{E_7 \times GL(1)} \\ \text{7 次表現} \quad \text{26 次表現} \quad \text{27 次表現} \quad \text{56 次表現}$$

に限る事がわかった。

$$\boxed{(G_2) \times GL(n)} \quad (n=1, 2, 3) \quad \text{および} \quad \boxed{F_4 \times GL(1)} \quad \text{は 佐藤 先生} \\ \text{7 次表現} \oplus \square \quad \text{26 次表現}$$

によりわかっていたが 他は 1972 年 5 月にすべて解決した (木村)

それについては §3 を参照のこと。

§2. スピン型 既約 概均質 ベクトル空間 について

この § の主な目標は 次の5つの空間 (P.13 参照)

$$O(10) \times GL(2), O(9) \times GL(2), O(10) \times GL(3), O(10) \times GL(2), O(12) \times GL(2)$$

半スピン表現の空間 スピン表現の空間 半スピン表現の空間 半スピン表現の空間 半スピン表現の空間

が 概均質 ベクトル空間 か 否かを 判定する 事である。

そのためには リー環 で 計算する。

スピン表現の一般論は [7] を参照してもらう事にして、ここでは $O(10)$ の (i.e. $Spin(10)$ の) リー環 の 半スピン表現 について具体的に、必要な事のみを記す。

$O(10)$ の リー環 を $\mathfrak{g}_1$ とし、その 半スピン表現 の 表現空間 V_1 とすれば $\dim V_1 = 16$ で その base は $1, e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, \dots, e_4 \wedge e_5, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \dots, e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5$ である。(なぜこの形か出てくるかは一般論が必要なのでやめる、¹⁵16個あるという事のみが本質的)

$$\mathfrak{g}_1 \ni X = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & -b_{12} & 0 & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_3 & a_{34} & a_{35} & -b_{13} & -b_{23} & 0 & b_{34} & b_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_4 & a_{45} & -b_{14} & -b_{24} & -b_{34} & 0 & b_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_5 & -b_{15} & -b_{25} & -b_{35} & -b_{45} & 0 \\ \hline 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & -a_1 & -a_{21} & -a_{31} & -a_{41} & -a_{51} \\ -c_{12} & 0 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & -a_{12} & -a_2 & -a_{32} & -a_{42} & -a_{52} \\ -c_{13} & -c_{23} & 0 & c_{34} & c_{35} & -a_{13} & -a_{23} & -a_3 & -a_{43} & -a_{53} \\ -c_{14} & -c_{24} & -c_{34} & 0 & c_{45} & -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & -a_4 & -a_{54} \\ -c_{15} & -c_{25} & -c_{35} & -c_{45} & 0 & -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & -a_5 \end{pmatrix} \quad \text{に 対し}$$

その 半スピン表現 (infinitesimal) は 次のような V_1 の 一次変換 である。それを $d\rho_1(X)$ と記す。

1	A_1	$b_{12} b_{13} b_{14} b_{15} b_{23} b_{24} b_{25} b_{34} b_{35} b_{45}$	1	
$e_1 \wedge e_2$	$-C_{12} A_2$	$a_{32} a_{42} a_{52} -a_{31} -a_{41} -a_{51}$	$b_{34} b_{35} b_{45}$	$e_1 \wedge e_2$
$e_1 \wedge e_3$	$-C_{13} A_3$	$a_{43} a_{53} a_{21} -a_{41} -a_{51} -b_{24} -b_{25}$	b_{45}	$e_1 \wedge e_3$
$e_1 \wedge e_4$	$-C_{14} A_4$	$a_{54} a_{21} a_{31} -a_{51} b_{23} -b_{25} -b_{35}$		$e_1 \wedge e_4$
$e_1 \wedge e_5$	$-C_{15} A_5$	$a_{45} A_5$	$a_{21} a_{31} a_{41} b_{23} b_{24} b_{34}$	$e_1 \wedge e_5$
$e_2 \wedge e_3$	$-C_{23} A_3$	$a_{12} A_6$	$a_{43} a_{53} -a_{42} -a_{52} b_{14} b_{15} b_{45}$	$e_2 \wedge e_3$
$e_2 \wedge e_4$	$-C_{24} A_4$	$a_{14} a_{12} a_{34} A_7$	$a_{54} a_{32} -a_{52} -b_{13} b_{15} -b_{35}$	$e_2 \wedge e_4$
$e_2 \wedge e_5$	$-C_{25} A_5$	$a_{15} a_{35} a_{45} A_8$	$a_{32} a_{42} -b_{13} -b_{14} b_{34}$	$e_2 \wedge e_5$
$e_3 \wedge e_4$	$-C_{34} A_4$	$-a_{14} a_{13} -a_{44} a_{23} A_9$	$a_{54} -a_{53} b_{12} b_{15} b_{25}$	$e_3 \wedge e_4$
$e_3 \wedge e_5$	$-C_{35} A_5$	$-a_{15} a_{13} -a_{25} a_{23} -a_{45} A_{10}$	$a_{43} b_{12} -b_{14} -b_{24}$	$e_3 \wedge e_5$
$e_4 \wedge e_5$	$-C_{45} A_5$	$-a_{15} a_{14} -a_{25} a_{24} -a_{35} a_{34} A_{11}$	$b_{12} b_{13} b_{23}$	$e_4 \wedge e_5$
$e_1 e_2 e_3 e_4$	$-C_{34} C_{24} -C_{23}$	$-C_{14} C_{13} -C_{12}$	$A_{12} a_{54} -a_{53} a_{52} -a_{51}$	$e_1 e_2 e_3 e_4$
$e_1 e_2 e_3 e_5$	$-C_{35} C_{25} -C_{23} -C_{15}$	$C_{13} -C_{12}$	$a_{45} A_{13} a_{43} -a_{42} a_{41}$	$e_1 e_2 e_3 e_5$
$e_1 e_2 e_4 e_5$	$-C_{45} C_{25} -C_{24} -C_{15}$	C_{14}	$-C_{12} -a_{35} a_{34} A_{14} a_{32} -a_{31}$	$e_1 e_2 e_4 e_5$
$e_1 e_3 e_4 e_5$	$-C_{45} C_{35} -C_{34}$	$-C_{15} C_{14} -C_{13}$	$a_{25} -a_{24} a_{23} A_{15} a_{21}$	$e_1 e_3 e_4 e_5$
$e_2 e_3 e_4 e_5$	$-C_{45} C_{35} -C_{34} -C_{25} C_{24} -C_{23}$	$-a_{15} a_{14} -a_{13} a_{12} A_{16}$		$e_2 e_3 e_4 e_5$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= -\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{2}, & A_2 &= \frac{a_1 + a_2 - a_3 - a_4 - a_5}{2}, & A_3 &= \frac{a_1 - a_2 + a_3 - a_4 - a_5}{2} \\
 A_4 &= \frac{a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5}{2}, & A_5 &= \frac{a_1 - a_2 - a_3 - a_4 + a_5}{2}, & A_6 &= \frac{-a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5}{2} \\
 A_7 &= \frac{-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5}{2}, & A_8 &= \frac{-a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_5}{2}, & A_9 &= \frac{-a_1 - a_2 + a_3 + a_4 - a_5}{2} \\
 A_{10} &= \frac{-a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5}{2}, & A_{11} &= \frac{-a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5}{2}, & A_{12} &= \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5}{2} \\
 A_{13} &= \frac{a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5}{2}, & A_{14} &= \frac{a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5}{2}, & A_{15} &= \frac{a_1 - a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{2} \\
 A_{16} &= \frac{-a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{2} & & \text{と置く。}
 \end{aligned}$$

次に $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{gl}(2)$ ($= \text{GL}(2)$ のリ-環) の恒等表現 $\underbrace{d\rho_2}$ の表現空間を V_2 とする。 $\mathfrak{g}_2 \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = X$ に対し $d\rho_2(X)$ は

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} au+bv \\ cu+dv \end{pmatrix} \quad \text{なる } V_2 \text{ の 1 次変換である.}$$

$G = O(10) \times GL(2)$ のリ-環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ の $V = V_1 \otimes V_2$ における表現 $d\rho = d\rho_1 \oplus d\rho_2$ を考える. $\mathfrak{g} \ni X \oplus \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\lambda \in V_1$, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in V_2$ に対し $d\rho(X \oplus \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})(\lambda \otimes \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}) = (d\rho_1(X)\lambda) \otimes \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \lambda \otimes d\rho_2(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ である. $V = V_1 \otimes V_2 \ni v$ における $\mathfrak{g}$ の isotropy subalgebra $\mathfrak{g}_v$ とは $\mathfrak{g}_v = \{X \in \mathfrak{g} \mid d\rho(X)v = 0\}$ の事である.

