

高余次元境界値理論における $\mathcal{E}$ 加群に対する割り算定理

東大数理 D1

杉木 雄一

Abstract

係数が相対マイクロ関数もしくは相対双マイクロ関数の場合の $\mathcal{E}$ 加群に対する割り算定理を代数的な方法で証明する。そして方程式系の超関数解の拡張に応用する。

1 $\mathcal{D}$ 加群に対する割り算定理

この節では $\mathcal{D}$ 加群に対する割り算定理について述べる。次節以降で本題の $\mathcal{E}$ 加群の場合を議論するが、 $\mathcal{D}$ 加群との差異を知る意味や記号の準備を兼ねて、この節は置かれている。

M を n 次元実解析的多様体、 N を余次元 d の部分多様体、 X および Y をそれぞれ M および N の複素化とする。

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f_N} & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

これらはすべて自然な埋め込み写像であり、さらに以下の可換図式が誘導される。

$$\begin{array}{ccccc} T_N^* Y & \xleftarrow{^t f'_N} & T_N^* X & \xlongequal{\quad} & T_N^* X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T^* Y & \xleftarrow{^t f'} & Y \times_X T^* X & \xrightarrow{f_\pi} & T^* X \end{array}$$

X 上の正則関数の層を $\mathcal{O}_X$ 、有限階微分作用素のなす環層を $\mathcal{D}_X$ で表す。また層 $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}$ を

$$\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} := \mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\mathcal{D}_X$$

で定義する。これは $(\mathcal{D}_Y, f^{-1}\mathcal{D}_X)$ 加群の構造をもつ。

そしてマイクロ関数および相対マイクロ関数の層をそれぞれ $\mathcal{C}_N$ および $\mathcal{C}_{N|X}$ で表す。
正確には、

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_N &:= H^{n-d}(\mu_N(\mathcal{O}_Y)) \otimes \mathrm{or}_{N|Y} \\ \mathcal{C}_{N|X} &:= H^n(\mu_N(\mathcal{O}_X)) \otimes \mathrm{or}_{N|X}\end{aligned}$$

である。

$\mathcal{M}$ を接続な $\mathcal{D}_X$ 加群の層とする。さらに f は $\mathcal{M}$ に関して非特性であると仮定しよう。すなわち、

$$T_Y^*X \cap \varpi^{-1}(\mathrm{char}(\mathcal{M})) \subset Y \times_X T_X^*X$$

なる評価が成り立つと仮定する。ここで $\mathrm{char}(\mathcal{M})$ は $\mathcal{M}$ の特性多様体である。 $\mathcal{M}$ の f による逆像を

$$\underline{f}^{-1}\mathcal{M} := \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes_{\underline{f}^{-1}\mathcal{D}_X}^L \mathcal{M}$$

とおく。これは非特性条件により 0 次集中する接続な $\mathcal{D}_Y$ 加群になる。

このとき、柏原-河合 [6] による次の定理が成り立つ。

定理 1.1 ($\mathcal{D}$ 加群に対する割り算定理). 以上の仮定のもとで、

$$R^t f_{N*}' R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{N|X})[d] \rightarrow R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Y}(\underline{f}^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{C}_N)$$

は擬同型である。

この定理は代数的な手段によって非常に見通しよく証明できるので、簡単に紹介しておこう。証明には次の二つの結果がキーとなる。それらは古典的な Cauchy-Kowalevski の定理のシステムへの拡張であり、伝播に関するものと、Cauchy 問題に関するものである。

定理 1.2 (伝播に関する Cauchy-Kowalevski の定理).

$$SS(R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)) = \mathrm{char}(\mathcal{M})$$

定理 1.3 (Cauchy 問題に関する Cauchy-Kowalevski の定理). f が $\mathcal{M}$ に関して非特性ならば、次の自然な射

$$\underline{f}^{-1} R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \rightarrow R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Y}(\underline{f}^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{O}_Y)$$

は擬同型である。

定理 1.2 の証明については柏原-Schapira [9] を、定理 1.3 については柏原 [5] 参照してもらうことにする。この 2 つから割り算定理は次のように証明できる。まず、

$$F := R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$$

とおく。非特性条件と定理 1.2 から

$$T_Y^*X \cap \varpi^{-1}(SS(F)) \subset Y \times_X T_X^*X$$

である。したがって、[9] の Theorem 6.7.1 が適用でき、擬同型

$$R^t f'_{N*}(\mu_N(F)) \xrightarrow{\sim} \mu_N(\omega_{Y|X} \otimes f^{-1}F)$$

を得る。左辺は、

$$\begin{aligned} \mu_N(F) &= \mu_N(R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)) \\ &\simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mu_N(\mathcal{O}_X)) \end{aligned}$$

