

曲線渦の運動

東大宇宙研 神部 勉

§ 1. 序

直線渦 (rectilinear vortex), 円渦 (circular vortex),
らせん渦 (helical vortex) の運動はすでによく知られてい
るが, 前記の橋本が扱ったと同じ方程式を別の角度から使っ
て, それらの変形と運動をみこみよう.

§ 2. 基礎方程式

縮まない非粘性の無限流体中に, 十分細い曲線渦があった
ときに, それが自分自身に誘導する速度 v は線上の各点で近
似的に次式で与えられる^{1, 2)}:

$$v = \frac{1}{R} b \quad (1)$$

ここで R は曲線渦の局所曲率半径で, b はその点での曲線に
対する陪法線であり, 適当な規格化によって, $R=1$ のとき
 $|v|=1$ となるように定数を選んである.

渦線に沿って, 線上の定点からの距離を s , 時間を t とし

て、線上の点を位置ベクトル $X(t, s)$ で表わすとする、

(1) 式は

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial s} \times \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} \quad (2)$$

と書きかえられる、ここでは線渦の運動を空間曲線の運動として扱う。

方程式 (2) に支配される運動においては、渦線の実質線分の長さは不変である。実際、ある時刻 t において ds だけ離れた二点 A, B を $S (= \frac{\partial X}{\partial s} ds)$ とする。この線分の両端の二点 A, B は δt 時間後にはそれぞれ A', B' に移る (図 1) :

$$A' : X + \frac{\partial X}{\partial t} \delta t,$$

$$B' : X + \frac{\partial X}{\partial s} ds + \frac{\partial X}{\partial t} (t, s+ds) \delta t.$$

従って、 $t + \delta t$ における線分は

$$S + \delta S = \left(\frac{\partial X}{\partial s} + \frac{\partial^2 X}{\partial t \partial s} \delta t \right) ds$$

で与えられる。(2) 式より

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t \partial s} = \frac{\partial X}{\partial s} \times \frac{\partial^3 X}{\partial s^3}$$

であるから、 $S \cdot \delta S = 0$ である。

得る。長さの変化は $2S \cdot \delta S$

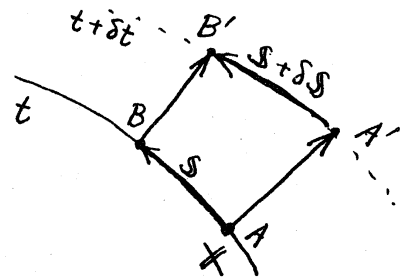


図 1

で与えられるから、実質線分の長さは不変であり、 σ はラグランジュ座標とみなすことができる。

§3. 渦の変形に対する摂動展開

(2) 式を満たすような曲線渦の運動 $X_0(t, \sigma)$ が知られたとき、 X_0 からわずかにずれた渦の運動は、 X_0 の安定性があるいは新しい渦の運動を知るうえで興味がある。いま $\varepsilon \ll 1$ に比べて小さい量とし、 X_0 からのずれが ε 程度であるとして、渦の形 $X(t, \sigma)$ も ε について展開しよう、

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i X_i(t, \sigma). \quad (3)$$

座標 σ の代りに別のパラメータ σ を使うと便利なおことがある。このとき (2) 式は

$$\ddot{X} = \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^3 X' \times X'', \quad (4)$$

ただし $(\dot{}) = \frac{\partial}{\partial t}$, $(') = \frac{\partial}{\partial \sigma}$ である。また関係式

$$d\sigma = |dX| = \left|\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right| d\sigma$$

より

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^3 = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i p_i \quad (5)$$