Prop 1. (KIMURA) $O(10) \times GL(2)$ は正則な概均質ベクトル空間
スピンの表現空間

で generic な点における isotropy subgroup の連結成分は $(G_2) \times SL(2)$

Proof)

$$V \ni v = (1 + e_1 e_2 e_3 e_4) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (e_1 e_5 + e_2 e_3 e_4 e_5) \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

における isotropy subalgebra を計算してみると

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & c & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & -b \\ \alpha_1 & \lambda_1 & \mu_1 & \mu_2 & 0 & -\alpha_1 & 0 & -\beta_3 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_2 & \nu_1 & \lambda_2 & \mu_3 & 0 & -\alpha_2 & \beta_3 & 0 & -\beta_1 & 0 \\ \alpha_3 & \nu_2 & \nu_3 & \lambda_3 & 0 & -\alpha_3 & -\beta_2 & \beta_1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 2a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \oplus \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 & c & 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -b \\ \beta_1 & 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 & 0 & -\beta_1 & -\lambda_1 & -\nu_1 & -\nu_2 & 0 \\ \beta_2 & -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 & 0 & -\beta_2 & -\mu_1 & -\lambda_2 & -\nu_3 & 0 \\ \beta_3 & \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 & 0 & -\beta_3 & -\mu_2 & -\mu_3 & -\lambda_3 & 0 \\ -c & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & -2a \end{array} \right)$$

with $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$

これは 17 次元である. 群が 49 次元, 表現空間が 32 次元
 $49 - 32 = 17$ ゆえ これは概均質ベクトル空間である.

さて isotropy subalgebra の 10×10 行列の部分 A とおく。

$$S = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

に対し $\bar{S}AS =$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & M_1 & M_2 & 0 & -\beta_3 & \beta_2 & 2\alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ \nu_1 & \lambda_2 & M_3 & \beta_3 & 0 & -\beta_1 & 2\alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ \nu_2 & \nu_3 & \lambda_3 & -\beta_2 & \beta_1 & 0 & 2\alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 & -\lambda_1 & -\nu_1 & -\nu_2 & 2\beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 & -M_1 & -\lambda_2 & -\nu_3 & 2\beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 & -M_2 & -M_3 & -\lambda_3 & 2\beta_3 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2c & -2a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (G_2) \text{ の } 7 \text{ 次表現} & 0 \\ 0 & \mathfrak{sl}(2) \text{ の 随伴表現} \end{pmatrix}$$

従って $\mathfrak{g}$ における isotropy subgr. の連結成分は

$(G_2) \times SL(2)$ である事がわかる。これは reductive であるから この概均質ベクトル空間は正則である。 // prop 1.

さて $(G_2) \times SL(2) \hookrightarrow O(10)$ がわかったから $O(10) \xrightarrow{\text{スピノ表現}} SL(16)$ を $(G_2) \times SL(2)$ へ制限したときの様子を weight の計算によって調べてみると $V_1 = V(16)$ は次のように分解する事がわかる。

$$V(16) = (V(1) \oplus V(7)) \otimes V(2) \quad \text{ここで}$$

$V(7)$ は (G_2) の最小次元 (7 次元) 既約表現の表現空間

$V(1)$ には (G_2) が trivial に作用し, $V(2)$ は $SL(2)$ の恒等表現の表現空間である。

そして $(1 + e_1 e_2 \wedge e_3 \wedge e_4), (e_1 e_5 + e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5)$ はともに $V(1) \otimes V(2)$ ($\subset V(16)$) の元, すなわち (G_2) が trivial に作用している。

Prop 1 において isotropy subgroup が $(G_2) \times SL(2)$ である事から
 $SL(2)$ の作用がなくても 概均質であろうと思われるが 実際に計算
 すれば 確かに $(GO(10), V(16) \oplus V(16))$ は 概均質である。但し これは
 既約ではない。

Cor. (Sato-Kimura) $O(9) \times GL(2)$ は 概均質ではない。
 スピン表現 $\otimes \square$

Proof) $O(9)$ の スピン表現は $O(10)$ の 半スピン表現を $O(9)$ へ
 制限したものである事に注意する。 $O(9) \hookrightarrow O(10)$ を 適当
 にとれば (i.e. $V(10)$ の non-isotropic な x_0 を 適当にとれば)

$(G_2) \times SL(2) \cap O(9)$ の次元が $40 - 32 = 8$ となる筈である。

リ-環でいえば $\left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{g}_2 & 0 \\ \hline 0 & \mathfrak{sl}(2) \end{array} \right) \cap \theta(9) = \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{g}_2 & 0 \\ \hline 0 & \mathfrak{sl}(2) \end{array} \right) \cap \{ A \in \theta(10) \mid Ax_0 = 0 \}$

の次元が 8 になる筈。

しかし $\dim \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{g}_2 & 0 \\ \hline 0 & \mathfrak{sl}(2) \end{array} \right) = 17, \det(\mathfrak{g}_2) = 0, \det(\mathfrak{sl}(2)) = 0$

ゆえ どのような x_0 をとってきても

$$\dim \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{g}_2 & 0 \\ \hline 0 & \mathfrak{sl}(2) \end{array} \right) \cap \theta(9) \geq 17 - (7-1) - (3-1) = 9$$

従って これは 概均質では あり得ない。

// Cor.

次に $O(10) \times GL(3)$ を調べるのだが、その為に再び $O(10) \times GL(2)$
*スピン表現 $\otimes \square$ *スピン表現 $\otimes \square$

について その構造を調べよう。

$x_0 = 1 + e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$, $x'_0 = e_1 \wedge e_5 + e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5$ とすれば (x_0, x'_0) の isotropy subgroup $(G_2) \times SL(2)$ において (G_2) は x_0, x'_0 に trivial に作用している事は述べたが, $SL(2)$ は左右から作用して打ち消しあって (x_0, x'_0) を fix している。その様子をリ-環でみてみよう。

$$X = A \oplus B, \quad A = \left(\begin{array}{c|c} c & -b \\ \hline b & -c \\ \hline -c & -b \\ \hline -b & -c \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} 5 \\ 5 \end{array} \right\}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \quad \text{とおくと}$$

$$A x_0 = -a x_0 - b x'_0, \quad A x'_0 = -c x_0 + a x'_0, \quad \text{一方 } B \text{ は列を動かして}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right) B = \left(a \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, c \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right) \quad \text{となるから}$$

$$(x_0, x'_0) B = (a x_0 + b x'_0, c x_0 - a x'_0) \quad \therefore A(x_0, x'_0) + (x_0, x'_0) B = 0$$

これは $SL(2)$ の左右からの作用が打ち消しあっている事を示している。

さて $O(10) \times GL(3)$ において, $x_0, x'_0 \in V(1) \otimes V(2) (\subset V(16))$ である。
半スピン表現の口