となり、定理 1.3 から右辺は、

$$\begin{aligned} \mu_N(f^{-1}F) &\xrightarrow{\sim} \mu_N(R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(f^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{O}_Y)) \\ &\simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(f^{-1}\mathcal{M}, \mu_N(\mathcal{O}_Y)) \end{aligned}$$

となる。 $\omega_{Y|X}$ は $2d$ 次に集中することに注意すれば求める結果を得る。

2 擬微分作用素 $\mathcal{E}$ の正則関数 $\mathcal{O}$ への作用

擬微分作用素の環層 $\mathcal{E}$ の場合について考えよう。 $\mathcal{E}$ 加群に対する割り算定理とは、 $\mathcal{M}$ を接続な $\mathcal{E}_X$ 加群とすると、射

$$R^t f'_{N*} R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{N|X})[d] \rightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(f^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{C}_N)$$

が適当な条件のもとで擬同型になるものである。この定理は [6] で議論されている。ここでは量子化接触変換の理論を用いて相対マイクロ関数を正則パラメータつきマイクロ関数に変形するという方法を用いていた。しかし、もっと別のアプローチで $\mathcal{E}$ 加群の割り算定理が証明できないだろうか。つまり、前の節で $\mathcal{D}$ 加群の場合の証明と同じ方法で $\mathcal{E}$ 加群の場合も証明しようとするのは自然である。つまり

$$\mu_N(R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)) \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mu_N(\mathcal{O}_X))$$

のような変形を行い、定理 1.2 や 1.3 のような二つのキーが $\mathcal{E}$ 加群についても考えられればよいわけである。ところが上の式を見てもらえばわかるように、左辺に現れる $R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ のような層複体は普通の意味では定義できない。なぜなら $\mathcal{E}_X$ は $\mathcal{O}_X$ に作用しないからである。この節では、石村 [4] に従ってこれらの正当化を実行する。な

お、本質的な部分はすでに 柏原-Schapira [8] や [10] でも議論されていた。基本的なアイデアは、 $\mathcal{E}_X$ は T^*X 上の層であり、 $\mathcal{O}_X$ の住んでいる空間と異なるので、まず、 $\mathcal{E}_X$ の代用となる環 $E_X(G, D)$ を定義する。そのためにいくつかの言葉を準備する必要がある。

これからの議論は局所的なので、多様体 X, Y, N を、それぞれ $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n-d}, \mathbb{R}^{n-d}$ の開集合としよう。以後、座標不変でない議論を行うため、座標は固定する。

$G \subset \mathbb{C}^n$ を閉凸錐とする。このとき、 X 上の開集合 U が $(U + G) \cap X = U$ を満たすとき、 U は G -open と呼ばれる。 G -open な集合全体は開集合系の公理を満たすので、それによる新しい位相を G -topology と呼ぶ。 X に G -topology を入れたものを X_G で表す。また、 X から X_G への恒等写像を φ_G で表す。 φ_G は定義により連続である。

点 $p \in Y \times_X T^*X$ を固定し、さらに、

$$p_X := f_\pi(p), \quad p_Y := {}^t f'(p)$$

とおく。いま座標は固定されているので、

$$p = (x, \xi) \in Y \times \mathbb{C}^n \simeq Y \times_X T^*X$$

と書ける。 $G \subset \mathbb{C}^n \simeq T_x X$ を

$$G \subset \{\xi\}^{0a} := \{v \in \mathbb{C}^n \simeq T_x X : \langle v, \xi \rangle \leq 0\}$$

を満たす固有閉凸錐とする。 $D \subset X$ を点 x を含む G -round な開集合とする。ただし、 D が G -round な開集合であるとは、 $(D + G) \cap (D + G^a) = D$ を満たす X 内の開集合のことである。

定義 2.1.

$$E_X(G, D) := H_A^n \left(D \times D; \mathcal{O}_{X \times X}^{(0,n)} \right)$$

ただし、 $A := \{(x_1, x_2) \in X \times X : x_2 - x_1 \in G\}$ である。

$E_X(G, D)$ は [8] により、単位元つき環の構造をもつことが証明されている。 $E_X(G, D)$ が $\mathcal{E}_X$ の代わりを果たすという根拠は、環としての同型

$$(\mathcal{E}_X^R)_{p_X} \simeq \varinjlim_{G, D} E_X(G, D) \quad (1)$$

が成り立つからである。

次に $\mathcal{E}_X$ の $\mathcal{O}_X$ への作用を考えるが、今定義した $E_X(G, D)$ は残念ながら $\mathcal{O}_X$ に作用しない。したがって $\mathcal{O}_X$ に関しても代用物を用意しなければならない。

