

アーベル多様体のトーラス的退化

名古屋大学 荒川 幸彦

§ 0. 問題の設定

以下, すべての対象は複素被約解析空間の圏で考えられているものとする。

問題. S を解析空間, S^0 をその稠密開集合で, $S - S^0$ は S の解析的部分集合になっているものとする。

S^0 上の g 次元偏極アーベル多様体の族

$$\omega^0: \mathcal{A}^0 \rightarrow S^0$$

が与えられた時, これを S 上の族

$$\omega: \mathcal{A} \rightarrow S$$

に拡張して, これが「良い」性質を持つようにせよ。

「良い」という内容を数学的に厳密にすれば, その立場によっていろいろなり得るが, 例えば次のようなことが考えられる。

- 1) ω は平坦 (flat), 同次元 (equidimensional);
- 2) ω は射影的, 特に ω^0 上の偏極の族が拡張され

ば最も自然である;

3) $\mathcal{S}$ が非特異の時, $\mathcal{A}$ も非特異;

4) $\mathcal{A}$ が非特異の時, さらにその標準因子 (canonical divisor) の形が具体的に分る;

5) ω^0 は切断 (section) を持つとする (則ち, ω^0 は群多様体の接になる)。この時, その切断は $\mathcal{S}$ 上のそれと拡張され, さらに $\mathcal{A}$ はこれを O -切断とする群多様体の接 $\mathcal{A}_0$ を開集合としてふくみ, $\mathcal{A}_0$ は $\mathcal{A}$ に作用する;

6) 各ファイバーの形が具体的に分る, 構造を分ればさらに良い。

上記の問題は $g=1$, $\dim \mathcal{S}=1$ の場合に小平教授によって深く研究され, 楕円曲面論として美しい理論になりあげられて ([2]), それは曲面論に於て重要な役割を果たした。

この場合, 上記の諸性質を本質的に満たす拡張が存在する。

我々はこれを高次元の場合に拡張して, それを一般分類理論に応用したのである。しかし高次元の場合, 曲面の極小モデルの理論がそのまゝは拡張されないので, 標準的な拡張は存在しえず, むしろいろいろの拡張の可能性のあることが自然なのである。(しかしながら, 曲線の場合の安定曲線 (stable curve) に対応する, 最も基本的な退化偏極アーベル多様体

の族が存在する。 (cf. §4 B), [7])

既に幾つかの結果が知られている ([3], [5], [7], [9], [10])
 ところでは, これらの大部分の諸結果を統一的にとらえる一
 般的な族の構成法について述べる。そこでは最近発展したト
 ーラス埋め込みの理論が本質的に用いられる。これについて
 は例えば [1] を参照されたい。本稿に於てもその用語を断わ
 りたしに用いる。

1) ρ の X - θ - ρ についての仮定: 以後, ρ の X - θ -空間
 はトーラス的 (toroidal) とする。より正確に言えば, ρ はある
 トーラス埋め込み $\mathcal{X}$ 内の開集合で, ρ^0 は $\mathcal{X}$ 内のトーラス
 $\mathcal{C}$ と ρ との交わりと仮定する。広中教授の定理によれば, ρ
 を单项変換して $\rho - \rho^0$ を正規交叉 (normal crossing) にできる
 から, 局所的にはいづれもトーラス的に変形できるわけで, 上
 記の仮定は妥当なものといえる。

§ 1. 周期写像, 仮定 (U).

簡単のため, 次の二つの仮定を置こう。

仮定 A). ω^0 の偏極は主 (principal)。

仮定 B). 切断 $\mathcal{S}_0: \rho^0 \rightarrow \mathcal{A}^0$ がある。

はじめの仮定から自然に周期写像が定義される。すなわ
 ち, $\mathcal{V}_g = \{ \tau \in M(g, \mathbb{C}) ; {}^t \tau = \tau, \operatorname{Im} \tau > 0 \}$ を g 次 Siegel

上半平面として, $Sp(g, \mathbb{Z})$ を整数係数シンプレクティック群としたとき, 多価正則写像

$$T: \mathcal{D}^0 \longrightarrow \mathcal{H}_g$$

(周期写像と呼ばれる.) と, 準同型

$$\Phi: \pi(\mathcal{D}^0, t_0) \longrightarrow Sp(g, \mathbb{Z})$$

(モノドロミーと呼ばれる.) とがあって, 任意の t_0 を基点とする閉じた道 γ に対し, $T(t_0)$ の γ に沿った解析接続 $T(\gamma(t_0))$ は

$$T(\gamma(t_0)) = \Phi([\gamma]) \cdot T(t_0)$$

とかけらる。ここで $[\gamma]$ は γ のホモトピー類で, 又 $Sp(g, \mathbb{Z})$ は良く知られた一次変数変換の形で $\mathcal{H}_g$ に作用するものとする。(詳しくは [10] 参照.)