オミの 16 次元ベクトルは $V(7) \otimes V(2)$ の元をとるべきだという事が予想される。

Prop 2. (Kimura-Sato) $O(10) \times GL(3)$ は正則な概均質ベクトル空間で generic な点における isotropy subgroup の連結成分は $SL(2) \times O(3)$ である。
半スピン表現の口

Proof) x_0, x'_0 を上記のベクトルとし x''_0 を新しい 16 次元ベクトルとする。このとり方が大切なのであるが, 今 $O(10) \times GL(3)$ の reductive でない部分群 $O(10) \times \left(\begin{array}{c|c} GL(2) & * \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ を考える。今 $O(10)$ を

左から半スピン表現で, $\left(\begin{array}{c|c} GL(2) & * \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ を右から列の交換として作用させる。

$$O(10) \begin{matrix} x_0 & x'_0 & x''_0 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \left(\begin{array}{c|c} GL(2) & \begin{matrix} * \\ * \\ * \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & * \end{array} \right) \quad \left(V(16) \text{ の base を 適当にとれば } x_0, x'_0 \right. \\ \left. \text{は このような 16 次元 従ベクトル として} \right. \\ \left. \text{表わす事が できること が 証明される.} \right)$$

ここで右の作用は x_0, x'_0 間の作用をひきおこす。よって

この中で x_0, x'_0 を fix するものは Prop 1. によって

$$(G_2) \times SL(2) \begin{matrix} x_0 & x'_0 & x''_0 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \left(\begin{array}{c|c} SL(2) & \begin{matrix} h_1 \\ h_2 \\ * \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & * \end{array} \right) \quad \text{ここで 左右の } SL(2) \text{ は 同一のもの.}$$

既述のように (G_2) は $\gamma \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \left\{ \begin{matrix} \leftarrow \text{に作用し (i.e. trivial な作用. } x'_0 \\ \leftarrow \end{matrix} \right.$

でも同様) 左の $SL(2)$ は $\delta \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \left\{ \begin{matrix} \leftarrow \text{この交換 etc. として作用} \\ \leftarrow \end{matrix} \right.$

する。右の $SL(2)$ は x_0, x'_0 の列の交換 etc. として作用し 互に打ち消しあって全体として x_0, x'_0 を fix する。

さて h_1, h_2 を適当にとる事によって x''_0 の形を $\left\{ \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ * \\ 0 \end{bmatrix} \right\}_7$ とする事ができる。以下 h_1, h_2 をそのように fix する。そして $*$ ($\neq 0$) を任意にとれるから x''_0 を scalar 倍する事ができる。すなわち

$$(G_2) \times GL(2) \text{ が } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}_7 \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}_7 \leftarrow \text{に作用する。 } G_2 \text{ は } \left\{ \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ * \\ 0 \end{bmatrix} \right\}_7 \text{ の各々に}$$

作用し $GL(2)$ は $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \left\{ \begin{matrix} \leftarrow \text{の交換 etc. として作用する.} \\ \leftarrow \end{matrix} \right.$

結局 $(G_2) \times GL(2)$ が $V(7) \oplus V(7)$ に作用しているのであるが、これは概均質で isotropy subgroup は $GL(2)$ である。

すなわち $O(10) \times \left(\begin{array}{c|c} GL(2) & * \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) / GL(2)$ は概均質である。

半スピノ表現 $\otimes \square$

群を大きくしても勿論、概均質ゆえ $O(10) \times GL(3)$ も概均質である。

半スピノ表現 $\otimes \square$

$(G_2) \times GL(2)$
 x'' をとるには 7 次表現 $\otimes \square$ の generic な点をとればよい。

例えば $V(7) \oplus V(7) \ni \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{I} \\ \text{I} \\ \text{I} \\ \text{I} \\ \text{I} \\ \text{I} \end{array} & \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{I} \\ \text{I} \\ \text{I} \\ \text{I} \\ \text{I} \\ \text{I} \end{array} \\ \hline \end{array} \right)$ は generic な点である。

これに対応するのは $x'' = e_{11}e_2 + e_{11}e_{31}e_{41}e_5$ である。

(x_0, x'_0, x''_0) における isotropy subalgebra を計算すると次の通り。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} & -3e & & & & -3f & & & & \\ -f & a & & & -2e & 3f & & & & \\ & & \lambda & \mu & & & & & e & \\ & & \nu & -\lambda - a & & & & & -e & \\ & -2f & & & 2a & & & & & \\ -e & e & & & & f & & & & \\ & & & & & 3e & -a & & 2f & \\ & & & -f & & & & -\lambda & -\nu & \\ & & f & & & & & -\mu & \lambda + a & \\ & & & & & 2e & & & & -2a \end{array} \right) \oplus \left(\begin{array}{c|c|c} a & & 2f \\ & -a & 2e \\ e & f & \end{array} \right)$$

これは 6 次元。群の次元 = 54, 表現空間の次元 = 48

このリー環の Killing form を計算すると non-degenerate である事がわかるから Cartan の判定条件により semi-simple. よってこの空間は正則である。実は isotropy subgroup の連結成分は $SL(2) \times O(3)$ である事がわかる。

Prop 2.

Cor. $O(10) \times GL(2)$ は概均質ではない
 半スピンの表現 $\square$

Proof) $SL(2)$ の随伴表現は $O(3)$ の基本表現と考える事ができる。すなわち $O(10) \times GL(2)$ を $O(10) \times GO(3)$ と考える。
 半スピンの表現 $\square$ 半スピンの表現 $\square$

そのとき $O(10) \times GO(3) \hookrightarrow O(10) \times GL(3)$ と考えられる。
 半スピンの表現 $\square$ 半スピンの表現 $\square$

もしこれが概均質ならば generic な点の isotropy subalgebra の次元 $= 49 - 48 = 1$ である筈。しかし $O(10) \times GL(3)$ の isotropy subalgebra は Prop 1 の証明中にある如くだから どの点の isotropy subalg. も 次元 ≥ 3 //

Prop 3 $O(12) \times GL(2)$ は概均質ではない (Sato-Kimura)
 半スピンの表現 $\square$

Proof) $GO(12)/SL(6)$ が概均質である事は知られている。

(1970: 新谷)

表現空間 $V(32)$ は $SL(6)$ の表現空間としては 次のように分解している事が weight の計算により確かめられる。

$$V(32) = V(1) \oplus V(1) \oplus V(15) \oplus V(15)$$

日 日の dual

$GL(2)$ の元は一般に $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$ と分解できる。(分解できない行列全体は 3 次元, i.e. codim 1)

$O(12) \times GL(2)$ のかわりに $O(12) \times \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ なる群を考える。

$$32 \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0(12) \text{ の} \\ \text{半スピノル} \\ \text{表現} \end{pmatrix}}_{32} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right.$$

に於いて x_0 を fix するのは $SL(6)$

ゆえ $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & A & & \\ & & & \\ & & & A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & h \\ 0 & k \end{pmatrix}$, 但し A は $SL(6)$ の日なる表現.
(m : fixed)

ここで A と k の作用によって y_1 は $GL(6)$ の表現空間の元と考える事ができる。

$GL(6)_{\text{日}} / Sp(3)$ は正則概均質であるから y_1 はその generic な点とする。 $Sp(3)$ 日とその contragredient

は同じゆえ

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & Sp(3)_{\text{日}} & & \\ & & & \\ & & & Sp(3)_{\text{日}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & h \\ 0 & k \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{正確にいえば } GL(6)_{\text{日}} \text{ を } Sp(3) \text{ に制限すれば} \\ \text{既約ではなく、その15次元表現空間は} \\ \text{14次元表現空間と1次元の空間とに分解する。} \end{array} \right)$$

$$V = \{ X \in M(6) \mid {}^t X = -X \} \ni X, \quad Sp(3) \ni A \text{ に対し}$$

$$X \mapsto {}^* A X {}^t A \text{ と作用するが generic な点は } \begin{pmatrix} & a_1 & a_2 & a_3 \\ & & & \\ -a_1 & & & \\ & -a_2 & -a_3 & \end{pmatrix} \text{ という形へ}$$

うつせる。(それは a_1, a_2, a_3 の置換を除いて unique)

それを不変にする $Sp(3)$ の部分群は $3 Sp(1)$ である事が計算により確かめられる。ie. isotropy subgroup の次元は 9.

