

p -Laplacian をもつ非線形微分方程式の振動に対する比較定理

大阪府立大学・大学院工学研究科 山岡直人 (Naoto Yamaoka)
Department of Mathematical Sciences,
Osaka Prefecture University

1 次元 p -Laplacian をもつ非線形微分方程式

$$(\phi_p(x'))' + a(t)f(x) = 0, \quad ' = \frac{d}{dt} \quad (1)$$

の振動問題を考える. ただし, $p > 1$, $\phi_p(x) = |x|^{p-2}x$, 関数 $a(t)$ は区間 $(0, \infty)$ 上で正値連続かつ局所有界変動, $f(x)$ は実数値関数であり, 条件

$$xf(x) > 0 \quad \text{if } x \neq 0 \quad (2)$$

を満たし, 方程式 (1) の初期値に関する解の一意性を保証できるぐらい滑らかであるとする. このとき, 方程式 (1) の全ての解は大域的に存在する ([14, Appendix A] 参照). したがって, 方程式 (1) の全ての解に対して, 無限遠における解の振動性が議論できる.

方程式 (1) の非自明解が振動するとは, 解が発散する無限個の零点をもつときをいう. 逆に, 非自明解が振動しないとは, 解が有限個の零点をもつときをいう. したがって, 非振動解は終局的に正または終局的に負のどちらか一方である. そこで, 終局的に正の解を正値解と, 終局的に負の解を負値解と呼ぶ.

$f(x) = \phi_p(x)$ のとき, 方程式 (1) は方程式

$$(\phi_p(x'))' + a(t)\phi_p(x) = 0 \quad (H)$$

になる. 方程式 (H) は half-linear と呼ばれ, 線形微分方程式の解構造と類似点が多いことで知られている ([1-10, 13] 参照). 特に, 方程式 (H) には, 線形微分方程式と同様に Sturm の分離定理が成り立つ.

定理 A. 方程式

$$(\phi_p(x'))' + a_i(t)\phi_p(x) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (H_i)$$

を考える. 関数 $a_1(t)$ と $a_2(t)$ は十分大きな t に対して, 条件

$$a_1(t) \leq a_2(t) \quad (3)$$

を満たすと仮定する. このとき, 方程式 (H_2) が非振動解をもつならば, 方程式 (H_1) の全ての非自明解は振動しない.

注意. 条件 (3) の仮定のもと、方程式 (H_1) が振動解をもつならば、方程式 (H_2) の全ての非自明解は振動する。したがって、 $a_1(t) = a(t)$, $a_2(t) = a(t)$ の場合、条件 (3) は常に成り立つので、方程式 (H) の全ての非自明解は振動しないかまたは方程式 (H) の全ての非自明解は振動するかのどちらか一方である。すなわち、方程式 (H) の振動解と非振動解は混在しない。

定理 A から、方程式 (H) は係数項 $a(t)$ が小さくなれば非振動解を（または、大きくなれば振動解を）持ち易い。この事実を説明するため、方程式

$$(\phi_p(x'))' + \left\{ \left(\frac{p-1}{p} \right)^p + \frac{\delta}{(\log t)^2} \right\} \phi_p(x) = 0 \quad (4)$$

を考える。方程式 (4) の振動問題は Elbert and Schneider [6] によって研究され、方程式 (4) の全ての非自明解が振動しないための必要十分条件は、

$$\delta \leq \frac{1}{2} \left(\frac{p-1}{p} \right)^{p-1}$$

であることが示された。すなわち、 $\delta > ((p-1)/p)^{p-1}/2$ ならば、方程式 (4) の全ての非自明解は振動する。最近、Sugie and Onitsuka [11] や Sugie and Yamaoka [12] は、この必要十分条件を利用して、非線形方程式

$$(\phi_p(x'))' + \frac{1}{t^p} f(x) = 0 \quad (E)$$

の振動問題を考え、次の非振動条件と振動条件を与えた。

定理 B. 条件 (2) を仮定する。このとき、絶対値が十分大きな $x > 0$ または $x < 0$ に対して

$$\frac{f(x)}{\phi_p(x)} \leq \left(\frac{p-1}{p} \right)^p + \frac{1}{2} \left(\frac{p-1}{p} \right)^{p-1} \frac{1}{(\log |x|^{p/(p-1)})^2}$$

