

LSI設計の配線におけるグラフの分割

Partition of Graph into Forest in LSI Layout Design

広島大学 工学部 藤井 隆志 (Takashi FUJII)

若林 真一 (Shin'ichi WAKABAYASHI)

菊野 亨 (Tohru KIKUNO)

1. まえがき

LSIのパターン設計における配線手法の1つである2段階配線法⁽⁴⁾では、通常、全体の配線領域をチャンネルと呼ばれる長方形領域に分割し、チャンネル単位で配線を行う。この手法では、チャンネル同志の結合領域に適用されるスイッチボックスルータへの負担が大きい⁽⁵⁾という困難がある。

筆者らは、文献(6)で、全体の配線領域を木状領域(rectilinear tree-shaped region)に分割することで上述の困難を解消する試みを行っている。

チップ全体の配線領域をチャンネルグラフと呼ばれる無向グラフ G によって表す。このとき、配線領域を木状領域へ分割することは、グラフ G を木に分割することに対応づけることができる。本稿では、上述の配線領域を木状領域へ分割する手法を適用するときの計算複雑さについて議論する。

2. 準備

2.1 チップモデル

ここで考えるチップの構造を図1を例に用いて説明する。同図で、B1～B4はいずれも回路を構成する機能単位であるブロックを表し、任意の寸法を持つ矩形である。その境界線上には他のブロックと接続するための端子が位置している。本稿では端子の対をネットと呼び、ネットの集合が結線要求として与えられるものとする。図1では、同じネットに属する各端子には同じラベルを付けている。

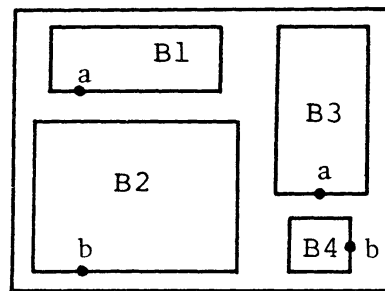


図1 チップの構造

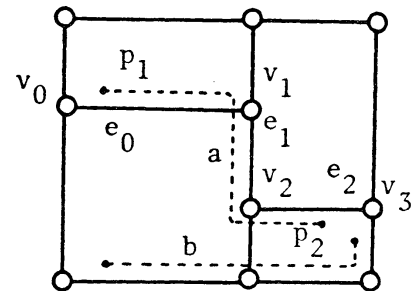


図2 チャネルグラフ

2.2 チャネルグラフ

チップ上でのブロックの相対位置が与えられ、各ネットの配線経路が既に割り当てられていると仮定する。このとき、ブロックの相対位置からチップ全体の配線領域を表すチャネルグラフが構成される⁽³⁾。図1に対応するチャネルグラフを図2に示す。

各ネットに割り当てられた配線経路はチャンネルグラフ上の枝列として表される。今、あるネットの2つの端子 t_{e_a} と t_{e_t} がチャンネルグラフ上の枝 e_a, e_t に対応するチャンネルに面しているとする。枝列 $p = (e_{i_0} (= e_a), e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{k-1}}, e_{i_k} (= e_t))$ を t_{e_a} と t_{e_t} を結ぶネットに対応するパス、あるいは、 e_a と e_t を結ぶパスと呼ぶ。但し、枝 e_{i_j} と $e_{i_{j+1}}$ ($0 \leq j \leq k-1$)は節点 v_{e_j} ($0 \leq j \leq k-1$)で隣接しているものとする。このときパス p は節点 v_{e_j} ($0 \leq j \leq k-1$)を通過するという。通過する節点の個数をパスの長さとして定義し、 $\|p\| (= k)$ で表す。パス p の通過する節点がすべて異なる時、 p を単純パスと呼ぶ。

【例1】 図2において、ネット a に対応するパス p_1 は $p_1 = (e_0, e_1, e_2)$ として表される。このとき、パス p_1 は節点 v_1, v_2 を通過し、 $\|p_1\| = 2$ である。

これまでは、ネットが与えられるとパスが1つ定義できることを述べた。逆に、 e_a と e_t を結ぶ1つのパス p が与えられると、それは一般に複数の(e_a と e_t に対応するチャンネルに面した端子間を結線する)ネットに対応するパスを表すことになる。こうしたネットの数を p の重み $w(p)$ と定める。