二つの G -open な集合 $\Omega, \Omega_0 \subset X$ をうまく選び、 $S := \Omega \setminus \Omega_0$ において、 $x \in \text{Int } S \in D$ を満たすようにしておく。

定義 2.2. X 上の層複体 $\mathcal{O}_X(G, S)$ を次のように定義する。

$$\mathcal{O}_X(G, S) := \varphi_G^{-1} R\Gamma_S R\varphi_{G*} \mathcal{O}_X$$

[4] の定義とは、シフトが異なることに注意しておく。 $\mathcal{O}_X(G, S)$ は [8] により $E_X(G, D)$ 加群の構造をもち、さらに p_X の近傍 U が存在して、 $\mathbf{D}^b(X; U)$ 上で

$$\mathcal{O}_X(G, S) \rightarrow \mathcal{O}_X \quad (2)$$

は同型になる。以上により $\mathcal{E}_X$ の $\mathcal{O}_X$ への作用を $E_X(G, D)$ の $\mathcal{O}_X(G, S)$ への作用として実現することができた。

最後に、層複体 $R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ を定義しよう。 $\mathcal{M}$ を p_X の近傍で連続な $\mathcal{E}_X$ 加群の層とする。すると $\mathcal{M}$ は p_X の近傍で有限自由分解

$$0 \rightarrow \mathcal{E}_X^{N_r} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{E}_X^{N_1} \rightarrow \mathcal{E}_X^{N_0} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$$

をもつ。式 (1) により、 G や D を必要に応じて取り直すことによって、複体

$$0 \rightarrow E_X(G, D)^{N_r} \rightarrow \cdots \rightarrow E_X(G, D)^{N_1} \rightarrow E_X(G, D)^{N_0} \rightarrow 0 \quad (3)$$

が誘導される。この複体を $M(G, D)$ で表す。

定義 2.3. 層複体

$$R\mathcal{H}om_{E_X(G, D)}(M(G, D), \mathcal{O}_X(G, S))$$

を $\mathbf{D}^b(X; p_X)$ で考えた対象を

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_{p_X}$$

と書く。

この定義が well-defined、つまり G, D, S の取り方および $\mathcal{M}$ の自由分解の選び方にはよらないことは [4] で証明されている。 $R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_{p_X}$ の性質を列挙しておく。

(a) $R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_{p_X}$ は $\mathcal{M}$ に関して functorial である。

(b) 完全列 $0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$ から、 $\mathbf{D}^b(X; p_X)$ 上の三角図式

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}', \mathcal{O}_X)_{p_X} \rightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_{p_X} \rightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}'', \mathcal{O}_X)_{p_X} \rightarrow +1$$

が作れる。

(c) $p_X \in T_N^*X$ 上の同型射

$$\mu_N(R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_{p_X})_{p_X} \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mu_N(\mathcal{O}_X))_{p_X}$$

が存在する。

(a) と (b) の証明は [4] に書かれているので、残りの (c) を示そう。 $M(G, D)$ の定義 (3) と式 (2) により、

$$\begin{aligned} & \mu_N(R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_{p_X})_{p_X} \\ &= \mu_N(R\mathcal{H}om_{E_X(G, D)}(M(G, D), \mathcal{O}_X(G, S)))_{p_X} \\ &\simeq R\mathcal{H}om_{E_X(G, D)}(M(G, D), \mu_N(\mathcal{O}_X(G, S)))_{p_X} \\ &\xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mu_N(\mathcal{O}_X))_{p_X} \end{aligned}$$

となり、証明が完成する。

3 $\mathcal{E}$ 加群に対する Cauchy-Kowalevski の定理

この節では、引続き [4] に従って $\mathcal{E}$ 加群に対する Cauchy-Kowalevski の定理を定式化する。また、それを用いて係数が相対マイクロ関数の場合の $\mathcal{E}$ 加群に対する割り算定理の別証明を与える。

まず、定理 1.2 の $\mathcal{E}$ 加群バージョンについて述べる。

定理 3.1. p_X の近傍 U で接続な $\mathcal{E}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ に対し

$$SS(R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_{p_X}) \cap U \subset \text{supp}(\mathcal{M}) \cap U$$

が成立する。

この定理は [10] の Theorem 10.4.2 で述べられている。非常に重要な定理なので、簡単に証明を紹介しておく。 ψ を X 上の実数値 C^1 級の関数で $\psi(x) = 0, d\psi(x) = \xi$ となるものを取り、 $B := \{\psi \geq 0\}$ とおけば

$$R\Gamma_B(\mathcal{O}_X)_x \simeq R\Gamma_B(\varphi_G^{-1}R\Gamma_S R\varphi_{G*}\mathcal{O}_X)_x = R\Gamma_B(\mathcal{O}_X(G, S))_x$$