を満たすならば、方程式 (E) の全ての非自明解は振動しない。

定理 C. 条件 (2) を仮定する。このとき、十分大きな $|x|$ に対して、

$$\frac{f(x)}{\phi_p(x)} \geq \left(\frac{p-1}{p} \right)^p + \frac{\lambda}{(\log |x|^{p/(p-1)})^2}$$

を満たす $\lambda > ((p-1)/p)^{p-1}/2$ が存在するならば、方程式 (E) の全ての非自明解は振動する。

これらの結果から、方程式 (E) は非線形項 $f(x)$ の絶対値が小さければ非振動解を、大きければ振動解を持ち易いことがわかる。本研究では、この性質を特徴づけるため、定理 A (Sturm の分離定理) に対応する方程式 (E) の解の振動に対する比較定理を与える。以下が本研究の主定理である。

定理 1. 方程式

$$(\phi_p(x'))' + \frac{1}{t^p} f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (E_i)$$

を考える. 関数 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ は条件 (2) を満たし, 絶対値が十分大きな $x > 0$ (または, $x < 0$) に対して,

$$|f_1(x)| \leq |f_2(x)| \quad (5)$$

を満たすと仮定する. このとき, 方程式 (E_2) が正値解 (または, 負値解) をもつならば, 方程式 (E_1) の全ての非自明解は振動しない.

系 1. 関数 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ は条件 (2) を満たし, 十分大きな $|x|$ に対して, 条件 (5) を満たすと仮定する. このとき, 方程式 (E_1) が振動解をもつならば, 方程式 (E_2) の全ての非自明解は振動する.

注意. 定理 1 と系 1 から, $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(x)$ の場合, 条件 (5) は常に成り立つので, 方程式 (E) の振動解と非振動解は混在しない.

定理 1 は相平面解析を用いて示すため, 方程式 (E) と同値な方程式系を与える. 変数変換 $s = \log t$, $u(s) = x(t)$ によって, 方程式 (E) は方程式

$$(\phi_p(\dot{u}))' - (p-1)\phi_p(\dot{u}) + f(u) = 0, \quad \cdot = \frac{d}{ds}$$

となるので, 方程式 (E) は方程式系

$$\begin{cases} \dot{u} = \phi_q(v), \\ \dot{v} = (p-1)v - f(u) \end{cases} \quad (S)$$

と同値である. ただし, q は

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

を満たす値である.

次の二つの補題を利用して, 定理 1 の証明を与える.

補題 1 ([12, Lemma 3.1]). 条件 (2) を仮定する. このとき, 方程式 (E) が正値解 $x(t)$ をもつならば, 十分大きな t に対して $x'(t) > 0$ であり, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$ である.

補題 2 ([11, Lemmas 2.2 and 2.3]). 条件 (2) を仮定する. このとき, 方程式 (E) が振動解をもつならば, その解に対応する方程式系 (S) の解軌跡は非有界かつ原点の中心を時計回りに回る.

定理 1 の証明. 条件 (5) より,

$$f_1(x) \leq f_2(x) \quad \text{for } x \geq L > 0 \quad (6)$$

を満たす L が存在する. 絶対値が十分大きな $x < 0$ に対して条件 (5) が成り立つ場合は, 同様の手法によって証明できるので, 詳細は省略する.

定理の仮定より, 方程式 (E_2) は正值解 $x(t)$ をもつので, 補題 1 より,

$$x(t) \geq L \quad \text{and} \quad x'(t) > 0 \quad \text{for } t \geq T$$

を満足する $T > 0$ が存在する. このとき,

$$(u(s), v(s)) = (x(e^s), \phi_p(e^s x'(e^s)))$$

とおけば, $(u(s), v(s))$ は方程式系

$$\begin{cases} \dot{u} = \phi_q(v), \\ \dot{v} = (p-1)v - f_2(u) \end{cases} \quad (S_2)$$

の解であり,

$$u(s) = x(t) \geq L \quad \text{and} \quad v(s) = \phi_p(tx'(t)) > 0 \quad \text{for } s \geq \log T$$

を満たす. したがって, $s \geq \log T$ における $(u(s), v(s))$ に対応する解軌跡を Γ_2 ,

$$u_* = u(\log T), \quad v_2 = v(\log T), \quad P_2 = (u_*, v_2)$$

とおき, $R = \{(u, v) : u \geq L \text{ and } v > 0\}$ と定義すれば, $P_2 \in \Gamma_2 \subset R$ となる.