従って $O(12) \times \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ による generic な点の orbit は $69 - 9 = 60$ 次元。

そのあと $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$ を作用させても orbit の次元は高々1つふえるだけゆえ

(表現空間の次元は64だから) これは概均質ではない。 //

§3. 例外型既約概均質ベクトル空間について

この § の目標は次の空間の概均質性を調べる事である。

$$E_6 \times GL(2), E_6 \times GL(3), E_6 \times GL(2), F_4 \times GL(2), E_7 \times GL(1)$$

27次表現の□ 27次表現の□ 27次表現の□ 26次表現の□ 56次表現

$$E_7 \times GL(2)$$

56次表現の□

まず F_4 の 26 次表現, E_6 の 27 次表現について簡単に述べる。

$$\mathbb{C} = \text{複素数体}, Q = \mathbb{C} \cdot 1 + \mathbb{C} \cdot e_1 + \mathbb{C} \cdot e_2 + \mathbb{C} e_1 e_2 \quad (e_1^2 = 1, e_2^2 = 1, e_1 e_2 = -e_2 e_1)$$

を $\mathbb{C}$ 上の四元数環とし Q 上の二次加群 $\mathcal{L} = Q \cdot 1 + Q \cdot e$ に乗法を

$$(s + re)(t + se) = (st - \bar{r}t) + (ts + r\bar{s})e \quad (s, r, t \in Q, \bar{s}, \bar{r} \text{ は } s, r \text{ の共役四元数})$$

と定義して得られる $\mathbb{C}$ 上 8 次元の non-associative な algebra を

Cayley algebra という。 $\mathcal{L} \ni x = s + re \quad (s, r \in Q)$ に対し その共役を

$$\bar{x} = \bar{s} - re \text{ と定める。 } \overline{xy} = \bar{y} \cdot \bar{x} \text{ である。}$$

$\mathcal{J}$ for the exceptional simple Jordan algebra over $\mathbb{C}$ とは

$$\mathcal{J} = \left\{ X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{C} \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{L} \end{matrix} \right\}$$

に乗法を $X \cdot Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$
(XY, YX は普通の行列の積)

と定義したものをいう。 $\dim \mathcal{J} = 27$. $S_p X \stackrel{\text{def}}{=} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ とする。

① $\mathcal{D}$ が $\mathcal{J}$ の derivation algebra とは $\mathcal{J}$ の 1 次変換 D で $D(X \cdot Y) = DX \cdot Y + X \cdot DY$ をみたすもの全体のなす Lie algebra のこと。

② $R_Y \quad (Y \in \mathcal{J})$ が右乗法とは $X \mapsto X \cdot Y$ ($\text{for } \forall X \in \mathcal{J}$) なる $\mathcal{J}$ の 1 次変換の事である。そのとき 次の事が成り立つ。

★ $\mathcal{J}$ の derivation algebra は $\mathbb{C}$ 上 52 次元, rank 4 の例外単純リー環 F_4 である。 $\mathbb{C}$ 上 78 次元, rank 6 の例外単純リー環 E_6 は trace 0 の元による右乗法と $\mathcal{J}$ の derivation 全体の生成するリー環である。

$$E_6 = \mathcal{Q} + \{R_i\}, \quad S_p Y = 0, \quad F_4 = \mathcal{Q}$$

これに E_6 の 27 次既約表現, $\mathcal{J}$ は F_4 の作用で既約ではないが, それを $\mathcal{J}_0 = \{X \in \mathcal{J} \mid S_p X = 0\}$ に制限したものが F_4 の 26 次既約表現である。

[注] $\mathcal{J} \ni (1, 1)$ における isotropy subalgebra を計算する事により直ちに $\boxed{E_6 \times GL(1) / F_4}$ が得られる。

$\mathcal{Q}$ の構造を述べる。 $\theta(8, \mathbb{C}) = \{X \in M(8, \mathbb{C}) \mid {}^t X + X = 0\}$ を Cayley alg. の一次変換と考える。 $\mathcal{L} \ni x$ に対し $S_p x = x + \bar{x}$ とおく。そのとき $U \in \theta(8, \mathbb{C})$ に対して $\exists \perp U', U'' \in \theta(8, \mathbb{C})$ s.t.

$$S_p(Ux)y\bar{z} + S_p x(U'y)\bar{z} + S_p xy(U''\bar{z}) = 0 \quad \text{いま}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a \in \mathcal{L} \text{ に対し}$$

$$(a)_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & \bar{a} & 0 \end{pmatrix}, \quad (a)_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{a} \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (a)_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ \bar{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。 E_1, E_2, E_3 を 0 へうつす $\mathcal{J}$ の derivations 全体を $\mathcal{Q}_0$ とすると

$$\mathcal{Q}_0 = \left\{ D \in \mathcal{Q} \mid D \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \bar{x}_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \bar{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & U''x_3 & U'\bar{x}_2 \\ \overline{U''x_3} & 0 & Ux_1 \\ U'x_2 & \overline{Ux_1} & 0 \end{pmatrix} \right.$$

for $\exists U \in \theta(8, \mathbb{C}) \}$ である事が知られている。

$\mathcal{Q}_0 \cong \theta(8, \mathbb{C})$, $\dim \mathcal{Q}_0 = 28$ である。次に

$\mathcal{J}$ の一次変換 A, B に対し $[A, B] = AB - BA$ と定義すると

$$\mathcal{J}_1 = \{ [R_{E_2}, R(a)_1] \mid a \in \mathcal{L} \}$$

$$\mathcal{J}_2 = \{ [R_{E_1}, R(a)_2] \mid a \in \mathcal{L} \}$$

$\mathcal{J}_3 = \{ [R_{E_1}, R(a)_3] \mid a \in \mathcal{L} \}$ とおけば $\dim \mathcal{J}_i = 8$ ($i = 1, 2, 3$) で $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_0 \oplus \mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2 \oplus \mathcal{J}_3$ と分解する。以上について詳しくは [5], [6] を参照のこと。

Prop 1. (KIMURA) $E_6 \times GL(2)$ は正則概均質で その
27 次表現 $\otimes \square$
generic な点における isotropy subgroup の連結成分は
 $O(8)$ である。