とおける。(3) と (5) 式を (4) 式に代入すると、 ε の同じべ

キの項より次の方程式を得る：

$$\varepsilon^0 \quad \dot{X}_0 = p_0 X'_0 \times X''_0 \quad (6)$$

$$\varepsilon^1 \quad L(X_1) = 0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \quad L(X_2) = & p_0 X'_1 \times X''_1 + p_1 (X'_0 \times X''_1 + X'_1 \times X''_0) \\ & + (p_2 - p_1(X_2)) X'_0 \times X''_0 \\ \vdots \quad & \vdots \end{aligned} \quad (8)$$

$$\therefore L(y) = \dot{y} - p_0 (X'_0 \times y'' + y' \times X''_0) - p_1(y) X'_0 \times X''_0, \quad (9)$$

$$p_0 = |X'_0|^3, \quad \dots \quad (10)$$

以下の3種の渦運動がよく知られているが、それらは(6)式(あるいは(2)式)を満たしている。

$$(1) \text{ 直線渦 } X_0 = (0, 0, z) \quad (11)$$

これは2次元の非圧縮、非粘性流体の理論がよく知られていて、静止している。

$$(2) \text{ 円渦 } X_0 = (\cos \theta, \sin \theta, t) \quad (12)$$

$0 \leq \theta < 2\pi$, パラメータ σ とし2角度 θ をとっている。これはいわゆる vortex ring の1の速度を z 方向に前進する。

$$(3) \text{らせん渦 } X_0 = (\cos(\theta + \omega_0 t), \sin(\theta + \omega_0 t), \alpha\theta + \frac{t}{(1+\alpha^2)^{3/2}}) \quad (13)$$

$\omega_0 = \alpha/(1+\alpha^2)^{3/2}$, $-\infty < \theta < \infty$, α は定数。ここでも σ とし2角度パラメータ θ をとっている。この渦は軸方向に前進しながらそのまわりに回転する。 $\alpha = 0$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とすれば,

(3) は (2) になる. X_0 は: z は直角座標 x, y, z の成分で与えられる.

§ 4. 直線渦の変形

1 次の微小変形をみるには, (11) と (9) から (7) が与えられる, $X_1 \propto e^{i(kz + \omega t)}$ と仮定すると,

$$\omega = \pm k^2, \quad X_1^\pm = (\cos p^\pm, \mp \sin p^\pm, 0)$$

を得る, ³⁾ z は $p^\pm = kz \pm k^2 t$. このような分散性の波の解が存在するが, 渦は中立安定であることがわかる. さらに高次の変形をみるために

$$X_1 = A X_1^+ + B X_1^- \quad (14)$$

とおき, (8) に代入すると

$$X_2 = (0, 0, (B^2 - A^2)t) \quad (15)$$

を得る. これは (11) と (14) で与えられる微小ならせん渦が z 方向に 2 次の微小な速度で移動することを示している. (14)

(15) を使うと, 3 次の変形 $X_3 = (x_3, y_3, z_3)$ に対する方程式は

$$\dot{X}_3 - e_z \times X_3'' = -\frac{3}{2} \varepsilon^2 |X_1'|^2 e_z \times X_1'' \quad (16)$$

となり, その解は次のように与えられる (特解):

$$\left\{ \begin{aligned} x_3 &= \frac{3}{2} \varepsilon^2 k^2 \left\{ (A^2 + B^2) k^2 t (A \sin p^+ - B \sin p^-) + AB(A+B) \cdot \right. \\ &\quad \left. (-k^2 t \cos kx \sin k^2 t - \frac{1}{8} \cos 3kx \cos k^2 t) + AB(A-B) \cdot \right. \\ &\quad \left. (k^2 t \sin kx \cos k^2 t + \frac{1}{8} \sin 3kx \sin k^2 t) \right\}, \\ y_3 &= \frac{3}{2} \varepsilon^2 k^2 \left\{ (A^2 + B^2) k^2 t (A \cos p^+ + B \cos p^-) \right. \\ &\quad \left. + AB(A+B) (-k^2 t \cos kx \cos k^2 t + \frac{1}{8} \cos 3kx \sin k^2 t) \right. \\ &\quad \left. + AB(A-B) (-k^2 t \sin kx \sin k^2 t + \frac{1}{8} \sin 3kx \cos k^2 t) \right\}, \\ z_3 &= 0. \end{aligned} \right.$$