が成立し、したがって左辺は $(\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}})_{p_X}$ 加群の構造をもつことがわかる。すると

$$\begin{aligned} & R\Gamma_B(R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_{p_X})_x \\ &= R\Gamma_B(R\mathcal{H}om_{E_X(G, D)}(M(G, D), \mathcal{O}_X(G, S)))_x \\ &\simeq R\mathcal{H}om_{(\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}})_{p_X}}((\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}})_{p_X} \otimes_{E_X(G, D)} M(G, D), R\Gamma_B(\mathcal{O}_X))_x \end{aligned}$$

と変形できるので、この事実から SS の評価がいえる。

次は、定理 1.3 の $\mathcal{E}$ 加群に相当するものを述べるが、そのためにはいくつかの準備を必要とする。まず、 $\mathbf{D}^b(X; p_X)$ の部分圏 $\mathbf{D}_f^b(X; p_X)$ を

$$\mathbf{D}_f^b(X; p_X) := \{F \in \mathbf{D}^b(X; p_X) : p_X \text{ のある近傍 } U \text{ で } {}^t f'^{-1}(p_Y) \cap f_\pi^{-1}(SS(F) \cap U) \subset \{p\}\}$$

で定める。このとき [9] の Proposition 6.1.9 によって microlocal inverse image

$$f_p^{-1} : \mathbf{D}_f^b(X; p_X) \rightarrow \mathbf{D}^b(Y; p_Y)$$

が次のように定義される。 $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_f^b(X; p_X))$ に対して、refind microlocal cut-off を行うことができる。すなわち $\mathbf{D}^b(X; p_X)$ 上の擬同型 $F' \rightarrow F$ で

$${}^t f'^{-1}(p_Y) \cap f_\pi^{-1}(SS(F')) \subset \{p\} \quad (4)$$

を満たすものをとることができる。そして、 $f_p^{-1}F := f^{-1}F'$ とおくものである。

もう一つ接続層に関する議論が必要である。 $\mathcal{M}$ を p_X の近傍で定義された接続な $\mathcal{E}_X$ 加群とする。そして f は $\mathcal{M}$ に関して点 p で非特性と仮定する。つまり p のある近傍 U で

$${}^t f'^{-1}(p_Y) \cap f_\pi^{-1}(\text{supp}(\mathcal{M}) \cap U) \subset \{p\} \quad (5)$$

を満たすとする。このとき、 $\mathcal{M}$ の f による逆像を

$$\underline{f}_p^{-1}\mathcal{M} := R^t f'_*(\mathcal{E}_{Y \rightarrow X} \otimes_{\underline{f}_\pi^{-1}\mathcal{E}_X} f_\pi^{-1}\mathcal{M}|_U)$$

で定義する。非特性条件から [11] により $\underline{f}_p^{-1}\mathcal{M}$ は 0 次に集中する p_Y のある近傍で接続な $\mathcal{E}_Y$ 加群である。以上で準備は整った。

定理 3.2. 上の仮定のもとで、 $\mathbf{D}^b(Y; p_Y)$ 上の擬同型

$$f_p^{-1}(R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_{p_X}) \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\underline{f}_p^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{O}_Y)_{p_Y} \quad (6)$$

が存在する。

この定理は [4] による結果であるが、定理 3.1 と同じく証明を簡単に紹介しておく。まず、 $\mathcal{M}$ の非特性条件 (5) と定理 3.1 により $R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_{p_X}$ は $\mathbf{D}_f^b(X; p_X)$ の対象であることに注意する。方針はまず、(6) の左辺を計算するわけであるが refind microlocal cut-off を使っているので細かい注意が必要である。この点については 杉木-竹内 [13] に書かれている。

ここでは簡単のため $\mathcal{M}$ は単独の形 $\mathcal{E}_X/\mathcal{E}_X P$ として説明する。 $\mathcal{O}_X(G, D)$ は G, D を取り直して 1 次に集中するようにできることが分かっている。すると、式 (6) の左辺は

$$0 \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X(G, D)) \xrightarrow{P} H^1(\mathcal{O}_X(G, D)) \rightarrow 0$$

の形の複体に擬同型になることが証明できる。ここで Bony-Schapira [2] の結果を用いれば

$$\ker P \simeq H^1(\mathcal{O}_Y(\tilde{G}, \tilde{S}))$$

となり $\operatorname{coker} P$ のほうは 0 になる。以上から式 (6) の右辺とも擬同型になることが示される。

最後に、これらの応用として係数が相対マイクロ関数の場合の $\mathcal{E}$ 加群に対する割り算定理を [6] とは異なる代数的な方法による別証明を与えよう。