Proof) $\langle \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \rangle$ における isotropy subalg. が $\mathcal{Q}_0 (\cong \mathfrak{o}(8, \mathbb{C}))$ になる事を示す。まず $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$ の作用を具体的に計算してみると次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \chi_3 & \bar{\chi}_2 \\ \bar{\chi}_3 & \xi_2 & \chi_1 \\ \chi_2 & \bar{\chi}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathcal{J}_1]{[R_{E_2}, R(a)_1]} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\bar{a}\chi_2}{4} & \frac{\chi_3 a}{4} \\ -\frac{a\chi_2}{4} & -\frac{\chi_1 \bar{a} + a\bar{\chi}_1}{4} & \frac{a(\xi_2 - \xi_3)}{4} \\ \frac{\bar{\chi}_3 a}{4} & \frac{\bar{a}(\xi_2 - \xi_3)}{4} & \frac{\bar{a}\chi_1 + \bar{\chi}_1 a}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \chi_3 & \bar{\chi}_2 \\ \bar{\chi}_3 & \xi_2 & \chi_1 \\ \chi_2 & \bar{\chi}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathcal{J}_2]{[R_{E_1}, R(a)_2]} \begin{pmatrix} -\frac{\bar{\chi}_2 a + \bar{a}\chi_2}{4} & -\frac{\bar{\chi}_1 a}{4} & \frac{\bar{a}(\xi_1 - \xi_3)}{4} \\ -\frac{\chi_1 a}{4} & 0 & \frac{a\chi_3}{4} \\ \frac{a(\xi_1 - \xi_3)}{4} & \frac{a\chi_2}{4} & \frac{a\bar{\chi}_2 + \chi_2 \bar{a}}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{[R_{E_1}, R_{(a)_3}]} \begin{pmatrix} -\frac{a\bar{x}_3 + x_3\bar{a}}{4} & \frac{a(\xi_1 - \xi_2)}{4} & -\frac{ax_1}{4} \\ \frac{\bar{a}(\xi_1 - \xi_2)}{4} & \frac{\bar{x}_3 a + \bar{a}x_3}{4} & \frac{\bar{x}_2 a}{4} \\ -\frac{ax_1}{4} & \frac{x_2 a}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

さて $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し

$z = X \oplus \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E_6 \oplus \mathfrak{gl}(2)$ (群 E_6 とリ-環 E_6 を区別しないので書く) で

$$dp(z) \cdot v = \left[X \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \left[X \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = 0 \quad \text{となる } z$$

全体 $\mathfrak{g}$ が すなわち v における isotropy subalgebra $\mathfrak{g}_v$ である。
 $\mathfrak{d}_0 \subseteq \mathfrak{g}_v$ は定義から明らかゆえ その逆 $\mathfrak{g}_v \subseteq \mathfrak{d}_0$ を示す。

$a \in \mathcal{L}$ に対し $(a)_1' = [R_{E_2}, R_{(a)_1}] \in \mathcal{J}_1$

$(a)_2' = [R_{E_1}, R_{(a)_2}] \in \mathcal{J}_2, (a)_3' = [R_{E_1}, R_{(a)_3}] \in \mathcal{J}_3$ と書く

事にすれば

$$E_6 \ni X = D_0 + (\alpha)_1' + (\beta)_2' + (\gamma)_3' + R_\gamma \quad (S_\gamma \gamma = 0)$$

$D_0 \in \mathfrak{d}_0, \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{L}$ と一意的に分解できる。

今 $z = [D_0 + (\alpha)_1' + (\beta)_2' + (\gamma)_3' + R_\gamma] \oplus \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_v$ とすると

$$\left[Y + \begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3b & & \\ & 2b & \\ & & b \end{pmatrix} \right] \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ゆえ, } Y = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{とおけば } \begin{pmatrix} \xi_1 + a + 3b & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 + a + 2b & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 + a + b \end{pmatrix} = 0 \quad \text{with } \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$$

$$\therefore x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad \xi_1 = -b, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = b$$

$$\text{従って } Y = \begin{pmatrix} -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad a = -2b \text{ でなければならぬ.}$$

次に

$$\left[(\alpha)_1' \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + (\beta)_2' \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + (\gamma)_3' \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -b & & \\ & 0 & \\ & & b \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} c & & \\ & c & \\ & & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3d & & \\ & 2d & \\ & & d \end{pmatrix} \right] \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{であるから}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{4} \\ 0 & \frac{\alpha}{4} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\beta}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\gamma}{4} & 0 \\ \frac{\gamma}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3b+c+3d & 0 & 0 \\ 0 & 2d+c & 0 \\ 0 & 0 & d+c+b \end{pmatrix}$$

$$= 0 \quad \therefore \alpha = \beta = \gamma = 0 \quad \begin{cases} c - 3b + 3d = 0 \\ c + 2d = 0 \\ c + b + d = 0 \end{cases} \rightarrow b = c = d = 0 \quad \therefore a = 0$$

$$\text{すなわち } z = [D_0 + (\alpha)_1' + (\beta)_2' + (\gamma)_3' + R_1] \oplus \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_u \text{ ならば}$$

$$z = D_0. \quad \therefore \mathcal{O}_u \subseteq \mathcal{Q}_0.$$

従って $\mathcal{O}_u = \mathcal{Q}_0 \cong \mathcal{O}(8, \mathbb{C})$ よって正則概均質である. //

(群の次元 = 82, 表現空間の次元 = 54)
 $\dim \mathcal{O}(8) = 28 = 82 - 54$. 正則性は明らか

Prop 2. (KIMURA) $E_6 \times GL(3)$ は概均質ではない。
27次表現の口

Proof) $E_6 \times GL(3)$ がもし概均質ならば その generic な
27次表現の口

$$\text{点として } \left\langle \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

なる形の点をとる事ができる。まず それを示そう。

$$\langle A, B, C \rangle \text{ を generic な点とする。 } E_6 \langle A, B, C \rangle \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = E_6 \langle aA + dB, bA + eB, C \rangle$$

$$\text{Prop 1 により } E_6 \times GL(2) \text{ は概均質で } \left\langle \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & \\ & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

27次表現の口

が generic な点ゆえ E_6 の元 X と a, b, e, d を適当にとれば

$$X(aA + dB) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad X(bA + eB) = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \text{ となる}$$

$$3. \text{ よって最初から } A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \text{ としてよい。}$$

$$C = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \text{ とおく。 一般に } (k \neq 0 \text{ なら}) \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - \frac{cg}{k}, & b - \frac{ch}{k}, & 0 \\ d - \frac{fg}{k}, & e - \frac{fh}{k}, & 0 \\ \frac{g}{k}, & \frac{h}{k}, & 1 \end{pmatrix} \text{ と分解できるから}$$

$$E_6 \left\langle \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

$$= E_6 \left\langle \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k\xi_1 + c + 3f, & kx_3, & k\bar{x}_2 \\ k\bar{x}_3, & k\xi_2 + c + 2f, & kx_1 \\ kx_2, & k\bar{x}_1, & k\xi_3 + c + f \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$$

$$z = z' f' = f + k(\xi_1 - \xi_2), \quad c' = c + k(3\xi_2 - 2\xi_1), \quad \xi = \xi_1 + \xi_3 - 2\xi_2$$

$$\text{とおく} \quad = E_6 \left\langle \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c'+3j' & kx_3 & k\bar{x}_2 \\ k\bar{x}_3 & c'+2j' & kx_1 \\ kx_2 & k\bar{x}_1 & k\xi+c'+j' \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$$

$$= E_6 \left\langle \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 & 0 & c' \\ 0 & 1 & j' \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$$

$$= E_6 \left\langle \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & k \end{pmatrix}$$

$$\text{さて} \quad v = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

における $E_6 \oplus \mathfrak{gl}(3)$ の isotypy subalg を $\mathcal{O}_v$ としよう。

今示した事により $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$, $\xi \in \mathbb{C}$ を適当にとれば

v は generic な点になるのであるから, そのとき $\dim \mathcal{O}_v =$

$(78+9) - 27 \times 3 = 6$ でなければ ならない。

さて $\mathcal{O}_v \ni X' = X \oplus \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$, $X = D_0 + (\alpha)_1' + (\beta)_2' + (\gamma)_3' + R_1$ とする。但し

$$(\alpha)_1' = [R_{E_2}, R_{(\alpha)_1}], \quad (\beta)_2' = [R_{E_1}, R_{(\beta)_2}], \quad (\gamma)_3' = [R_{E_1}, R_{(\gamma)_3}]$$

$$Y = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_3 & \bar{\eta}_2 \\ \bar{\eta}_3 & \eta_2 & \eta_1 \\ \eta_2 & \bar{\eta}_1 & \eta_3 \end{pmatrix} \text{ with } \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0 \quad \text{まず}$$

$$\left[X \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3b & & \\ & 2b & \\ & & b \end{pmatrix} \right] \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