この x_3 は t に比例する secular term をもつので, このような有限振中の波は t と共に変形し, またこのような摂動展開が収束しなくなる. $A = B = \frac{1}{2}$ とおき, (16) の左辺の零次方程式の解

$$\frac{3}{64} k^2 X_1 (k \rightarrow 3k)$$

を加えると

$$\left\{ \begin{aligned} X_1 &= \cos kx (\cos k^2 t, -\sin k^2 t, 0) \\ X_2 &= 0 \\ X_3 &= \frac{3}{8} k^4 t \cos kx (\sin k^2 t, \cos k^2 t, 0) \\ &\quad + \frac{3}{64} k^2 \cos 3kx (-\cos k^2 t + \cos 9k^2 t, \sin k^2 t - \sin 9k^2 t, 0) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

となる. この解は $t=0$ のとき,

$$X = \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i X_i = (\varepsilon \cos kx, 0, z) \quad (18)$$

である. 従って, ある瞬間に小さい振中の正弦波形(18)を(21)

に禍は, t が 0 では, (17) で与えられたいように, 3 次の波数の波が現われ, また t と共に変形していく. ε のもっと高次までとれば, 高次の波数があることは明らかである.

(17) では ε^3 の項に, 形がくずれがあるが, この次数でも, 形がくずれずに定常回転をする波形を求めよために, 独立変数 t を τ で展開し

$$t = \tau + \varepsilon t_1(\tau) + \varepsilon^2 t_2(\tau) + \cdots,$$

τ を新しい独立変数に選ぶ. 前記のような secular term が現われないように t_1, t_2 を決めると

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{3}{8} k^2 \tau$$

を得る. このとき

$$X = X_0 + g(\varepsilon) (\cos k^2 \tau, -\sin k^2 \tau, 0),$$

$$g(\varepsilon) = \varepsilon \cos k\varepsilon - \frac{3}{64} k^2 \varepsilon^3 \cos 3k\varepsilon,$$

が得られ, 回転の角振動数は $\omega = k^2(1 - \frac{3}{8} k^2 \varepsilon^2)$ となり $O(\varepsilon^2)$ のずれが生じる. 橋本⁵⁾ は任意の有限振巾の波が定常回転する形を求めたが, 上記の解はその振巾が小さいときの展開の最初の2項に相等する.

§ 5. 円渦の変形

直線渦と同じようにして解が得られる. 座標系として, x

γ面を極座標で表わす円柱座標をとり，主に結果だけを記す。

1次の解として，

$$X_1^\pm = \text{Re} \left\{ (n, i, \pm \frac{\omega_n}{in}) e^{ip^\pm} \right\},$$

$$p^\pm = n\theta \pm \omega_n t,$$

$$\omega_n = n\sqrt{n^2 - 1},$$

周期性の条件からnは整数でなければならない。この場合を中立安定である。²⁾

$$X_1 = A X_1^+ + B X_1^-$$

とあくと， $X_2 = (x_{2r}, x_{2\theta}, x_{2z})$

として

$$\begin{cases} x_{2r} = \frac{\omega_n^2}{4n^2} \{ A^2 \cos 2p^+ + B^2 \cos 2p^- + 2AB (\cos 2\omega_n t - \cos 2n\theta) + \alpha \}, \\ x_{2\theta} = \frac{\omega_n^2}{4n^3} \{ -A^2 \sin 2p^+ - B^2 \sin 2p^- + \beta(\theta) \} + \frac{\omega_n^3}{n} (-A^2 + B^2) t, \\ x_{2z} = \frac{\omega_n^3}{4n^2} (A^2 \sin 2p^+ - B^2 \sin 2p^-) + \frac{\omega_n}{2} AB \sin 2\omega_n t + \frac{\omega_n^2}{4n^2} \gamma t \end{cases}$$