3. チャネルグラフの分割

3.1 最小グラフ分割問題

チップ全体の配線領域を木状領域に分割することは、チャネルグラフを木に分割することに対応し、無向グラフに対する最小グラフ分割問題として次の様に定式化される。

＜最小グラフ分割問題 (MC PF)＞ 無向グラフ $G=(V, E)$, G 上の単純パスの集合 $P = \{p_i \mid \|p_i\| \geq 1\}$ と重み $w(p_i)$ が入力として与えられる。このとき、次の条件 (i) ~ (iii) を満足する G の部分グラフの集合 $T = \{T_i = (V_i, E_i) \mid V_i \subseteq V, |V_i| \geq 2, E_i \subseteq E\}$ を求めよ。

(i) 各 T_i は木である。

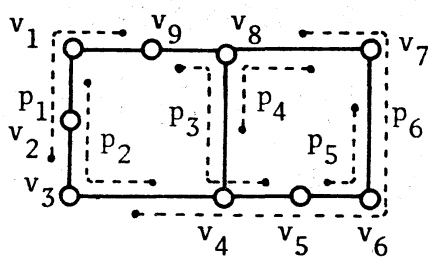
(ii) $E_i \cap E_j = \phi$ ($i \neq j$), 且つ, $\bigcup_{i=1}^{|T|} E_i = E$.

(iii) $P' = \{p = (e_{\alpha_0}, e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_{\|p\|}}) \in P \mid \exists T_i = (V_i, E_i), \exists T_j = (V_j, E_j), i \neq j [e_{\alpha_\ell} \in E_i \wedge e_{\alpha_m} \in E_j (0 \leq \ell < m \leq \|p\|)]\}$ とするとき評価関数 $z = \sum_{p \in P'} w(p)$ の値が最小となる。

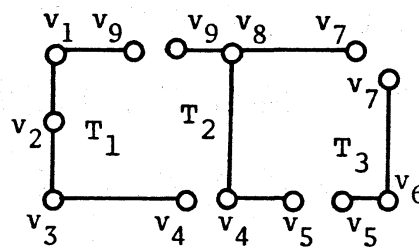
問題 MC PF の条件を満たす $G=(V, E)$ と $T = \{T_i = (V_i, E_i)\}$ に対し、節点の集合 $V^c = \{v \mid v \in V_i \cap V_j (i \neq j)\}$ とし、各節点 $v \in V^c$ で G を切断するという。更に、このとき G 上の v を通過するパス p に対しても、同様に、 v で切断するという。

〔例2〕 問題 MC PF に対する入力として図3(a)に示す $G=(V, E)$ を考える。ここで、 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_6\}$ とし、重

みは $w(p_1)=3$, $w(p_2)=2$, $w(p_3)=4$, $w(p_4)=3$, $w(p_5)=2$, $w(p_6)=2$ とする. このときの解は, G を v_4 , v_5 , v_7 , 及び " v_9 " で切断して求めた部分グラフの集合 $T=\{T_1, T_2, T_3\}$ となる.(図3(b)参照). なお, この切断に対して, $P'=\{p_6\}$, $z=2$ となる.



(a) 入力



(b) 分割

図3 問題MC PFの例

3.2 NP困難性

問題MC PFに対応する判定問題DMC PFに, 既にNP完全性が知られている次のグラフ分割問題PF⁽²⁾を帰着させることにより, 問題MC PFがNP困難であることを示す.

〈グラフ分割問題PF〉 無向グラフ $G=(V, E)$, 正整数 $K (\leq |V|)$ が入力として与えられる. このとき, G の節点の集合 V を $k (\leq K)$ 個の互いに素な部分集合 $V_1, V_2, \dots, V_k$ ($V_i \subseteq V$) に分割できるか. 但し, G 上で各 V_i ($1 \leq i \leq k$) によって誘導される部分グラフ $G_i=(V_i, E_i)$ はサイクルを持たない.