ここで大切なことは, 上野氏によらずこの注意である。

命題. 仮定 B) のもとで, $\mathcal{D}^0$ は T と Φ とから (偏極をこわて) 再構成される。

これはさきに具体的に書けるが, 少し面倒なので, 次の仮定を置いたのちに行う。

さて, 我々はここでもう一つの重要な仮定を置く。その仮定を述べるために少しく記号を定義する必要がある。

g 次対称行列のなるベクトル空間を $\mathcal{V}_g$, 正定値行列のなる空間を $\mathcal{V}_g^+$ で表わす。又, g 次整対称行列の格子を

γ_j , 非自整対称行列のつく集合を $\overline{\gamma}_j^+$ とする。後者の $\overline{\gamma}_j$ 内での閉包は $\overline{\gamma}_j^+$ であり, その位相的閉包内の錐 $\overline{\gamma}_j^+$ となる。これを算術的閉包と呼ぶ。 $\overline{\gamma}_j^+$ の元 y は, ある $GL(j, \mathbb{Z})$ の元 u によって $uy^tu = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y'' \end{pmatrix}$, $y'' > 0$, とかけるという性質によって特徴づけられる。ト-ウ-ス埋め込み内の代数的ト-ウ-ス $\mathcal{C} (= (\mathbb{C}^*)^n)$ の座標を $(w_1, \dots, w_n)$ で表わしておく。ト-ウ-ス埋め込み先は $N_{\mathbb{R}} = \text{Hom}_{\text{alg. group}}(\mathbb{C}^*, \mathcal{C}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 内の部分の有理直錐分解 (rational partial polyhedral decomposition) $\Sigma = \{\sigma\}$ によって定まるものとする。

仮定 (U): $\mathbb{Z}$ 線型手帳

$$B: N \longrightarrow \gamma_j$$

があり, $B_{\mathbb{R}} = B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}: N_{\mathbb{R}} \longrightarrow \overline{\gamma}_j$ は次の諸性質を満たす。

- i) $B_{\mathbb{R}}(\sigma) \subset \overline{\gamma}_j^+$, $\sigma \in \Sigma$;
- ii) $B_{\mathbb{R}}(\sigma^0) \subset \gamma_j^+$, $\sigma \in \Sigma$ かつ $\dim \sigma = n$;
- iii) $N^0 = N \cap \mathcal{C}$ 上

$$T(w) = B_{\mathbb{C}}\left(\frac{\log w_1}{2\pi\sqrt{-1}}, \dots, \frac{\log w_n}{2\pi\sqrt{-1}}\right) + N(w),$$

ここで, $B_{\mathbb{C}} = B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ かつ $N(w)$ は N^0 - 値有界。 //

(U) は unipotent の類である，モノドロミーが中絶であるとの意である。上元の 3 条件 ii) は便宜上であって，言はさるに弱める。条件 iii) が本質的であって，それは一見強そうに見えるが，良くしらぬえ，モノドロミーの quasi-unipotent ness 定理によつて，有限有限被覆をとり直すことによつて言は強さの類を上形の形に変形することができる。(たとし ii) を弱める形で。) その事を用いて，仮定 (U) をみえす後の結果から，一般の類の場合を取り扱うことも可能であるが煩雑になるのでこゝではふれない。

仮定 (U) のもとで，この命題にいう同期系係によつての再構成を具体的にみておこう。X を階数 g の格子とし，基底を一つとつて $\mathbb{Z}^g$ と同一視する。 $\mathcal{C}_g$ を g 次元代数的トーラス ($\subset (\mathbb{C}^*)^g$) として， $\mathcal{S}^0 \times \mathcal{C}_g$ 上に X の作用を次のように定義する。 $\alpha \in X$ に対し，

$$T_\alpha: \mathcal{S}^0 \times \mathcal{C}_g \longrightarrow \mathcal{S}^0 \times \mathcal{C}_g$$