をうる。α, γは定数で， $\alpha + \gamma = -(4n^2 - 1)(A^2 + B^2)$ ，βはθの
ある周期関数。特に $A = B = \frac{1}{2}$ ， $\alpha = -A^2 - B^2$ ， $\gamma = 2(-2n^2 + 1)(A^2 + B^2)$ ，
 $\beta = (A^2 + B^2) \sin 2n\theta$ とあくと，

$$\begin{cases} x_{1r} = n \cos n\theta \cos \omega_n t, \\ x_{1\theta} = -\sin n\theta \cos \omega_n t, \\ x_{1z} = \frac{\omega_n}{n} \cos n\theta \sin \omega_n t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{2r} = -\frac{\omega_n^2}{8n^2} (1 + \cos 2n\theta) (1 - \cos 2\omega_n t), \\ x_{2\theta} = \frac{\omega_n^2}{8n^3} \sin 2n\theta (1 - \cos 2\omega_n t), \\ x_{2z} = \frac{\omega_n}{8} \left(1 + \frac{\omega_n^2}{n^4} \cos 2n\theta\right) \sin 2\omega_n t - \frac{2n^2-1}{4n^2} \omega_n^2 t \end{cases}$$

となる。 $t=0$ のとき, $X_2=0$ となり, また

$$X_1 = (n \cos n\theta, -\sin n\theta, 0)$$

となる。ある瞬間に X_1 で与えられる変形があると, 一般には
 倍振動が現われ, 前進速度が $O(\varepsilon^2)$ だけ平均的に遅くなるが,
 そのことを除けば, t に関する周期性は失われない。

§6. らせん渦の変形

らせん渦は回転および前進運動をしているが, ある瞬間での
 らせんに対し, 次の3つの互いに直交する単位ベクトル
 をとろう(図2),

e_1 : 軸から動径方向,

e_2 : らせんに対する接線方向,

e_3 : $e_1 \times e_2$ の方向.

このベクトルを使うと, 式(6), (7)は

$$\dot{X}_0 = \frac{1}{\beta^2} e_3, \quad (19)$$

$$\dot{X}_1 = \frac{p_1}{\beta^2} e_3 + \frac{1}{\beta^3} e_1 \times X_1' + \frac{1}{\beta^2} e_2 \times X_1'' \quad (20)$$

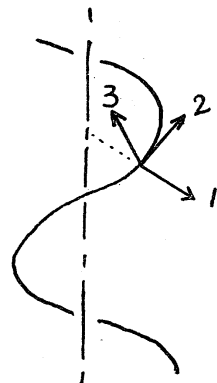


図 2

となる, ただし $\beta^2 = 1 + \alpha^2$ であり, これはらせん X_0 の曲率半径である. (18) かららせんの運動方向が各点で θ_3 方向であることがわかる. 1 次の perturbation に対しては, (13) で与えられている角度パラメータ θ を使えば, (20) より

$$X_1 = \text{Re} \left\{ \left(1, \frac{i}{k\beta}, -i \frac{\beta^2}{k^2} (-\omega_k + 2\omega_0 k) \right) e^{i(k\theta - \omega_k t)} \right\}$$

$$\omega_k = 2\omega_0 k \pm \frac{k}{\beta^3} \sqrt{\beta^2 k^2 - 1}$$

をうる. 従って $\beta k \geq 1$ (波長 $\lambda \leq 2\pi\beta^2$) の波に対しては, らせんは中立安定であるが, $\beta k < 1$ ($\lambda > 2\pi\beta^2$) に対しては不安定であることがわかる.⁴⁾

参考文献

- 1) 橋本: 本講義録
- 2) T. Kambe and T. Takao: J. Phys. Soc. Japan 31 No.2, 591.
- 3) F. R. Hama: Phys. of Fluids 6 (1963) 526.
- 4) R. Betchov: J. Fluid Mech. 22 (1965) 471.
- 5) H. Hasimoto: J. Phys. Soc. Japan 31 No.1 (1971) 293.