であるから

$$\begin{pmatrix} \eta_1 + a + 3b, & y_3 + c\bar{x}_3, & \bar{y}_2 + c\bar{x}_2 \\ \bar{y}_3 + c\bar{x}_3, & \eta_2 + a + 2b, & y_1 + cx_1 \\ y_2 + cx_2, & \bar{y}_1 + c\bar{x}_1, & \eta_3 + a + b + c\xi \end{pmatrix} = 0. \quad \therefore \gamma = \begin{pmatrix} -a-3b, & -c\bar{x}_3, & -c\bar{x}_2 \\ -c\bar{x}_3, & -a-2b, & -cx_1 \\ -cx_2, & -c\bar{x}_1, & -a-b-c\xi \end{pmatrix}$$

with $3a+6b+c\xi=0$ となる. 次に

$$\left[X \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & & \\ & d & \\ & & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3e & & \\ & 2e & \\ & & e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f\xi_1 & fx_3 & f\bar{x}_2 \\ f\bar{x}_3 & f\xi_2 & fx_1 \\ fx_2 & f\bar{x}_1 & f\xi_3 \end{pmatrix} \right] \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

で あらうから

$$\alpha = 2(3c-2f)x_1, \quad \beta = 2(2c-f)x_2, \quad \gamma = 2(5c-2f)x_3, \quad b = \frac{(f-c)\xi}{2}$$

$$d = 3(c-f)\xi, \quad e = a + \frac{5(f-c)\xi}{2} \text{ となる. 結局}$$

$$X = D_0 + [2(3c-2f)x_1]_1' + [2(2c-f)x_2]_2' + [2(5c-2f)x_3]_3' + R\gamma$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} -a-3b, & -c\bar{x}_3, & -c\bar{x}_2 \\ -c\bar{x}_3, & -a-2b, & -cx_1 \\ -cx_2, & -c\bar{x}_1, & -a-b-c\xi \end{pmatrix}, \quad 3(a+2b) = -c\xi$$

最後に

$$\left\langle X \begin{pmatrix} 0 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & & \\ & g & \\ & & g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3h & & \\ & 2h & \\ & & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k\xi_1 & kx_3 & k\bar{x}_2 \\ k\bar{x}_3 & k\xi_2 & kx_1 \\ kx_2 & k\bar{x}_1 & k\xi_3 \end{pmatrix} \right\rangle \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$= 0$. これは 27 個の方程式を表わしているが これが

すべて独立 $\longleftrightarrow E_6 \times GL(3)$ が 概均質, である.
27 次表現の口

実際に計算してみると 27 個の方程式は次のようになる。

$$\textcircled{1} \quad (f-3c)x_2\bar{x}_2 + 2(f-3c)x_3\bar{x}_3 + g + 3h = 0$$

$$\textcircled{2} \quad 2(f-2c)x_1\bar{x}_1 + 2(2c-f)x_3\bar{x}_3 + g + 2h = 0$$

$$\textcircled{3} \quad 2(c-f)x_1\bar{x}_1 + (c-f)x_2\bar{x}_2 + (2a+5b)\xi + g + h + k\xi = 0$$

$$\textcircled{4} \sim \textcircled{11} \quad \cup x_1 + \frac{(4a+9b)+2k+(2f-3c)\xi}{2} x_1 + \frac{(5c-3f)}{2} \bar{x}_2 \bar{x}_3 = 0$$

$$(12) \sim (19) \quad U' \bar{x}_2 - 2C x_3 x_1 + (k + 2a + 4b + \frac{(j-2C)\xi}{2}) \bar{x}_2 = 0$$

$$(20) \sim (27) \quad U'' x_3 + \frac{3j-7C}{2} \overline{x_1 x_2} + (k - \frac{2a+5b}{2}) x_3 = 0$$

($U \in \Theta(S, C)$, U', U'' については P.28 参照)

$E_6 \times GL(3)$ が概均質である事と $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{L}$, $\xi \in \mathbb{C}$ を
27-次元表現の

適当にとれば ① ~ ②⑦ の方程式が独立になる, という事と同値

である。 いかなる x_1, x_2, x_3, ξ に対しても 決して独立にならない

事を証明する。

$\xi=0$ のとき) ①, ②, ③ が独立なら 例えば $f=n_1C, g=n_2C, h=n_3C$ と表わせる。 $(n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{C})$ 。もし表わせなければ C のかわりに f, g, h の いすれかを使える。 $2b=(f-C)\xi=0, 3a+b=-(C\xi=0$ より $a=b=0$ に注意) 従って ④ ~ ②⑦ は次の形をしている。

$$U x_1 + k x_1 + n' C \overline{x_2 x_3} = 0 \quad (\exists n' \in \mathbb{C}) \quad \dots 1)$$

$$U' \bar{x}_2 + k \bar{x}_2 - 2C x_3 x_1 = 0 \quad \dots 2)$$

$$U'' x_3 + k x_3 + n'' C \overline{x_1 x_2} = 0 \quad (\exists n'' \in \mathbb{C}) \quad \dots 3)$$

ところで U, U', U'' は 8 次の歪対称行列ゆえ $U x_1 = 0,$

$U' \bar{x}_2 = 0, U'' x_3 = 0$ は各々 高々 7 個の独立な方程式を表わす。

例えば $U x_1 = 0$ の表わす 8 個の方程式を $P_1=0, \dots, P_7=0,$

$P_8 = P_1 + \dots + P_7 = 0$ とし $U' \bar{x}_2 = 0$ の表わす 8 個の方程式を $P'_1=0,$

$\dots, P'_7=0, P'_8 = P'_1 + \dots + P'_7 = 0$ とする。 1) と 2) が独立な 3) は

$$\begin{cases} P_1 + k + \alpha_1 C = 0 \\ \dots \\ P_8 + k + \alpha_8 C = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} P'_1 + k + \alpha'_1 C = 0 \\ \dots \\ P'_8 + k + \alpha'_8 C = 0 \end{cases} \quad \text{は独立な 16 個の式を表わす。}$$

$P_8 = P_1 + \dots + P_7$ より $n\mathbf{k} + m\mathbf{C} = 0$ ($\exists n, m \in \mathbb{C}$, 独立性より $n=m=0$ という事はない。) よって 例えば $\mathbf{k} = \alpha\mathbf{C}$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) と表わせたとすれば $P_1' + \alpha\mathbf{C} = 0, \dots, P_7' + \alpha\mathbf{C} = 0$ が独立な 7 個の方程式を表わすが $P_8' = P_1' + \dots + P_7'$ より $\mathbf{C} = 0 \therefore \mathbf{k} = 0$ 従って 3) は $U''x_3 = 0$ となるが これは 高々 7 個の独立な式しか表わさない。

$\xi \neq 0$ の場合も $\xi = 0$ のときと殆ど同じ方法で 27 個の方程式の従属性が証明できる。従って $E_6 \times GL(3)$ は概均質ではない。
27 次表現の $\square$ // Prop 2.