$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$

$$(w, u) \longmapsto (w, \oplus(\alpha T(w)) \cdot u),$$

たとし， $\oplus(\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_g) = (\oplus(\mathcal{S}_1), \dots, \oplus(\mathcal{S}_g))$ ， $\oplus(\cdot) = \exp(2\pi\sqrt{-1}(\cdot))$

u_1, u_2 は $\mathcal{C}_g$ の群としての積，則ち成分ごとに積をとるべしとする。すると仮定から，これは $T(w)$ の多価性によらず定義され，且つ作用は固有非電統で固定点がないこと

が分る。しかも作用の仕方が、商 $J^0 \times C_g / X$ は J^0 上のファイバー空間となり、その意味では A^0 と双正則同型になる。さらに前者に偏極が自然に定義されて、それと合わせて同型になることも分るのである。

§2. 認容的分解

我々の方法に於ても、特異ファイバーの構成には任意性がある。しかし、それはトースと埋め込みの理論から自然に導かれる「認容的分解」によって規定される。

以下 §1 の (仮定 (U) を含めた) 状況のもとで考える。

§1 の記号も断りなく用いる。

C_g を g 次元代数的トースとし、 $L = \text{Hom}_{\text{alg. grp}}(G_m, C_g)$
 $L_R = L \otimes_{\mathbb{Z}} R$ とおく。 X を階数 g の格子とすると、 X は $N \times L$ に次の様に作用する。 $\alpha \in X$ に対し、

$$\begin{array}{ccc} T_\alpha: N \times L & \longrightarrow & N \times L \\ \downarrow & & \downarrow \\ (a, \alpha) & \longmapsto & (a, \alpha + \alpha B(a)) \end{array}$$

定義. $N_R \times L_R$ の部分的有理直錐分解 $K = \{k\}$ が次の諸条件を満たす時、(周期手帳 T に関して) 認容的である (admissible) という。

i) $p: N_R \times L_R \longrightarrow N_R$ は部分的有理直錐分解の射

$\phi: K \rightarrow \Sigma$ を導く;

i) さらに ϕ は同変えぬ, 則ち任意の $K \in K$ に対し $\phi(K) \in \Sigma$;

ii) K は X の $N_R \times L_R$ の作用で不変である;

iii) 任意の $K \in K$, $a \in N_R$, に対し, $K \cap \phi^{-1}(a) \subset \text{Int } B_R^{(a)}$;

iv) 任意の $\sigma \in \Sigma$ に対し, σ 上にある K の個数 $\#$ の X による商は有限.

§3. 特異ファイバーの構成.

主定理. $\omega^0: \mathcal{A}^0 \rightarrow \mathcal{B}^0$ を (仮定 B), (U) を満たす主偏極アベル多様体の族とする. ω^0 の周期写像 T に関して認容的な $N_R \times L_R$ の部分有理直錐分解が与えられれば, これに対して ω^0 を拡張した $\mathcal{B}$ 上の g -変形解析空間の族 $\omega: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ を構成することが出来る. これを K に伴う トーラス的退化アベル多様体族 と名付ける.

構成された族について次の諸性質が成り立つ.

0) $\mathcal{A}$ は正規かつトーラス的である;

1) $\sigma \in \Sigma$ に対し $K_\sigma = \{K; \phi(K) = \sigma\}$ とすると,

$K_\sigma \cap \phi^{-1}(a) = \{K \cap \phi^{-1}(a); K \in K_\sigma\}$ は L_R の(部分的)多面体分解を与える. X が作用しているが, σ に対応するトーラス型道 $\mathcal{O}_\sigma$ に対し, $\mathcal{A}|_{\mathcal{O}_\sigma \cap \mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{O}_\sigma \cap \mathcal{B}$ はファイバー束で, そのファイバーの図形 (既約成分とその交わり具

合) は $K_0 \cap p^{-1}(a) / X$ の双対図形で与えられる;

2) のを n 次の錐とすると, $\mathcal{O}_\sigma$ 上のファイバーの形は成分は $\mathcal{C}_g$ の定備化になっている。一般のところではアーベル多様体の代数的トーラスによる拡張 (半アーベル多様体) の定備化になっている;

3) $\bigcup_{K \in K_\sigma} K$ が凸な ω は $\mathcal{O}_\sigma$ 上固有的である;