定理 3.3. $\mathcal{M}$ を p_X の近傍で接続な $\mathcal{E}_X$ 加群とし、 f は $\mathcal{M}$ に対して点 p で非特性とする。このとき、擬同型

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{N|X})[d]_{p_X} \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(f_p^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{C}_N)_{p_Y}$$

が成り立つ。

証明であるが、まず

$$F := R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_{p_X}$$

とおく。非特性条件 (5) を課しているから、定理 3.2 と同様にして F は $\mathbf{D}_f^b(X; p_x)$ の対象になる。そして、 F の refind microlocal cut-off を行い、 $F' \rightarrow F$ とおけば、式 (4) の評価が成立する。したがって [9] の Theorem 6.7.1 を適用して

$$R^t f'_{N*}(\mu_N(F')) \rightrightarrows \mu_N(\omega_{Y|X} \otimes f^{-1}F')$$

なる擬同型を得る。 $\operatorname{supp}(\mu_N(F')) \subset SS(F')$ に注意すれば、左辺の方は、

$$\begin{aligned} (R^t f'_{N*} \mu_N(F'))_{p_Y} &\simeq R\Gamma_c({}^t f'^{-1}_{N*}(p_Y); \mu_N(F')) \\ &\simeq \mu_N(F')_{p_X} \\ &\simeq \mu_N(F)_{p_X} \\ &\simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mu_N(\mathcal{O}_X))_{p_X} \end{aligned}$$

となる。右辺の方は定理 3.2 より

$$\begin{aligned} \mu_N(f^{-1}F')_{p_Y} &= \mu(f_p^{-1}F)_{p_Y} \\ &\simeq \mu_N(R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(f_p^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{O}_Y)_{p_Y})_{p_Y} \\ &\simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(f_p^{-1}\mathcal{M}, \mu_N(\mathcal{O}_Y))_{p_Y} \end{aligned}$$

となる。以上で証明が完成する。

4 $\mathcal{E}$ 加群に対する割り算定理

双マイクロ関数¹の理論は 片岡-戸瀬 [7] により始まり、schapira-竹内 [12] によって代数的に構成された。この節では、係数が相対双マイクロ関数の場合の $\mathcal{E}$ 加群に対する割り算定理を述べる。その他、係数が相対マイクロ関数以外の場合の割り算定理として、係数が第2マイクロ関数で余次元が1の場合の戸瀬 [18] などがある。双マイクロ関数の場合、[6] のように量子化接触変換の理論が使えない。前節で紹介した $\mathcal{E}$ 加群に対する Cauchy-Kowalevski の定理を使って証明する。

まず、双マイクロ関数の定義を述べる。 M'' を 実多様体、 X'' をその複素化とし、次の可換図式を満たすとする。

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{f_N} & M & \xrightarrow{g_M} & M'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{g} & X'' \end{array}$$

f_N, f は埋め込み、 g_M, g はサブマーシオンとする。さらに、 $h_N := g_M \circ f_N, h := g \circ f$ とおき、これらもすべてサブマーシオンであると仮定しよう。 $L := g^{-1}(M''), H := h^{-1}(M'')$ とおけば、多様体の埋め込み列

$$N \subset L \subset X, N \subset H \subset Y$$

ができる。さらに次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccc} T_N^* H \times_H T_H^* Y & \xleftarrow{f_{NL}^*} & T_N^* L \times_L T_L^* X & \xlongequal{\quad} & T_N^* L \times_L T_L^* X \\ \downarrow \pi_H & & \downarrow \pi_L & & \downarrow \\ N \times_H T_H^* Y & \xleftarrow{\quad} & N \times_L T_L^* X & \xlongequal{\quad} & N \times_L T_L^* X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T^* Y & \xleftarrow{f^*} & Y \times_X T^* X & \xrightarrow{f_\pi} & T^* X \end{array}$$

定義 4.1. 双マイクロ関数の層 $\mathcal{C}_{NH}$ および相対双マイクロ関数 $\mathcal{C}_{NL}$ の層を

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{NH} &:= H^{n-d}(\mu_{NH}(\mathcal{O}_Y)) \otimes \text{or}_N \\ \mathcal{C}_{NL} &:= H^n(\mu_{NL}(\mathcal{O}_X)) \otimes \text{or}_N \end{aligned}$$

で定義する。

bimicrolocalization functor $\mu_{NH}(\ast)$ 等の構成についての説明は省略する。詳細は例えば 竹内 [14] を参照してもらうことにする。

¹小さい第2マイクロ関数のことである。bimicrofunction と呼ばれる。

次に、Bony [1] によるマイクロ非特性の定義を述べる。 g はサブマーションであるから、相対余接バンドル $T^*(X/X'')$ が次の完全列で定義できる。

$$0 \rightarrow V := X \times_{X''} T^*X'' \rightarrow T^*X \rightarrow T^*(X/X'') \rightarrow 0$$