Cor. $E_6 \times GL(2)$ は概均質ではない。
27 次表現の $\square$

Proof) $E_6 \times GL(2)$ は $E_6 \times GO(3)$ と考える事ができる。もし
27 次表現の $\square$ 27 次表現の $\square$

これが概均質なら $E_6 \times GO(3) \subset E_6 \times GL(3)$ の 2 勿論
27 次表現の $\square$ 27 次表現の $\square$

$E_6 \times GL(3)$ も概均質である。これは Prop 2 に反する。 //

Prop 3. $F_4 \times GL(2)$ は概均質ではない。
26 次表現の $\square$

略証) F_4 の 26 次元の既約表現空間は

$$\mathfrak{f}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{f} \mid \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \right\} \text{ であり群 } F_4 \text{ の}$$

リー環 F_4 (同じ記号を使う) は $\mathfrak{f}_0$ の derivations 全体である。

f の元は (generic なところでは) F_4 の作用で $\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & -a-b \end{pmatrix}$ と

P.42参照)

いう形へうつす事ができる。従って $F_4 \times GL(2)$ の generic な

26次元表現の口

点として $z = \begin{pmatrix} \xi_1 & & \\ & \xi_2 & \\ & & -\xi_1 - \xi_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1 & \bar{\eta}_3 & \bar{\eta}_2 \\ \bar{\eta}_3 & \eta_2 & \eta_1 \\ \eta_2 & \bar{\eta}_1 & \eta_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ なる形の

点をとる事ができる。

$F_4 \oplus gl(2) \ni D_0 \oplus (\alpha)_1' \oplus (\beta)_2' \oplus (\gamma)_3' \oplus \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が z を不変にする元であるとする。ここで

$$D_0 \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_3 & \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 & \alpha_2 & a_1 \\ a_2 & \bar{a}_1 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & U'a_3 & \overline{U'a_2} \\ U'a_3 & 0 & U'a_1 \\ U'a_2 & \overline{U'a_1} & 0 \end{pmatrix}$$

そのとき次の $26 \times 2 = 52$ 個の連立方程式が成り立つがこれを独立になるように $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{C}, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{C}$ を選べる事が $F_4 \times GL(2)$ が概均質である事と同値である。

6次元表現の口

$$a\xi_1 + b\eta_1 = 0 \quad \text{--- (1)}, \quad a\xi_2 + b\eta_2 = 0 \quad \text{--- (2)}, \quad \frac{\gamma(\xi_1 - \xi_2)}{4} + by_3 = 0 \quad \text{--- (3)~(10)}$$

$$\frac{\beta(2\xi_1 + \xi_2)}{4} + b\bar{y}_2 = 0 \quad \text{--- (11)~(18)}, \quad \frac{\alpha(\xi_1 + 2\xi_2)}{4} + by_1 = 0 \quad \text{--- (19)~(26)}$$

まずこれらの独立な事から $a=b=0, \alpha=\beta=\gamma=0$ がでる。従って

$$c\xi_1 + d\eta_1 = 0 \quad \text{--- (27)}, \quad c\xi_2 + d\eta_2 = 0 \quad \text{--- (28)}, \quad U'y_3 + cx_3 + dy_3 = 0 \quad \text{--- (29)~(36)}$$

$$U'\bar{y}_2 + c\bar{x}_2 + d\bar{y}_2 = 0 \quad \text{--- (37)~(44)}, \quad Uy_1 + cx_1 + dy_1 = 0 \quad \text{--- (45)~(52)}$$

まず (27), (28) が独立な事から $c=d=0$, そのとき例えば (46)~(52) は

8個の方程式 $Uy_1=0$ となるが U は 8次の歪対称行列ゆえ

高々 7個の独立な式しか表わさない。従ってこの空間は

概均質ではあり得ない。// p.43.

例外リー環 E_7 の 56 次表現について必要な事実を証明しないで
まとめておく。詳しくは [6] を参照。

$\mathcal{J}$ = the exceptional simple Jordan algebra

$\bar{\mathcal{J}}$ は 対応 $x \mapsto \bar{x} \in \bar{\mathcal{J}}$ により $\mathcal{J}$ と同型な vector space.

$$\bar{\mathcal{E}}_6 = \mathbb{C} \cdot R_1 \oplus \mathcal{E}_6(\mathcal{J}), \quad \mathcal{E}_6(\mathcal{J}) = R(\mathcal{J}) + [R(\mathcal{J}), R(\mathcal{J})] = E_6$$

このとき $E_7 = \mathcal{J} \oplus \bar{\mathcal{J}} \oplus \mathbb{C} \cdot R_1 \oplus E_6$ (Tits-Koecher alg.)

$$\mathcal{J} \ni a = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \text{ に対し } T(a) = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$$

$T(a, b) = T(a \cdot b)$ とすれば $T(a, b)$ は 非退化な対称双一次
形式であり, $\mathcal{J} \ni a, b$ に対し その Freudenthal product を
 $a \times b = a \cdot b - \frac{1}{2} T(a) b - \frac{1}{2} T(b) a + \frac{1}{2} [T(a) T(b) - T(a \cdot b)] \cdot 1$ によ
って定義する。

$\mathcal{J}$ の一次変換 A の trace form $T(a, b)$ に関する adjoint を
 A^* と記す。: $T(Aa, b) = T(a, A^*b)$

右乗法 $R_a (a \in \mathcal{J})$ は self-adjoint である。

$\mathcal{M} = \mathbb{C} \cdot 1 \oplus \mathbb{C} \cdot 1 \oplus \mathcal{J} \oplus \bar{\mathcal{J}}$ ($\dim \mathcal{M} = 1+1+27+27=56$) に E_7 を
次のように作用させる。 ($\dim E_7 = 27+27+1+78=133$ である。)

$\mathcal{M} \ni X = (\xi, \eta, x, y)$ 但し $\xi, \eta \in \mathbb{C}, x, y \in \mathcal{J}$ に対して
 E_7 の $\mathcal{M}$ への作用を次のように定義すると $\mathcal{M}$ は E_7 の 56 次元
の既約な表現空間になっている事が知られている。

$$* \begin{cases} [X, a] = (T(a, y), 0, \eta a, 2a\chi(x)) & a \in \mathfrak{g} \\ [X, \bar{a}] = (0, -T(a, x), -2a\chi(y), -\xi a) \\ [X, 2R_1] = (3\xi, -3\eta, -x, y) \\ [X, L] = (0, 0, xL, -yL^*) & L \in E_6(\mathfrak{g}) \end{cases}$$

これから直ちに次の事がわかる。

Prop 4. $E_7 \times GL(1)$ の 56 次表現は正則 概均質で generic な点における isotropy subgroup の連結成分は E_6 である。

Proof) $\mathcal{W} \ni X_0 = (1, 1, 0, 0)$ における $E_7 \times GL(1)$ の isotropy subalg. を $\mathfrak{g}_{X_0}$ とする。 $\mathfrak{g}_{X_0} \ni A = a \oplus \bar{b} \oplus 2mR_1 \oplus L \oplus k$, 但し $m, k \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathfrak{g}$, $L \in E_6$ とすると

$$[(1, 1, 0, 0), a] = (0, 0, a, 0)$$

$$[(1, 1, 0, 0), \bar{b}] = (0, 0, 0, -b)$$

$$[(1, 1, 0, 0), 2mR_1] = (3m, -3m, 0, 0)$$

$$[(1, 1, 0, 0), k] = (k, k, 0, 0)$$

$$[(1, 1, 0, 0), L] = (0, 0, 0, 0)$$

$$\therefore [X_0, A] = (3m+k, -3m+k, a, -b) = 0 \quad \therefore a=b=0, m=k=0$$

$$\therefore A = L \in E_6, \text{ 逆に } E_6 \subset \mathfrak{g}_{X_0} \text{ は 明らかゆへ } \mathfrak{g}_{X_0} = E_6 //$$

$$\text{註). } \dim E_7 \times GL(1) = 134. \quad \dim E_6 = 78.$$

$$\dim V = 56, \quad 78 = 134 - 56 \quad \phi \text{ は 概均質.}$$

E_6 は reductive ゆへ 正則.