4) $\bigcup_{K \in K} K$ 上定義された実函数 $f(a, x)$ が次の諸条件を満たすとする。

a) f は $N \times L$ 上整数値。

b) $\lambda \in \mathbb{R}^+$ に対し $f(\lambda a, \lambda x) = \lambda f(a, x)$ 。

c) f は局所的に線型 (piecewise linear)。

さらにこの f を用いて, 上記の分解 K の各々の錐 K_i は, ある有限個の $L \times N$ 上の整数形形式 $\ell_1, \dots, \ell_r$ を用いて,

$$K = \{(a, x) \in N_{\mathbb{R}} \times L_{\mathbb{R}} \mid f(a, x) = \ell_i(a, x), \\ i = 1, \dots, r\}$$

と表わせるものとするならば, ω は, ω° の偏極を拡張することによって, 擬射影的となる。 //

証明の方針は明らかである。即ち, K に対応する $\mathcal{O} \times \mathcal{C}_g$ のトーラス埋め込み $\mathcal{B}$ を作る。認容性の条件 i) からトーラス埋め込みの写 $\rho: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{X}$ があり, i)' からそれは同

双面的である。§1の最後に述べたように、格子 X は $\mathcal{D}^0 \times \mathcal{C}_g$ に作用しているが、それが条件 iii) により $\mathcal{B} \cap \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{D})$ に拡張されることとが示される。条件 ii) と併せて、その作用が全体で、固有非連続かつ同位的でないことも示されて、

$$\mathcal{A} = (\mathcal{B} \cap \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{D})) / X$$

とすれば所与の結果を得る。この諸性質は殆んど与えられた条件をびつとらうと理論からの理論から得られる ([1] 参照) が、性質 iv) については退化リーマン関数についての理論を新たに展開する必要があり、自明ではない。

§4. 諸例.

以下に見るように、§0の問題に関連したいくつかの結果は、我々の立場から統一的に解釈したことができる。

A). 解析的ネロモデル ([5]).

次のように記号を定む。

$$\Sigma = \{\sigma_0 = \{0\}, \sigma_1 = \mathbb{R}^+\}, \quad \mathcal{X}_\Sigma = \mathbb{C}, \quad \mathcal{O}_\Sigma = \{0\},$$

$$\mathcal{D} = \{z \mid |z| < \varepsilon\}, \quad \mathcal{D}^0 = \{z \mid 0 < |z| < \varepsilon\}$$

$$\omega^0: \mathcal{A}^0 \rightarrow \mathcal{D}^0.$$

条件 (U) は、周期写像が

$$T(z) = \frac{\log z}{2\pi\sqrt{-1}} B + \mathcal{D}(z), \quad B > 0,$$

($S(z)$ は S 上正則) とかえられることに他ならない。

$$K = \{ K^0 = \{(0, 0)\}, K_n = \{(a, a_n) \mid a \in \mathbb{R}^n\} \}_{n \in \mathbb{Z}^+}$$

とすれば、これは認知的で、主定理により与えられた族にはさらに群の構造が入って、群多様体の族になる。これを S 上の解析的ネロンモデルと呼ぶ。 $\mathcal{O}_S$ 上のフックバーは $\det B$ 個の $\mathcal{C}_j$ の直和である。代数的なネロンモデルと同様の性質をもつことが [5] で示されている。

B) 半単純アーベル多様体 ([7]).

$\overline{\mathcal{Y}}_j^+ \times \mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ 上函数

$$f(y, x) = \min_{z \in \mathbb{Z}} \{ 5y^2 z + 25xz \}$$

により、主定理 4) に記した左側で部分的有理直錐分解を定義することができる。(正確にいうと、 $f(y, x)$ の定義域は $\overline{\mathcal{Y}}_j^+$ のふち上では $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ 全体でない。[7] 4-章参照) これを混合分解とよぶ。混合分解の $\overline{\mathcal{Y}}_j^+ \wedge$ の射影は再び部分的有理直錐分解となり、Delong-Voronoi 分解と名付けられる。 $\mathcal{C}_j$ を j 次の毎行列で各成分が 0 でないものの全体からなる代数的トースとすれば、手帳

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} : \mathcal{Y}_j & \longrightarrow & \mathcal{C}_j \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tau & \longmapsto & Z = (Z_{ij} = \mathcal{C}(\tau_{ij})) \end{array}$$