さらに Hamilton 同型を用いて、次の埋め込みや同一視

$$T_Y^*X \times_X V \rightarrow T^*(X/X'') \times_X V \simeq T_V(T^*X) \quad (7)$$

および射影 $\pi_Y: T_Y^*X \rightarrow V$ を得る。

定義 4.2. $p \in V$ とする。 p_X の近傍で接続な $\mathcal{E}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ が、 Y に対して V に沿って点 p でマイクロ非特性であるとは、

$$\pi_Y^{-1}(p) \cap C_V(\text{supp}(\mathcal{M})) = \emptyset$$

が成り立つときをいう。ただし、図式 (7) による自然な同一視を行う。

以上の準備をもとに、係数が相対双マイクロ関数の場合の $\mathcal{E}$ 加群に対する割り算定理を述べる。 $p \in N \times_L T_L^*X$ とする。 $N \times_L T_L^*X$ と $Y \times_{X''} V$ を共に $Y \times_X T^*X$ の部分集合と見なせば、特に $N \times_L T_L^*X \subset Y \times_{X''} V$ なる関係を満たしていることがわかる。したがって、 $p_X \in V$, $p_Y \in N \times_H T_H^*Y$ である。

定理 4.3. $\mathcal{M}$ を p_X の近傍で定義された接続な $\mathcal{E}_X$ 加群の層とし、 $\mathcal{M}$ が Y に対して V に沿って点 p でマイクロ非特性であると仮定する。このとき、 $\pi_H^{-1}(p_Y)$ 上の擬同型

$$R^t f'_{NL!} R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, C_{NL})[d] \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(f_p^{-1} \mathcal{M}, C_{NH})$$

が成り立つ。

この定理の証明は、定理 3.3 の証明と同じように $\mathcal{E}$ 加群に対する Cauchy-Kowalevski の定理を用いるが、さらに bimicrolocalization functor に関するいくつかの公式も必要とするので、それらを紹介しておく。

次の命題は船越 [3] と竹内-小清水 [17] による結果である。

命題 4.4. $F \in D^b(X)$ とする。このとき、次の評価が成り立つ。

$$\text{supp}(\mu_{ML}(F)) \subset T_{(M \times_L T_L^*X)}^*(T_L^*X) \cap C_{T_L^*X}(SS(F))$$

ただし、次の自然な同一視や埋め込みを行う。

$$T_M^*L \times_L T_L^*X \simeq T_{(M \times_L T_L^*X)}^*(T_L^*X) \subset T^*(T_L^*X) \simeq T_{(T_L^*X)}(T^*X)$$

もう一つ竹内 [16] による結果を述べる。これは [9] の Theorem 6.7.1 の双マイクロバージョンと呼べるものである。

命題 4.5. X 上の層複体 F が次の条件を満たすと仮定する。

p_X を含む V 内の開集合 W_0 および、 $\{x\} \times_X T_L^*X$ を含む T^*X 内の開錐 W_1 が存在して、 $(W_0 + W_1) \cap SS(F) = \emptyset$

このとき、

$$R^t f'_{NL!} \mu_{NL}(F) \rightarrow \mu_{NH}(\omega_{Y|X} \otimes f^{-1}F)$$

は $\pi_H^{-1}(p_Y)$ 上の擬同型である。

定理 4.3 の証明を簡単に述べる。

$$F := R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_{p_X}$$

とおく。マイクロ非特性の条件から、 p_X を含む V 内の開集合 W_0 および、 $\{x\} \times_X T_L^*X$ を含む T^*X 内の開錐 W_1 が存在して、 $(W_0 + W_1) \cap \text{supp}(\mathcal{M}) = \emptyset$ となる。 F の refine microlocal cut-off $F' \rightarrow F$ ををとると、命題 4.4 と 命題 4.5 が適用できて $\pi_H^{-1}(p_Y)$ 上の擬同型

$$R^t f'_{NL!} \mu_{NL}(F') \xrightarrow{\sim} \mu_{NH}(\omega_{Y|X} \otimes f^{-1}F')$$

を得る。この両辺は定理 3.1 と定理 3.2 を適用して計算すれば求める結果を得るが、そのときに次の公式を用いることに注意しておく。

命題 4.6. $\pi_L^{-1}(p_X)$ 上の同型射

$$\mu_{NL}(R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_{p_X}) \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mu_{NL}(\mathcal{O}_X))$$