問題 P F の条件を満たす $G=(V, E)$ と $G_i=(V_i, E_i)$ ($1 \leq i \leq k$) に対し, 枝の集合 $E^c = E - \bigcup_{i=1}^k E_i$ とし, 各枝 $e \in E^c$ を G から除去された枝と呼ぶ.

<判定問題 DMC PF> 問題 M C P F への入力である無向グラフ G , 単純パスの集合 P と重み $w(p_i)$ の他に, 正整数 K が入力として与えられる. このとき, 次の条件 (i) ~ (iii) を満足する G の部分グラフの集合 $T = \{T_i = (V_i, E_i) \mid V_i \subseteq V, |V_i| \geq 2, E_i \subseteq E\}$ が存在するか否かを判定せよ.

(i) 各 T_i は木である.

(ii) $E_i \cap E_j = \phi$ ($i \neq j$), 且つ, $\bigcup_{i=1}^{|T|} E_i = E$.

(iii) 問題 M C P F 中で定義した集合 P' に対して, 評価関数 $\Sigma = \sum_{p \in P'} w(p) \leq K$ が成立する.

[補題 1] グラフ $G=(V, E)$ に対し, 次の条件 (i), (ii) を満足するように V を k ($\leq |V|$) 個の部分集合 $V_1, V_2, \dots, V_k$ ($V_i \subseteq V$) に分割する.

(i) 各 V_i によって誘導される G の部分グラフ $G_i=(V_i, E_i)$ は木である.

(ii) $V_i \cap V_j = \phi$ ($i \neq j$), 且つ, $\bigcup_{i=1}^k V_i = V$.

このとき, 関係式 $|\bigcup_{i=1}^k E_i| = |V| - k$ が成立する.

(証明) 各 G_i ($1 \leq i \leq k$) は木であるから, $|E_i| = |V_i| - 1$ である. V_i は V_j ($i \neq j$) と共通の節点を持たないことから,

E_i が E_j と共通の枝を持つことはない。従って、 $|\bigcup_{i=1}^k E_i| = \sum_{i=1}^k (|V_i| - 1) = |V| - k$ となる。

[補題2] 判定問題 DMCPF は NP 完全である。

(証明) 判定問題 DMCPF がクラス NP に属するのは明らかである。

問題 PF を判定問題 DMCPF に帰着させる。

問題 PF に属する任意の問題例: $G = (V, E)$, 正整数 K ($\leq |V|$) が与えられたとする。これを次に示す方法により, 判定問題 DMCPF の問題例: $G_P = (V_P, E_P)$, 単純パスの集合 P , 各パスの重み w , 正整数 K_P に変換する。

(1) G_P : $V_P = V \cup V^*$ とする。ここで, $V^* = \{v_i^* \mid e_i = (v_i, v_j) \in E\}$ である。次に $E_P = \{(v_i, v_i^*), (v_i^*, v_j) \mid e_i = (v_i, v_j) \in E\}$ とする。

(2) P : $P = \{(e_i, e_j) \mid e_i = (v, t), e_j = (t, u), v \neq u, e_i, e_j \in E_P\}$ とする。

(3) w : パス $p = (e_i, e_j) \in P$ (但し, $e_i = (v, t), e_j = (t, u)$ とする) の重み $w(p)$ は,

$$w(p) = \begin{cases} 1 & (t \in V^*) \\ |E_P| & (t \in V) \end{cases}$$

(4) K_P : $K_P = |E| - |V| + K$ とする。

図4に変換例を示す。同図の場合, $P = \{(v_1, v_1^*), (v_1^*, v_2)$

)), $((v_1^*, v_2), (v_2, v_2^*))$, $((v_2, v_2^*), (v_2^*, v_3))$, $((v_2^*, v_3), (v_3, v_3^*))$, $((v_3, v_3^*), (v_3^*, v_1))$, $((v_3^*, v_1), (v_1, v_1^*))$ } となる.