証明は背理法で行うため, 方程式 (E_1) が振動解 $y(t)$ を持つと仮定する. このとき, 補題 2 より, $y(t)$ に対応する方程式系

$$\begin{cases} \dot{u} = \phi_q(v), \\ \dot{v} = (p-1)v - f_1(u) \end{cases} \quad (S_1)$$

の解軌跡は非有界かつ原点を中心に時計回りする. したがって, 直線 $u = u_*$ を無限回通過するので, $v > v_2$ で初めて交わる点を $P_1 = (u_*, v_1)$ とおき, 点 P_1 を通過する解軌跡を Γ_1 とおく. このとき, $v_1 > v_2$ なので, 点 P_1 は点 P_2 より上に位置する.

方程式系 (S_1) と (S_2) のベクトル場から, 領域 R で共に $\dot{u} > 0$ であり, さらに, 解軌跡 Γ_1 は $v = 0$ に交わるので, Γ_1 と Γ_2 は, 領域 R で交点をもつ. 初めて交わる点を $Q = (u^*, v_0) \in R$ とおく. このとき, 曲線 P_1Q と P_2Q は, u に依存する関数とみなすことができるので, それぞれを $v = \xi_1(u)$, $v = \xi_2(u)$ とおく. このとき, $i = 1, 2$ に対して, 関数 $\xi_i(u)$ は

$$\frac{d}{du} \xi_i(u) = \frac{(p-1)\xi_i(u) - f_i(u)}{\phi_q(\xi_i(u))}, \quad \text{for } u_* \leq u \leq u^* \quad (7)$$

を満足する. さらに, 曲線 P_1Q は曲線 P_2Q より上に位置し, 点 Q で一致するので, $\xi_1(u)$ と $\xi_2(u)$ は

$$0 < \xi_2(u) < \xi_1(u) \quad \text{for } u_* \leq u < u^*, \quad (8)$$

$$\xi_1(u^*) = \xi_2(u^*) \quad (9)$$

を満たす。したがって、(6)-(8) より、

$$\begin{aligned} \phi_q(\xi_1(u)) \frac{d}{du} \xi_1(u) &= (p-1) \xi_1(u) - f_1(u) \\ &> (p-1) \xi_2(u) - f_2(u) = \phi_q(\xi_2(u)) \frac{d}{du} \xi_2(u) \quad \text{for } u_* \leq u < u^* \end{aligned}$$

となる。両辺を u_* から u^* まで積分すると

$$\frac{1}{q} (|\xi_1(u^*)|^q - |\xi_1(u_*)|^q) > \frac{1}{q} (|\xi_2(u^*)|^q - |\xi_2(u_*)|^q)$$

なので、条件 (9) より、 $\xi_1(u_*) < \xi_2(u_*)$ となる。これは $u = u_*$ の条件 (8) に矛盾する。□

主定理の適用例を説明するため、方程式 (E) における一対の非振動条件と振動条件を与える。

例 1. 条件 (2) を仮定する。このとき、絶対値が十分大きな $x > 0$ または $x < 0$ に対して、

$$\frac{f(x)}{\phi_p(x)} \leq \left(\frac{p-1}{p} \right)^p$$

を満たすならば、方程式 (E) の全ての非自明解は振動しない。

例 2. 条件 (2) を仮定する。このとき、十分大きな $|x|$ に対して、

$$\frac{f(x)}{\phi_p(x)} \geq \lambda$$

を満たす $\lambda > ((p-1)/p)^p$ が存在するならば、方程式 (E) の全ての非自明解は振動する。

例 1 の証明. $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = ((p-1)/p)^p \phi_p(x)$ とおく。このとき、方程式 (E_1) は方程式 (E) に、方程式 (E_2) は方程式

$$(\phi_p(x'))' + \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \frac{1}{t^p} \phi_p(x) = 0$$

になる。関数 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ は条件 (2) と (5) を満足する。実際、絶対値が十分大きな $x > 0$ (または、 $x < 0$) に対して、

$$|f_1(x)| = |f(x)| \leq \left(\frac{p-1}{p} \right)^p |\phi_p(x)| = |f_2(x)|$$

が成立する。方程式 (E_2) は正值解 $x(t) = t^{(p-1)/p}$ (または、負値解 $x(t) = -t^{(p-1)/p}$) をもつので、定理 1 より、方程式 (E_1) の全ての非自明解は振動しない。すなわち、方程式 (E) の全ての非自明解は振動しない。□