が存在する。

この公式の証明は命題 4.4 を用いれば、次のようにして示される。

$$\begin{aligned} & \mu_{NL}(R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_{p_X}) \\ &= \mu_{NL}(R\mathcal{H}om_{E_X(G,D)}(M(G,D), \mathcal{O}_X(G,S))) \\ &\simeq R\mathcal{H}om_{E_X(G,D)}(M(G,D), \mu_{NL}(\mathcal{O}_X(G,S))) \\ &\xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mu_{NL}(\mathcal{O}_X)) \end{aligned}$$

以上で証明が完成する。

5 応用

前節の割り算定理 4.3 を利用して、方程式系の超関数解の拡張に応用する。 $\mathcal{M}$ を X 上で接続な $\mathcal{D}_X$ 加群とする。 $\mathcal{M}$ に十分条件を課すことによって、次のコホモロジーの消滅を示す。

$$H^j(\mu_N R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M)) \simeq 0 \quad \text{ただし } j < d \quad (8)$$

特にこのタイプのコホモロジーの消滅から超関数に関する局所 Bochner タイプの拡張定理が証明できることはよく知られている。その他、解が実解析的な場合として、内田 [19] などがある。

式 (8) のコホモロジーの消滅として知られている結果を一つあげておく。次は [16] によるものである。

定理 5.1. $\mathcal{M}$ が次の条件を満たすとする。

- (i) f は $\mathcal{M}$ に関して非特性である。
- (ii) $\mathcal{M}$ は $N \times_L \dot{T}_L^* X$ で V に沿って部分楕円型
- (iii) $T_M^* X \cap \text{char}(\mathcal{M}) \subset T_L^* X$
- (iv) $\mathcal{M}$ は $N \times_L \dot{T}_L^* X$ で V に沿って Y に対してマイクロ非特性

このとき、式 (8) が成り立つ。

部分楕円型の定義はあとで述べる。この節では、この定理を精密化を行う。特に、非特性条件を取り除いてもよいことを示す。

まず、竹内 [15] による層 $\mathcal{C}_{NM}$ とそれに関する三角図式を紹介しておく。

定義 5.2. $T_N^* M \times_M T_M^* X$ 上の層 $\mathcal{C}_{NM}$ を次のように定義する。

$$\mathcal{C}_{NM} := H^n(\mu_{NM}(\mathcal{O}_X)) \otimes \text{or}_N$$

命題 5.3. 次のような $T_N^* M$ 上の三角図式が存在する。

$$R\theta_! R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{N|X}) \rightarrow \mu_N R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M) \rightarrow R\dot{\pi}_{M*} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{NM}) \rightarrow +1$$

ただし、 $\theta: T_N^* X \rightarrow T_N^* M$ 、 $\dot{\pi}_M: T_N^* M \times_M T_M^* X \rightarrow T_N^* M$ である。

これにより、真ん中のコホモロジーの消滅を両側に分解して示すことができる。

次に [2] による部分楕円型の定義を述べる。相対余接バンドル $T^*(M/M'')$ が次の完全列で定義できる。

$$0 \rightarrow \Lambda := M \times_{M''} T_{M''}^* X'' \rightarrow T_M^* X \rightarrow T^*(M/M'') \rightarrow 0$$

$\Lambda \simeq M \times_L T_L^* X$ および $V = X \times_{X''} T^* X'' \subset T^* X$ に注意しておこう。そして、次の埋め込み写像

$$T^*(M/M'') \times_M \Lambda \rightarrow T^*(X/X'') \times_X V \simeq T_V(T^* X)$$

と射影 $\pi_\Lambda: T^*(M/M'') \times_M \Lambda \rightarrow \Lambda$ を得る。

定義 5.4. 点 $q \in \Lambda$ とする。接続な $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ が V に沿って点 q で部分楕円型であるとは、

$$\pi_\Lambda^{-1}(q) \cap C_V(\text{char } \mathcal{M}) = \emptyset$$

が成り立つときをいう。

さらに、次の自然な写像

$$T_N^* L \times_L T_L^* X \xrightarrow{\rho_0} T_N^* M \times_L T_L^* X \xrightarrow{\iota} T_N^* M \times_M T_M^* X$$

を考える。このとき [1] による次の結果がある。

命題 5.5. $p \in T_N^* M \times_L T_L^* M$ とし、 p の Λ への射影像を q とする。また、接続な $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ が V に沿って点 q で部分楕円型であると仮定する。このとき、

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{NM}) \rightarrow R\iota_* R\rho_{0*} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{NL})$$

は p 上で擬同型である。

これまでの結果を組み合わせて次を得る。

定理 5.6. $\mathcal{M}$ が次の条件を満たすとする。

- (i) $\mathcal{M}$ は $N \times_L T_L^* X$ で V に沿って部分楕円型
- (ii) $T_M^* X \cap \text{char}(\mathcal{M}) \subset T_L^* X$
- (iii) $\mathcal{M}$ は $N \times_L T_L^* X$ で V に沿って Y に対してマイクロ非特性