が定義され、 $I_m \mathcal{C} = \mathcal{C}_j^\circ$ は $\mathcal{C}_j$ の閉集合である。 $\mathcal{C}^\circ$ 上の
 $\mathcal{C}$ の逆写像 Γ は恒等 (id) を与えることに注意する。これを Delony-
 Voronoi 分解に伴う $\mathcal{C}_j$ のトースス埋め込みとし、 $\mathcal{X}_j^\circ$ を
 $\mathcal{C}_j^\circ$ の $\mathcal{C}$ 内での閉包の内点集合とする。すると混合分解 K は
 Γ に関して認容的な分解となり、 $\mathcal{X}_j^\circ$ 上に K に伴うトースス
 的退化アーベル多様体の族

$$\omega: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}_j^\circ$$

が構成される。このファイバーを安定アーベル多様体とよ
 ぶ。非常に美しい性質は、定義と、定理から ω が射影的であ
 ることで、言はこの様を用いて安定曲線の理論のアーベル
 多様体における類似が与えられることである。則ち、Mumford
 代数の理論によれば、Delony-Voronoi 分解を用いて 主偏
 極アーベル多様体のモジュラス多様体 $\mathcal{Y}_g^* = Sp(g, \mathbb{Z}) \backslash \mathcal{Y}_g$
 のコンパクト化 $\widetilde{\mathcal{Y}}_g^*$ が構成されるが、自然な全射的正則写
 像

$$\phi: \mathcal{X}_j^\circ \longrightarrow \widetilde{\mathcal{Y}}_g^*$$

があって、 ω のファイバー (つまり、安定アーベル多様
 体) の偏極をよくめれば構造は ϕ による後によりよくなる
 ので、 $\widetilde{\mathcal{Y}}_g^*$ の各点にはよるまで ϕ であって、 g 次元偏極多様体
 を対応させることができる。ただし $\widetilde{\mathcal{Y}}_g^*$ が $\mathcal{Y}_g^*$ と偏極安定
 アーベル多様体の粗モジュラス多様体であるかどうか (つ

より、相異なる点にわたるものは同型でないかど(り)は $g \leq 3$ であり肯定的に解かれていない ([4]).

しかも、種数 g の安定曲線のモジュラ多様体 $\mathcal{M}_g$ とは次のような自然な関係がある。種数 g の非特異曲線のモジュラスを $\mathcal{M}_g$ とすると、曲線 C や C の多様体 $\mathcal{M}_g$ に対応させることにより、自然な単射

$$\tau: \mathcal{M}_g \rightarrow \mathcal{M}_g^*$$

が与えられる (Torelli の定理)。この単射は正則写像

$$j: \mathcal{M}_g \rightarrow \mathcal{M}_g^*$$

に拡張される。 $g = 2$ のとき j は同型であり、 $g \geq 3$ では j は単射ではないが、既約安定曲線に対応する開部分集合に制限すれば単射である ([6])。さらに安定曲線から安定アーベル多様体への自然な正則写像も存在することが示される。

(C). 安定曲線の一様ヤコビ多様体のコンパクト化 ([9]).

安定曲線の一様ヤコビ多様体 $J(C)$ を、安定曲線 C の J グラフを用いて $U(1)$ の作用で定常化することができる。種々の概念が必要なので、ここでは詳しく述べないが、小田-Se-shadri による方法を複素解析的に我々の図でとりあつかうと、 $11^{\circ}3 \times \dots$ ともいえる場合、則ち安定曲線の局所一般変形空間上で一様ヤコビ多様体の族の定常化を論ずることができよう。

References

- [1] G. Kempf et al.: Toroidal embeddings, I, Lecture Notes in Math., 339, Springer, Berlin, 1973.
- [2] K. Kodaira,: On compact analytic surfaces, II-III, Ann. of Math., 77-78 (1963), 563-626;1-40.
- [3] D. Mumford: An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings, Compositio Math., 24 (1972), 239-272.
- [4] I. Nakamura: On moduli of stable quasi-abelian varieties, Nagoya Math. J., 58 (1975), 149-214.
- [5] I. Nakamura: Properification of Neron model and its application, to appear in Kodaira volume.
- [6] Y. Namikawa: On the canonical holomorphic map from the moduli space of stable curves to the Igusa monoidal transform, Nagoya Math. J., 52 (1973), 197-259.
- [7] Y. Namikawa: A new compactification of the Siegel space and the degeneration of abelian varieties, to appear in Math. Ann.
- [8] Y. Namikawa: Toroidal degeneration of abelian varieties, to appear in Kodaira volume.
- [9] T. Oda - C. S. Seshadri: Compactifications of the generalized Jacobian variety, to appear.
- [10] K. Ueno: On fibre spaces of normally polarized abelian varieties of dimension 2, I, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 18 (1971), 37-95; II, ibid., 19 (1972), 163-199.