Prop 5. (Kimura) $E_7 \times GL(2)$ は概均質ではない.
56次元表現の口

Proof) 概均質になるとして, そのgenericな点を $A \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + B \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき Prop. 4 により $A = (1, 1, 0, 0)$, $B = (0, \eta, x, y)$

$\eta \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathcal{F}$ としても一般性を失わない。さて

$E_7 \ni X = P \oplus \bar{g} \oplus 2m R_1 \oplus L$ ($P, g \in \mathcal{F}$, $m \in \mathbb{C}$, $L \in E_6(\mathcal{F})$) とし $X \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $u = A \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + B \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ における isotropy subalg. の元であれば

$$[X \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}] \cdot u = (XA + aA + bB) \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (XB + dB + cA) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ゆえ}$$

$$XA + aA + bB = 0 \quad \cdots 1), \quad XB + dB + cA = 0 \quad \cdots 2)$$

1) 2) をあわせて $56 \times 2 = 112$ 個の独立な方程式をあらめすように B を (i.e. $\eta \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathcal{F}$ を) とする事ができる $\longleftrightarrow E_7 \times GL(2)$ が概均質, である。 まず 1) を調べる。

$$XA + aA + bB = (3m + a, b\eta - 3m + a, P + bx, -g + by) = 0$$

$$\therefore a = -3m, \quad b\eta = 6m, \quad P = -bx, \quad g = by \quad (x, y \in \mathcal{F})$$

すなわち 1) は独立な 56 個の方程式を表わしている。

次に 2) を調べる。

$$\text{このとき 1) により} \quad X = (-bx) \oplus \overline{(by)} \oplus 2m R_1 \oplus L$$

$$(a = -3m, \quad b\eta = 6m) \quad \text{となっていて}$$

$$[(0, \eta, x, y), (-bx)] = (-bT(x, y), 0, -b\eta x, -2bx \chi(x))$$

$$[(0, \eta, x, y), \overline{(by)}] = (0, -bT(y, x), -2by \chi(y), 0)$$

形になってしまう。しかし $(x_L) \cdot y = x \cdot (yL^*)$ なる関係があり
 $x \neq 0, y \neq 0$ ゆえ 一次独立でなくなってしまう。実際 例えは

$$yL^* = \begin{pmatrix} p_1 & z_3 & \bar{z}_2 \\ \bar{z}_3 & p_2 & z_1 \\ z_2 & \bar{z}_1 & p_3 \end{pmatrix} \text{ とおくと } yL^* = 0 \iff p_1 = p_2 = p_3 = 0, z_1 = z_2 = z_3 = 0$$

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \text{ において } \xi_1 \neq 0 \text{ ならば, } xL = 0 \text{ から } 0 = x \cdot (yL^*)$$

$$\text{から } \xi_1 p_1 + \frac{(\bar{z}_2 x_2 + \bar{x}_2 z_2) + (x_3 \bar{z}_3 + \bar{x}_3 x_3)}{2} = 0 \quad (\text{これは}$$

$x \cdot (yL^*)$ の (1-1) 成分) よって $xL = 0, z_2 = z_3 = 0$ から $p_1 = 0$

がでるから $xL = 0, yL^* = 0$ は独立にならない。他も同様。

従って $(y \times y) \cdot y + (x \times x) \cdot x = 0$ でなければならぬ。

しかし このとき 3) $\in P = 0$, 4) $\in Q = 0$ と書くと

$P \cdot y + Q \cdot x = 0$ ($x \neq 0, y \neq 0$) という関係式が成り立ち

今と同様に $P = 0, Q = 0$ は独立でない事が示される。

よって $E_7 \times GL(2)$ は 概均質でない。 $\parallel$ prop 5.

56 次表現図

補足) f_0 の generic な点 a が F_4 の作用で $\begin{pmatrix} a & b & -a-b \end{pmatrix}$ へうつる

事について。(P.37) (これは佐藤幹夫先生による注意)

$F_4 = \mathcal{Q}_0 \oplus \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 \oplus \mathcal{I}_3 \ni X = D_0 \oplus (\alpha)_1' \oplus (\beta)_2' \oplus (\gamma)_3'$ に対し

$$X \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha(\xi_1 - \xi_2)}{4} & \frac{\beta(\xi_1 - \xi_3)}{4} \\ \frac{\bar{\alpha}(\xi_1 - \xi_2)}{4} & 0 & \frac{\alpha(\xi_2 - \xi_3)}{4} \\ \frac{\beta(\xi_1 - \xi_3)}{4} & \frac{\bar{\alpha}(\xi_2 - \xi_3)}{4} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ゆえ}$$

$a, b, -a-b$ が互に異なるならば

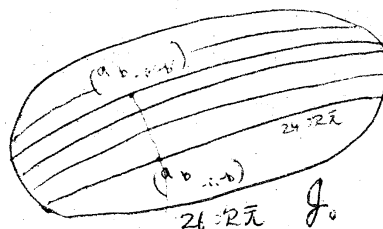
$$\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & -a-b \end{pmatrix} \in \mathcal{J}_0 \text{ における } F_4 \text{ の isotropy subalg. は } \mathcal{D}_0.$$

よって この交の F_4 -orbit の次元 $= 52 - 28 = 24$ である。

$$\text{次に } F_4 \text{ の作用によって } \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & -a-b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a' & & \\ & b' & \\ & & -a'-b' \end{pmatrix} \text{ なる}$$

5 ば $(a', b', -a'-b')$ は $(a, b, -a-b)$ の permutation である事を示す。そうすれば $\mathcal{J}_0$ の generic な交が この標準形にうつる事が証明された事になる。

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 \xi_3 \end{pmatrix} \text{ に対し}$$



$$P(x) = \xi_1 \xi_2 \xi_3 + x_1 \overline{x_2 x_3} + \overline{x_1 (x_2 x_3)} - (\xi_1 (x_1 \bar{x}_1) + \xi_2 (x_2 \bar{x}_2) + \xi_3 (x_3 \bar{x}_3))$$

は $E_6 \times GL(1)$ の rel. inv. ゆえ F_4 でも不変。
29次元表現

$$x = \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & -a-b \end{pmatrix} \text{ に対し } P(x - cI) = (a-c)(b-c)(-a-b-c)$$

$I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ が F_4 で不変な事と $P(x - cI)$ が F_4 で不変な事ある

我々の主張は明らかである。 /

文献

- [1] 佐藤幹夫述：概均質ベクトル空間の理論
新谷卓郎記 (数学の歩み 15-1)

- [2] 分類に関する佐藤生生の(個人的な)ノート
(東大数学教室に原版がある)
- [3] 木村達雄: 概均質ベクトル空間の分類について (I)
[4] " " (II)
- [5] Chevalley and Schaefer: The exceptional Lie alg. F_4 and E_6
Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. v36 (1950) p. 137 ~ p. 141
- [6] Jacobson: Exceptional Lie alg. (Dekker, lecture note)
- [7] Chevalley: Algebraic theory of spinors (Columbia Univ.)
- [8] J. Igusa: Classification of spinors up to dimension twelve
American Journal of Math. vol. 92 (1970) p. 997 ~ 1028
- 尚 概均質ベクトル空間のゼータ関数については
- [9] T. Shintani: On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms. (J. of Math. Soc. of Japan Vol 24 No. 1 1972)
- 概均質ベクトル空間と超幾何関数については
の関係
- [10] 佐藤幹太郎 : 概均質空間の特異軌跡と超幾何関数
青本和彦記
(1971年6月 東大における講義) 原版が東大数学教室にある

データ関数との関係について最近の佐藤先生の研究があり

ますが文献はまだありません。 //