このとき、式 (8) が成り立つ。

証明は命題 5.3 の三角図式を考え、定理 3.3 定理 4.3 命題 5.5 を適用すればよい。

定理 5.6 が主結果ではあるが、過去の結果を組み合わせてより一般的な命題も得られる。次はその一例である。

定義 5.7. 接続な $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ が楕円型であるとは、

$$T_M^* X \cap \text{char}(\mathcal{M}) = \emptyset$$

が成り立つときをいう。

射影 $T_M^*X \rightarrow M$ から得られる埋め込み写像

$$T_M^*X \times_M T^*M \xrightarrow{\kappa} T^*(T_M^*X) \simeq T_{(T_M^*X)}(T^*X)$$

を考える。

定義 5.8. $p \in T^*M$ とする。接続な $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ が p 方向に双曲型であるとは、

$$\kappa(T_M^*X \times_M \{p\}) \cap C_{(T_M^*X)}(\text{char}(\mathcal{M})) = \emptyset$$

が成り立つときをいう。

定理 5.9. $\mathcal{M}$ を接続な $\mathcal{D}_X$ 加群の層、 $p \in T_N^*M$ とする。特性多様体 $\text{char}(\mathcal{M})$ を次のように既約分解しておく。

$$\text{char}(\mathcal{M}) = \bigcup_{j=1}^r V_j$$

そして、各 V_j が次の三つの条件のいずれか一つを必ず満たしているとする。

- (a) V_j は定理 5.6 の条件を満たす。
- (b) V_j は p 方向に双曲型かつ $V_j \cap N \times_L T_L^*X \subset T_X^*X$
- (c) f は $\mathcal{M}$ に関して非特性かつ $\mathcal{M}$ は楕円型

このとき、式 (8) が成り立つ。

この定理の条件 (b) は [8] による結果であり、条件 (c) は [6] によるものである。

References

- [1] J.M.Bony, Extensions du théorème de Holmgren, Sémin. Goulaouic-Schwartz, 1975-76, exp. 17.
- [2] J.M.Bony and P.Schapira, Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 26, 1976, p. 81-140.
- [3] S.Funakoshi, Master thesis presented to the University of Tokyo, 1995.
- [4] R.Ishimura, The Cauchy-Kowalevski theorem for $\mathcal{E}$ -modules, J. Math. Pures Appl., 77, 1998, p. 647-654.
- [5] M.Kashiwara, Master thesis, university of Tokyo, 1970

- [6] M.Kashiwara and T.Kawai, On the boundary value problem for elliptic systems of linear partial differential equations I-II, Proc. Japan. Acad., 48, 1971, p.712-715; ibid., 49, 1972, p. 164-168; Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ., 10, 1975, p. 563-579
- [7] K.Kataoka and N.Tose, Some remarks in 2nd microlocalization (in Japanese), R.I.M.S. Kôkyu-roku, Kyoto Univ., 660, 1988, p. 52-63.
- [8] M.Kashiwara and P.Schapira, Micro-hyperbolic systems, Acta Math., 142, 1979, p. 1-55.
- [9] M.Kashiwara and P.Schapira, Sheaves on Manifolds, Grund.der Math., Springer, 269, 1985.
- [10] M.Kashiwara and P.Schapira, Micro-local Study of Sheaves, Astérisque, 128, 1990.
- [11] M.Sato, T.Kawai and M.Kashiwara, Microfunctions and pseudo-differential equations, Lect. Notes Math., Springer, 287, 1973, p. 264-529.
- [12] P.Schapira and K.Takeuchi, Déformation binormale et bispécialisation, C.R. Acad. sci. Sér. I, 319, 1994, p. 707-712.
- [13] Y.Sugiki, K.Takeuchi, Notes on the Cauchy-Kowalevski Theorem for $\mathcal{E}$ -module, U.T.M.S. 99-34.
- [14] K.Takeuchi, Binormal Deformation and Bimicrolocalization, Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ., 32, 1996, p. 277-322.
- [15] K.Takeuchi, Edge-of-the-wedge type theorems for hyperfunction solutions, Duke Math. J., 89, 1997, p. 109-132.
- [16] K.Takeuchi, Microlocal Inverse Image and Bimicrolocalization, Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ., 32, 1998, p. 135-153.
- [17] K.Takeuchi and H.Koshimizu, A method of desingularization for the study of operators with multiple characteristics, submitting.
- [18] N.Tose, Theory of partially elliptic systems and its applications, Master's thesis, University of Tokyo, 1985.
- [19] M.Uchida, Continuation of analytic solutions of linear differential equations up to convex conical singularities, Bull. Soc. Math. France, 12, 1993, 133-152.