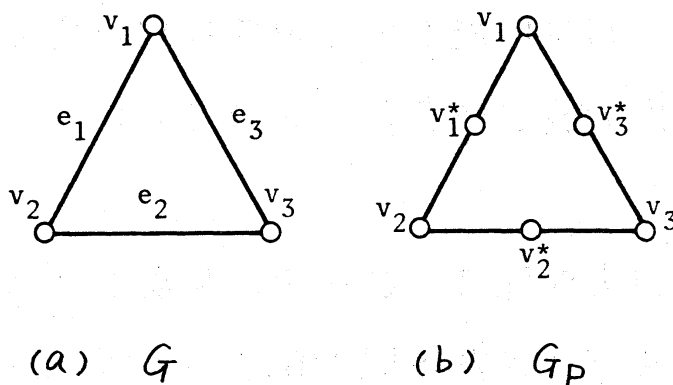


図4 変換例

上述の変換は $|E|$ に関する多項式時間で行える。以下では、問題PFに対する答えが "yes" のとき、又、そのときに限り問題DMCPFに対する答えが "yes" になることを証明する。

先ず、問題PFに対する答えが "yes" であると仮定する。グラフ G の節点の集合 V の分割を $V_1, V_2, \dots, V_k$ とし、各 V_i によって誘導される G の部分グラフを $G_i = (V_i, E_i)$ ($1 \leq i \leq k$) で表す。

今、 G_p 上の節点の集合 V^c ($\subseteq V_p$) を次の様に定める。各節点 $v \in V^*$ に対し、 G_p 上に隣接する2つの枝 $(u, v), (v, u)$ が存在し、且つ、 G 上で $(u, u) \in E - \bigcup_{i=1}^k E_i$ であるとき、且つそのときに限り $v \in V^c$ とする。容易に分かる様に、 $|V^c|$ は V の分割において除去された枝の数に等しい。補題1より

$|V^c| = |E| - |V| + k$ となる.

このとき, V^c に属する各節点で G_P を切断して求まる連結成分を $T_i = (V_{T_i}, E_{T_i})$ ($i = 1, 2, \dots, t$) と定める. 各 T_i が木になることは, G_P の構成法より明らかである. 又, $E_{T_i} \cap E_{T_j} = \emptyset$ ($i \neq j$), 且つ, $\bigcup_{i=1}^t E_{T_i} = E$ も成立する. 更に, T_i の構成方法より, $P' = \{p = (e_i, e_j) \in P, e_i = (v, t), e_j = (t, u) \mid t \in V^c\}$ となる. 従って $|P'| = |V^c|$, 且つ, 任意の $p \in P'$ に対し $w(p) = 1$ が成立する. 従って目的関数 Z の値は $Z = |E| - |V| + k \leq |E| - |V| + K = K_P$ となる. 従って, 判定問題 DMCPF に対する答えも "yes" となる.

次に逆方向について考える. 判定問題 DMCPF に対する答えが "yes" であると仮定し, G_P 上の分割を $T = \{T_1, T_2, \dots, T_t\}$ とする. ここで, 切断した節点の集合を V^c で表すと, 一般に $V \cap V^c \neq \emptyset$ が成立する.

以下では, 先ず V^* に属する節点でだけ切断が行われるように分割 T を変換する.

今, 節点 $v \in V \cap V^c$ に注目する. v を含む T の要素を $T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2}, \dots, T_{\alpha_\ell} \in T$ ($\ell \geq 2$) とする. 各 T_{α_i} 上で, v に隣接する枝の集合を $Q_{\alpha_i} (\subseteq E_{\alpha_i})$ で表す. 今, v で切断されるパスの集合を $P_1 = \{p = (e_i, e_j) \in P \mid e_i = (v, u), e_j = (v, u)\}$ とすれば,

$$\begin{aligned}
 |P_1| &= |Q_{\alpha_1}| \sum_{i=2}^{\ell} |Q_{\alpha_i}| + |Q_{\alpha_2}| \sum_{i=3}^{\ell} |Q_{\alpha_i}| + \cdots + |Q_{\alpha_{\ell-1}}| \cdot |Q_{\alpha_{\ell}}| \\
 &= \sum_{j=1}^{\ell-1} (|Q_{\alpha_j}| \sum_{i=j+1}^{\ell} |Q_{\alpha_i}|).
 \end{aligned}$$

w の構成法より, 各 $p \in P_1$ に対し, $w(p) = |E_p|$ が成立する.

従って, $\sum_{p \in P_1} w(p) = |E_p| \cdot |P_1|$ となる.