例 2 の証明. $f_1(x) = \lambda \phi_p(x)$, $f_2(x) = f(x)$ とおく. このとき, 関数 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ は条件 (2) と条件 (5) を満足し, 方程式 (E_1) は方程式

$$(\phi_p(x'))' + \frac{\lambda}{t^p} \phi_p(x) = 0$$

に, 方程式 (E_2) は方程式 (E) になる. 方程式 (E_1) の全ての非自明解が振動するための必要十分条件は, $\lambda > ((p-1)/p)^p$ なので ([1] 参照), 方程式 (E_1) は振動解をもつ. したがって, 系 1 より, 方程式 (E_2) , すなわち方程式 (E) の全ての非自明解は振動する. $\square$

これらの例からわかるように, 方程式 (E) の非振動条件や振動条件を得るには, 基準となる方程式に対して, 非振動解または振動解をもつための十分条件を与えればよい. 例えば, 方程式

$$(\phi_p(x'))' + \frac{1}{t^p} \left\{ \left(\frac{p-1}{p} \right)^p + \varepsilon(x) \right\} \phi_p(x) = 0 \quad (10)$$

が正値解 (または, 負値解) をもつための十分条件が与えられたと仮定する. ただし, $\varepsilon(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で非負値連続関数である. このとき, 関数 $f(x)$ が条件 (2) を満たし, 絶対値が十分大きな $x > 0$ (または, $x < 0$) に対して,

$$\frac{f(x)}{\phi_p(x)} \leq \left(\frac{p-1}{p} \right)^p + \varepsilon(x)$$

を満たすならば, 方程式 (E) の全ての非自明解は振動しない. 一方, 方程式 (10) が振動解をもつための十分条件が与えられたと仮定する. このとき, 関数 $f(x)$ が条件 (2) を満たし, 十分大きな $|x|$ に対して,

$$\frac{f(x)}{\phi_p(x)} \geq \left(\frac{p-1}{p} \right)^p + \varepsilon(x)$$

を満たすならば, 方程式 (E) の全ての非自明解は振動する.

参考文献

- [1] O. Došlý and P. Řehák, Half-linear differential equations, North-Holland Mathematics Studies, vol. 202, Elsevier, Amsterdam, 2005.
- [2] O. Došlý, Oscillation criteria for half-linear second order differential equations, Hiroshima Math. J. **28** (1998) 507–521.
- [3] O. Došlý, Perturbations of the half-linear Euler-Weber type differential equation, J. Math. Anal. Appl. **323** (2006) 426–440.
- [4] O. Došlý and A. Lomtatidze, Oscillation and nonoscillation criteria for half-linear second order differential equations, Hiroshima Math. J. **36** (2006) 203–219.

- [5] Á. Elbert, A half-linear second order differential equation, Qualitative theory of differential equations, Vol. I, II (Szeged, 1979), pp. 153–180, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **30**, North-Holland, Amsterdam-New York, 1981.
- [6] Á. Elbert and A. Schneider, Perturbations of the half-linear Euler differential equation, Results Math. **37** (2000) 56–83.
- [7] H.-L. Hong, W.-C. Lian and C.-C. Yeh, Oscillation criteria for half-linear differential equations with functional arguments, Nonlinear World **3** (1996) 849–855.
- [8] H. J. Li and C. C. Yeh, Sturmian comparison theorem for half-linear second-order differential equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **125** (1995) 1193–1204.
- [9] J. D. Mirzov, On some analogs of Sturm's and Kneser's theorems for nonlinear systems, J. Math. Anal. Appl. **53** (1976) 418–425.
- [10] Z. Pátíková, Asymptotic formulas for non-oscillatory solutions of perturbed half-linear Euler equation, Nonlinear Anal. **69** (2008) 3281–3290.
- [11] J. Sugie and M. Onitsuka, A non-oscillation theorem for nonlinear differential equations with p -Laplacian, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **136** (2006), 633–647.
- [12] J. Sugie and N. Yamaoka, Growth conditions for oscillation of nonlinear differential equations with p -Laplacian, J. Math. Anal. Appl., **306** (2005), 18–34.
- [13] J. Sugie and N. Yamaoka, Comparison theorems for oscillation of second-order half-linear differential equations, Acta Math. Hungar. **111** (2006) 165–179.
- [14] N. Yamaoka, Oscillation criteria for second-order damped nonlinear differential equations with p -Laplacian, J. Math. Anal. Appl., **325** (2007), 932–948.