そこで, v での切断を, v と隣接するすべての節点 u ($\in V^*$) での切断に置き換える. すなわち, $X_v = \{u \in V^* \mid (v, u) \in \bigcup_{i=1}^{\ell} Q_{\alpha_i}\}$ とするとき, 各節点 $u \in X_v$ で切断を行う. この変換後の分割に対し, $P_2 = \{p = (e_i, e_j) \in P \mid e_i = (v, u), e_j = (u, w)\}$ とすれば, 各パス $p \in P_2$ に対し $w(p) = 1$ が成立する. 従って, $\sum_{p \in P_2} w(p) = \sum_{i=1}^{\ell} |Q_{\alpha_i}| < \sum_{p \in P_1} w(p)$ である. 又, この変換により, 得られる G_p の各部分グラフにサイクルが生じることはない.

よって, 上述の変換を繰り返し適用することにより, 判定問題 DMC PF の条件を満たし, 且つ, V^* に属する節点でだけ切断が行われた分割 $T' = \{T_1, T_2, \dots, T_{t'}\}$ が得られる. このとき, 改めて, 各 T_i を $T_i = (V_i, E_i)$ と表し, 切断した節点の集合を V^c で表すものとする. 但し, $V^c \subseteq V^*$ が成立している. 更に, 上述の各変更において, 目的関数 z の値を増大することはないので, $z \leq K_p$ である. 又, 各節点 $v \in V^c \subseteq V^*$ は次数が 2 であるから, v で行われる切断は高々 1 回である. 従って, $z = |V^c| \leq K_p$ となる.

G 上の枝の集合 E^c を次の様に定める. すなわち, $E^c = \{ (u, v) \in E \mid (u, v), (v, u) \in E_P, \text{ 且つ, } v \in V^c \}$ とする. 定義より, $|E^c| = |V^c|$ である. このとき, G から E^c に属する各枝を除去して得られる G の各連結成分を $G_i = (V_i, E_i)$ ($1 \leq i \leq k$) とする. 各 G_i は木となり, サイクルを持たない. しかも, 連結成分の総数 k に対し, 補題 1 より, $k = |V| - (|E| - |E^c|) = |V| - |E| + |V^c| < |V| - |E| + K_P = K$ が成立する. 又, 各 G_i の構成方法より, $V_i \cap V_j = \emptyset$ ($i \neq j$), 且つ, $\bigcup_{i=1}^k V_i = V$ である. 従って, 問題 PCPF に対する答えも "yes" となる.

[定理 1] 問題 PCPF は NP 困難である.

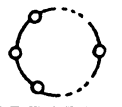
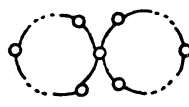
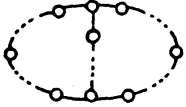
4. 多項式時間で解けるグラフ

問題 PCPF は, 一般のグラフに対して NP 困難であるが, グラフの形状を制限した場合, 多項式時間で解くことができる. これまでに得られている主な結果を表 1 に示す. 同表で, n , p はそれぞれグラフ上の節点の総数, パスの総数を表す. また $|T|$ は解として求まる木の総数を表す.

形状 I のグラフに対するアルゴリズム P-I を図 5 に示す. アルゴリズム中で, V^c は切断が行われる節点の集合を, $\pi(v)$ は v での切断によって切断されるパスの集合を表す. アルゴリズム P-I により, 形状 I のグラフに対する解は $O(pn^2)$

の手数で求まる。

表 1 多項式時間で解けるグラフ

グラフ G の形状			
時間計算量	$O(pn^2)$	$O(pn^4)$	$O(pn^4)$
$ T $	2	2 または 3	2 または 3

```

Algorithm P_I;
begin
   $z \leftarrow \sum_{p \in P} w(p);$ 
   $V^C \leftarrow \phi;$ 
  for  $i=1$  to  $|V|$  do
    for  $j=i+1$  to  $|V|$  do
      begin
         $P' \leftarrow \pi(v_i) \cup \pi(v_j);$ 
         $z' \leftarrow \sum_{p \in P'} w(p);$ 
        if  $z' < z$  then
          begin  $V^C \leftarrow \{v_i, v_j\}; z \leftarrow z'$  end
        end
      end
    end
  end.

```

図 5 アルゴリズム P_I

形状 II のグラフに対しては, $|T|=2$ の場合と $|T|=3$ の場合に分けて考える。各場合の求まる木の形状を図 6 に示す。

$|T|=2$ の場合, 2 つのサイクルを結合している節点 v_s で切断し, 全体で 1 つのサイクルとなるように変換する。引き続き, 図 5 に示したアルゴリズム P_I を適用して解を求め

ることができる。但し, $P-I$ において, z^* を計算する際の P' に v_s での切断によって切断されるパスの集合も入れて考える必要がある。この場合 $O(pn^2)$ の手数で求まる。

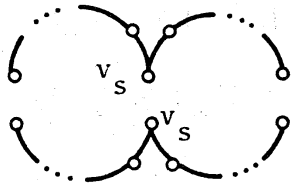
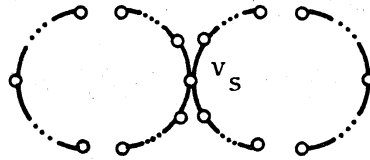
(a) $|T|=2$ (b) $|T|=3$

図6 形状Ⅱのグラフに対する木

$|T|=3$ の場合, 2つのサイクルの中で, それぞれ, 切断が行われる節点を2つずつ求める。すなわち, 切断が行われる4つの節点を求めることになる。この場合, $O(pn^4)$ の手数で求まる。

最後に, $|T|=2$ の場合と $|T|=3$ の場合の z の値を比較し, 最小値を与えるものを解と定める。従って, 形状Ⅱのグラフに対する解は $O(pn^4)$ の手数で求まる。

形状Ⅲのグラフに対してもⅡと同様の操作を行い解を得る。このとき, 解の候補となる木の形状を図7に示す。形状Ⅲに対する解は $O(pn^4)$ の手数で求めることができる⁽¹⁾。

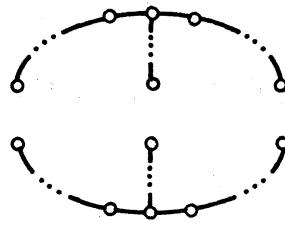
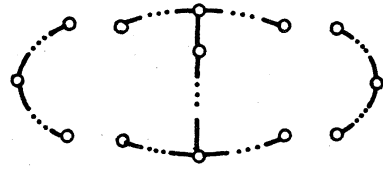
(a) $|T| = 2$ (b) $|T| = 3$

図7 形状Ⅲのグラフに対する木

5. あとがき

本稿では，LSI設計の配線を行うときに必要となる，配線領域を分割する1つの方法に注目し，その計算複雑さについて考察した．先ず，チップ全体の配線領域を木状領域に分割する問題をグラフの分割問題MC PFとして定式化し，これがNP困難であることを示した．次に，グラフの形状を制限した場合，問題MC PFが多項式時間で解けることを述べた．

今後の課題としては，問題MC PFが多項式時間で解けるグラフの形状に関する考察，一般のグラフに対する効率よいヒューリスティック・アルゴリズムの開発などがある．

最後に，日頃御指導いただく本学吉田典可教授に深く感謝いたします．

文 献

- (1) 藤井: "VLSI 設計の配線におけるグラフの分割について," ECS Tech. Rep. No.84-02, Hiroshima Univ. (1984).
- (2) Garey, M.R. and Johnson, D.S.: "Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness," W.H.Freeman and Company, San Francisco (1979).
- (3) 井上, 井戸, 小山, 三木, 石井: "LSI レイアウト設計に於る配線チャンネル構成の一手法," 信学技報, CAS80-107, pp.25-32 (1980).
- (4) Kani, K., Kawanishi, H. and Kishimoto, A.: "ROBIN; a building block LSI routing program," Proc. ISCAS, pp.1-4 (1976).
- (5) Soukup, J.: "Circuit layout," Proc. of the IEEE, 69, 10, pp.1281-1304 (1981).
- (6) 若林, 菊野, 吉田, 藤井: "最小の垂直トラックを用いたチャンネルの配線問題," 信学技報, CAS83-73, pp.13-18 (1983).